

3次元渦運動のギ正準形式とヴォートン解析

名大工 桑原真二

(Sinzi Kuwabara)

§1. まえおき

ここでは縮まない、粘性のない流体の3次元渦運動を考
えよう。このような運動においては、位相空間、渦度の対応
する成分をギ正準座標^{座標}ととり、その系のヘリシティーの半
分をハミルトニアンと取り、ギ正準形式に書けることを示す。⁵⁾
対する通常の正準方程式の右辺の符号が正置になるのに対し
て、ギ正準形式のそれは正となる。

このギ正準方程式から近似的にヴォートンの方程式を導出
する。渦糸の切断と再結合には粘性の効果が必要である。数
値種分において、空間、時間メッシュの分割から人工粘性が生
ずるような、ヴォートン分割がそのような効果をもつと考
えても全く不合理ではなからう。そこで渦の切断、再結合を
ヴォートン近似によって可能であると考えられる。

§2. 3次元渦運動のギ正準形式

無限に広い領域での縮まない、粘性のない流体の渦運動

は、Lagrange 座標 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と時刻 t を独立変数とする位置ベクトル $x = x(\alpha, t)$ ($x(\alpha, 0) = \alpha$), 速度ベクトル $\omega = \omega(\alpha, t)$ を用いて

$$\frac{Dx}{Dt} = v(\alpha, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \omega(\alpha', t) \times R d^3\alpha' \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= e_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha} \quad (e_\alpha: \text{デカルト単位ベクトル}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[-\frac{1}{r^3} \omega(\alpha) \times \omega(\alpha') - \frac{3}{r^5} (\omega \cdot R)(\omega(\alpha') \times R) \right] d^3\alpha' \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R = x(\alpha, t) - x(\alpha', t), \quad r = |R|$$

と書くことが出来る。ここで $v(\alpha, t)$ は流線ベクトルで渦度をもろいて Biot-Savart の法則で表わされている。2.2 では無限遠からの効果はないと仮定されている。なお (2.2) 又は以下では、和の略記号がもろいられる。(2.1) (2.2) は渦運動を論ずるのに完全に関いた形式である。すなわち、 $\omega(\alpha, t)$ の初期条件 ($\text{div } \omega(\alpha, 0) = 0$) を与えれば、以後の渦運動は完全に決定される。(2.2) は容易に

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= e_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha} \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{r^3} \omega(\alpha) \times \omega(\alpha') - \frac{3}{r^5} R (R \cdot (\omega(\alpha) \times \omega(\alpha'))) \right] d^3\alpha' \end{aligned} \quad (2.2')$$

と書きなおすことが出来る。

2.3 で汎関数微分を考へる。I が 1 変数 x の関数 $f(x)$ の汎関数、すなわち $I = I[f(x)]$ であるとき、 $f(x)$ を少し変化

I を $f(x) + \delta f(x)$ としたとき、 I の変化 δI が

$$\begin{aligned}\delta I &= I[f(x) + \delta f(x)] - I[f(x)] \\ &= \int A(x) \delta f(x) dx + O(\delta f^2)\end{aligned}\quad (2.3)$$

と表わされるとき、 $A(x)$ を I の $f(x)$ に対する汎関数微分といふ

$$A(x) = \frac{\delta I}{\delta f(x)} \quad (2.4)$$

と表わす。 f が n 変数 $x_1, \dots, x_n$ の関数であればあるには、対応する式は

$$\begin{aligned}\delta I &= I[f(x_1, \dots, x_n) + \delta f(x_1, \dots, x_n)] - I[f(x_1, \dots, x_n)] \\ &= \int \dots \int A(x_1, \dots, x_n) \delta f(x_1, \dots, x_n) d^n x + O(\delta f^2)\end{aligned}\quad (2.3')$$

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta I}{\delta f(x_1, \dots, x_n)} \quad (2.4')$$

又、多変数関数の有限個の関数 $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_M(x_1, \dots, x_n)$ の汎関数微分があれば

$$\begin{aligned}\delta I &= I[f_1 + \delta f_1, \dots, f_M + \delta f_M] - I[f_1, \dots, f_M] \\ &= \int \dots \int \sum_{m=1}^M A_m(x_1, \dots, x_n) \delta f_m(x_1, \dots, x_n) d^n x + O(\delta f^2)\end{aligned}\quad (2.3'')$$

$$A_m(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta I}{\delta f_m(x_1, \dots, x_n)} \quad (2.4'')$$

