

イデール類群の 1-コホモロジー群

について

阪大理学部 赤川 安正

- $\mathcal{L} = \{l\}$: 有限個又は無限個の素数 l の集合
- $\mathcal{C}$: 次の 3 条件をみたす pro-finite groups のカテゴリー
 - C1) $\text{Hom}(G, G')$ は位相群 G から G' への hom. 全体
 - C2) $G \in \text{obj } \mathcal{C} \implies$ 可換 pro- p ($p \in \mathcal{L}$)-群 A の G による群拡大 $\tilde{G}$ (i.e. $1 \rightarrow A \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$: exact) をとると, $\tilde{G} \in \text{obj } \mathcal{C}$.
 - C3) $\mathcal{C}$ の中で $\cdots \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1$ をとると常に $\varprojlim G_n \in \text{obj } \mathcal{C}$

とする. 例えば pro-finite gr., pro-solvable gr., pro- p -

gr. 等を考えればよい. 次に
(のカテゴリー)

- $\Gamma = \{\gamma\}$: 固定された index set
- $G_S = \{G_\gamma \mid \gamma \in S\}$: pro-finite gr. G_γ ($\in \text{obj } \mathcal{C}$ or not) の集合

とする. 次の3条件をみたす組 (G, σ_P, ι_S) の集合をとる

$$\text{Obj } \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$$

$$\text{Obj } 2) \quad \sigma_P = \{\sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \text{ は位相群 } G \text{ の (必ずしも最小ではない) 生成系 i.e. } G = \langle \sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle$$

$$\text{Obj } 3) \quad \iota_S = \{\iota_\beta \mid \beta \in S\}, \quad \iota_\beta: G_\beta \rightarrow G \text{ (hom.)}$$

$\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$ は次の様にして半順序集合となる:

$$(G, \sigma_P, \iota_S) \geq (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \iff \exists \psi \in \text{Hom}(G, G');$$

$$\text{s.t. } \textcircled{1} \psi(\sigma_\gamma) = \sigma_{\gamma'} \quad (\forall \gamma \in \Gamma) \quad \textcircled{2} \psi \iota_\beta = \iota_{\beta'} \quad (\forall \beta \in S)$$

$$\left. \begin{array}{l} (G, \sigma_P, \iota_S) \geq (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \\ \text{"} \leq \text{"} \end{array} \right\} \text{ が同時に成立つとき,}$$

$$(G, \sigma_P, \iota_S) \sim (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \text{ とし, } \mathcal{C}(\Gamma, G_S) / \sim$$

をあらためて $\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$ とおく.

◎ C3) より $\mathcal{C}(\Gamma, G_S)$ は帰納的集合になる.

よって (G, σ_P, ι_S) がその極大元であるとき, 「 G の relations は G_S だけで与えられる」ということにする.

さて,

• k : 体

• $k_S = \{k_\beta \mid \beta \in S\}$ は $k_\beta \supset k$ なる体 k_β の集合

• A_k : $\prod_S k_\beta \supset A_k \supset (\sum_S k_\beta) \cup k$ なる k -algebra

- $\bar{k}/k$: max. C-拡大 (i. e. Galois 群が C に属する Galois 拡大のうち最大のもの)
- $A_{\bar{k}} = A_k \otimes_k \bar{k}$
- $J_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^\times$: $A_{\bar{k}}$ の正則元が作る乗法群
- $P_{\bar{k}} : \bar{k} \hookrightarrow A_{\bar{k}}$ における $\bar{k}^\times$ の image
- $C_{\bar{k}} = J_{\bar{k}} / P_{\bar{k}}$
- $\mathcal{O}_k$: $\bar{k}/k$ のガロワ群 $G(\bar{k}/k)$
- $\mathcal{O}_S = \{\mathcal{O}_s \mid s \in S\}$, $\mathcal{O}_s$ は k_s の max. C-拡大 (又は単に max. Galois 拡大) の Galois 群とする. このとき次の定理が成立つ.

定理 $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$

$\Leftrightarrow \mathcal{O}_k$ の relations は $\mathcal{O}_S$ だけで与えられる

実際、^代数体や有限体上の一変数代数関数体の様に、イデール類群が類構造をなすものは $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$ をみたす. この $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$ は Hasse のノルム定理と同値なものであるが (例えば 河田敬義「代数的整数論」共立), 上記定理はこの等式のいま一つの解釈を与えるものといえる.