となる。

今

$$I = \int F(f(x)) dx \quad (2.5)$$

9 形の汎関数の場合には

$$\begin{aligned}\delta I &= \int F(f + \delta f) dx - \int F(f) dx \\ &= \int \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) dx + O(\delta f^2)\end{aligned}$$

と表すので

$$\frac{\delta I}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} \quad (2.6)$$

である。

$x(a)$, $\omega(a)$ の汎関数 $H[x, \omega]$ は

$$\begin{aligned}H[x, \omega] &= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \omega(a') \cdot (\omega(a'') \times \mathbb{P}) d^3 a' d^3 a'' \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\lambda\beta\gamma} \omega_\lambda(a') \omega_\beta(a'') r_\gamma d^3 a' d^3 a'' \quad (2.7)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P} = x(a', t) - x(a'', t), \quad r = |\mathbb{P}|$$

と定義すると

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} &= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta(a'') (x_\gamma(a) - x_\gamma(a'')) d^3 a'' \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\lambda\alpha\gamma} \omega_\lambda(a') (x_\gamma(a') - x_\gamma(a)) d^3 a' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta(a') r_\gamma(a, a') d^3 a' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r^3} [\omega(a') \times \mathbb{P}]_\alpha d^3 a' \quad (2.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta x_\alpha(a)} &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{r^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta(a) \omega_\gamma(a') \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{r^5} r_\alpha(a, a') \omega_\alpha(a) \epsilon_{\lambda\beta\gamma} \omega_\beta(a') r_\gamma(a, a') \right) d^3 a'\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{2^3} \omega(a) \times \omega(a') - \frac{3}{2^5} P(\omega(a) \cdot (\omega(a') \times P(a, a'))) \right] d^3 a' \quad (2.9)$$

さう。 (2.8), (2.9) を (2.1), (2.2') と比較する ことによつて

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \omega_a} \quad (2.10)$$

$$\frac{D\omega_a}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \alpha} \quad (2.11)$$

さう。これらの右辺のいずれか¹² 変号がつけば通常の正準形式となる。そこでこの場合には *quasi-canonical formulation* と呼ぶことにする。

ヘリシティ $H_L(t)$ は

$$\begin{aligned} H_L(t) &= \iiint v(x, t) \cdot \omega(x, t) d^3 x \\ &= \iiint v(a, t) \cdot \omega(a, t) d^3 a \end{aligned}$$

と定義すれば、 (2.1) より

$$H_L(t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \iiint \frac{1}{2^3} \omega(a, t) \cdot (\omega(a', t) \times P) d^3 a d^3 a' \quad (2.12)$$

となり、 (2.7) はヘリシティの半分のことがわかる。

さう。 *quasi-canonical formulation* の導出

今コンパクトな渦の場 (ω の領域の閉包が有界、閉

集合) を考え、これを細胞に分割し、 $l=1, \dots, L$ と名前をつけ、各々を力学系の単位として近似する。特性関数

$$\Lambda^3(a, l) = \begin{cases} 1, & a \in l\text{-細胞} \\ 0, & a \notin l\text{-細胞} \end{cases} \quad (3.1)$$

を定義する。そこで

$$\iiint \Lambda^3(a, l) d^3a = V(l) \quad (3.2)$$

は l 細胞の体積で、時間的に一定である。後の細胞の分裂を考えると最も厳密には分裂(あるいは初期)から次の分裂の間体積は保存する。

細胞の運動も考えるとき、細胞の広がった位置ベクトル $X(a, t)$ ($a \in \Lambda^3(a, l) = 1$) の位置ベクトル $X_\alpha(l, t)$ で表わし、又渦度 $\omega(a, t)$ は $X_\alpha(l, t)$ に集中していつとして

$$x_\alpha(a, t) = \sum_l X_\alpha(l, t) \Lambda^3(a, l) \quad (3.3)$$

$$\omega_\alpha(a, t) = \sum_l \Omega_\alpha(l, t) V(l) \delta^3(a - A(l)) \quad (3.4)$$

$$X_\alpha(l, t) = x_\alpha(A(l), t) \quad (3.5)$$

と近似する。(3.4) の $V(l)$ は Ω_α が渦度の次元をもつように入れたものである。このような渦場を細胞に分割し、単一の位置ベクトル $X(l, t)$ と渦度ベクトル $\Omega(l, t)$ で表わすことにすると、無限連続自由度の力学系を可附番自由度の力学系で近似する方法をヴォートン・モデルと呼ぶことにする。

(2.7)の H の x, ω に(3.3), (3.4)の近似式を代入し、積分を実行すれば、 H は $X(l, t), \Omega(l, t)$ の関数とみられる。

そこで X, Ω について1/2の変分をとれば

$$\delta H = \sum_l \left(\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \delta X_\alpha(l) + \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \delta \Omega_\alpha(l) \right) \quad (3.6)$$

とす。又、 H の x, ω について1/2の変分をとれば

$$\delta H = \iiint \left(\frac{\delta H}{\delta \chi_\alpha(a)} \delta \chi_\alpha(a) + \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta \omega_\alpha(a) \right) d^3 a \quad (3.7)$$

とす。更に $\delta \chi_\alpha(a), \delta \omega_\alpha(a)$ を(3.3), (3.4)をもちいて

$$\left. \begin{aligned} \delta \chi_\alpha &= \sum_l \delta X_\alpha(l, t) \Lambda^3(a, l) \\ \delta \omega_\alpha &= \sum_l \delta \Omega_\alpha(l, t) V(l) \delta^3(a - A(l)) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

と近似すれば、(3.7)は

$$\delta H = \sum_l \left[\iiint \frac{\delta H}{\delta \chi_\alpha(a)} \Lambda^3(a, l) d^3 a \delta X_\alpha(l, t) + \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta^3(a - A(l)) d^3 a V(l) \delta \Omega_\alpha(l, t) \right] \quad (3.9)$$

とす。こゝまで(3.6)と(3.9)は2つの異なるルートを経て H の変分の近似を行なったわけであるが、この両者が一致しなければならないという条件(両立条件)を課せば

$$\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta \chi_\alpha(a)} \Lambda^3(a, l) d^3 a \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta^3(a - A(l)) d^3a V(l) \quad (3.11)$$

が成立つ。

次に (2.10), (2.11) において x_α, ω_α に (3.3), (3.4) の近似をもちいた場合の対応する方程式を求めよう。(3.10), (3.11) の右辺の形から (2.10) に $\iiint d^3a \delta^3(a - A(l)) V(l)$ の、(2.11) に $\iiint d^3a \Lambda^3(a, l)$ のオペレーションをほどこすと両者の右辺は左辺の偏微分で表わされる。すなわち

$$\iiint \frac{DX_\alpha}{Dt} \delta^3(a - A(l)) d^3a V(l) = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \quad (3.12)$$

$$\iiint \frac{D\omega_\alpha}{Dt} \Lambda^3(a, l) d^3a = \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \quad (3.13)$$

とする。左辺の積分を実行すると結局

$$\frac{DX_\alpha(l, t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \quad (3.14)$$

$$\frac{D\Omega_\alpha(l, t)}{Dt} = \frac{1}{V(l)} \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \quad (3.15)$$

とする。(2.7) に (3.3), (3.4) を代入し、積分を実行すると

$$H = \frac{1}{8\pi} \sum_{l'} \sum_{l''} \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}}{R(l', l'', t)}, \Omega_\alpha(l', t) \Omega_\beta(l'', t) R_\gamma(l', l'', t) \\ V(l') V(l'') \quad (3.16)$$

$$R_\alpha(l', l'') = X_\alpha(l', t) - X_\alpha(l'', t), \quad R(l', l'', t) = |R(l', l'', t)|$$

とする。ここで $l' = l''$ の寄与は 0/0 となり、総和において

2の項はのぞくものとす。 (3.16) を (3.14), (3.15) に代入しベクトル形で書けば

$$\frac{D\mathbf{X}(l,t)}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l'}' \frac{v(l')}{R(l',l'',t)}, \Delta\mathbf{Q}(l',t) \times \mathbf{R}(l, l', t) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\Delta\mathbf{Q}(l,t)}{Dt} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{l'}' v(l') \left[\frac{1}{R(l, l', t)}, \Delta\mathbf{Q}(l, t) \times \Delta\mathbf{Q}(l', t) \right. \\ & \left. - \frac{3}{R(l, l', t)^3} \mathbf{R}(l, l', t) \{ \Delta\mathbf{Q}(l, t) \cdot (\Delta\mathbf{Q}(l', t) \times \right. \\ & \left. \left. \mathbf{R}(l, l', t) \} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

そうす。こゝで $\sum$ につけた ' は $l'=l$ の項をのぞくことを意味する。これがヴォートンの基礎方程式である。又、(2.10) (2.11) より適当な近似をもちいて、渦糸近似をたすことができる。

§ 4. 分裂するヴォートンと時間メッシュの収縮

以前に行った結んだ2つの渦輪の数値実験で、始めは割合にずんぐりしたヴォートンも、ヴォートン間の非線形相互作用が強くなると、渦糸のひきのばし効果のため、急速に細長いヴォートンに成長することがわかった。このような状況ではヴォートンを単一の位置ベクトルと渦度ベクトルで表わすのでは近似が悪く、ヴォートンの分裂を考慮する必要がある。ヴォートンは、実際には時間の経過と共に複雑な変形をうけ

るであろう。しかし、その変形を簡単に長さ λ と断面積 σ の变化で表わしうと考へる。すなわち、各ヴォートンに相当長さ、相当断面積という概念を導入し、ヴォートンの変形を大局的に考察する。今1つのヴォートンに着目し、その相当長さ(渦度と平行)を $\lambda(t)$ と相当断面積を $\sigma(t)$ とすれば、断面を円形と仮定した時の相当直径は $2\sqrt{\sigma(t)/\pi}$ となり。そこで(相当)太さ比 $T_h(t)$ を

$$T_h(t) = \frac{2\sqrt{\sigma(t)/\pi}}{\lambda(t)} \quad (4.1)$$

で定義する。

ヴォートンを渦糸の1部と考へれば、その断面積と渦度の積すなわち循環 Γ と断面積と長さの積すなわち体積は時間的に不変と考へられる。そこで

$$\omega(t)\sigma(t) = \Gamma = \text{不変} \quad (4.2)$$

$$\lambda(t)\sigma(t) = V = \text{不変} \quad (4.3)$$

という条件を課すことにする。初期に Γ, V は与えられるから時々刻々の $\omega(t)$ を計算すれば、(4.2), (4.3)によって各時刻の $\sigma(t)$ と $\lambda(t)$ が、したがって $T_h(t)$ も(4.1)によって計算することが出来る。

実際の計算にあたっては $T_h(t)$ に下限 T_{h0} をもうけ、 $T_h(t)$ が T_{h0} に達したならば、ヴォートンは分裂すると考へる。

縦方向に2つの等しいヴォートンに分裂するとすれば、そのヴォートンは消滅して、新たな X から ΔQ の正負の側に相当長さの $1/4$ の位置に、渦度が (分裂前と) 同じ、相当長さが半分、相当断面積が同じ、2つのヴォートンが発生すると考える。各ヴォートンについてこのような評価を行って、計算を進めきわけである。

ヴォートンの分裂を考えることは、流場の場の特徴的長さが減小することと意味する。このような状況では、特徴的時間も減小すると考えられる。この力率系の変数で時間を表わすものを $\omega(a, t)$ とし、 $|\omega(a, t)|^{-1}$ がある。そこで

$$\omega_{\max}(t) = \max_a |\omega(a, t)| \quad (4.4)$$

を定義し、初期の $\omega_{\max}(t)$ が2倍になったら、初期の時間ステップ $\Delta t(0)$ の半分に新たな時間ステップとして、以下同様に積分を実行するものとする。各時刻の時間ステップは

$$\Delta t(t) = \Delta t(0) / 2^{\text{Int}(\log_2(\omega_{\max}(t)/\omega_{\max}(0)))} \quad (4.5)$$

である。Int は小数部分を切り捨て整数化することを意味する。

5. 結んだ2つの渦輪

半径 a 、断面~~積~~長さ、循環 Γ の、同形、同じ強さの2つの渦輪が、各渦輪を含む面が直交し、互いの中心を置くよう初期配位から、それらの発展をヴォートン・モデルで計算

する。規格化は

$$x/a, t/(a^2/\Gamma), v/(A\Gamma/a), \omega/(\Gamma/a^2) \quad (5.11)$$

等である。初期バウメーは

$$b/a = 0.1, \quad \Delta t(0) = 0.01 \quad (5.2)$$

初期には $20 \times 2 = 40$ 個のヴォートンがあるものとす。

したがって

$$Th(0) = 0.6366.. \quad (5.3)$$

である。太さ b の下限は $Th_b = 0.5$ ととり。数値種合は変形 Euler 法を用いて、(3.17), (3.18) の右辺で時間微分を計算するとき、その時刻とその1ステップ先のそれ(近似値)の平均値をとる方法で行った。

第1図は渦輪の発展する面図で示してある。図中の NT は渦輪にふくまれるヴォートンの数、 DT はその時刻における時間メッシュを示す。以下、エンストロフィ (第2図, E_s)、ヘリシティ (第2図, H_c)、運動エネルギー (第3図, E_k)、全運動エネルギー (第3図, T_E)、渦輪の運動量 (第4図, $P(1)$)、全運動量 (第4図, TP)、角運動量 (第5図, $AP(1)$)、全角運動量 (第5図, TAP)、全渦度 (第6図, TO)、渦度の初期値で規格化した L_2 ノルム $(E_s(t)/E_s(0))^{0.5}$ と ω マックスимум・ノルム $(\omega_{\max}(t)/\omega_{\max}(0))$ の逆数 (第7図) の時間発展が示されている。各々 $t=0 \sim 5$ 及び $t=5 \sim 5.055$

が別の図にうつっている。第6図の右にはヴォートンの最小長さ（横軸）と渦輪全体の長さ（縦軸）の各時刻における値の軌跡が両対数グラフで示してある。

なお、上の種分量は、

$$E_s(t) = \frac{1}{2} \iiint \omega(a, t)^2 d^3a \quad (5.4)$$

$$H_L(t) = \iiint w(a, t) \cdot \omega(a, t) d^3a \quad (5.5)$$

$$E(t) = \frac{1}{8\pi} \iiint \iiint \frac{1}{2} \omega(a, t) \cdot \omega(a', t) d^3a d^3a' \quad (5.6)$$

$$P_\alpha(t) = \frac{1}{2} \iiint \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta(a, t) \omega_\gamma(a, t) d^3a \quad (5.7)$$

$$AP_\alpha(t) = \frac{1}{2} \iiint (x_\alpha(a, t)^2 - x(a, t)^2) \omega_\alpha(a, t) d^3a \quad (5.8)$$

$$TO_\alpha(t) = \iiint \omega_\alpha(a, t) d^3a \quad (5.9)$$

を総和の形でなおして計算した。(5.6)では適当な近似で、自己エネルギー ($a \equiv a'$) も考慮した。(5.8)の右辺では和の記号はつかわれていない。

§6. おすい

この論文では、3次元渦運動において、渦の位置ベクトルと渦度の対応する成分を正準共役変数にえらべば、正規形式で表せ、この力学系を完全に閉じた形で論じうることを示した。渦場の細胞分割を行い、位置ベクトルと渦度に適当な近似を行って、細胞を1つの位置ベクトルと渦度ベクトルで表わすとヴォートン近似がえられることを示した。

渦の引きのばし効果によって、始めずんぐりしたヴォートンも時間の経過と共に急速に細長いヴォートンになる子ンとがわかってゐる。そこで細長いヴォートンを1つの位置ベクトルと渦度が表わすのでは近似がわるいので、ヴォートン9分裂を考慮した。各ヴォートンに相対太さ比を定義し、太さ比に下限をもつけ、それに達すると縦に分裂するという条件を課した。ヴォートンの分裂は流れの特徴的長さの減少を意味し、それとともに特徴的時間も減少するから、時間積分にあたり、時間メッシュも減少させる必要がある。流れの変数の中で $\omega(a,t)^{-1}$ が時間の次元をもつ。そこで流れの中の渦度の最大値の逆数が半分になると時間メッシュを半分にするような時間積分の方法をとった。

以上の方法を終った2つの渦輪の運動の解析に $t=0 \sim 5.055$ の間でもちいた。ヴォートンの分裂、時間メッシュの減少の経過は次のようであった。 $t=0.56$ で最初の分裂(1次)が起り、 $t=1.86$ で2次、 $t=2.545$ で3次、 $t=3.4825$ で4次、 $t=4.7900$ で5次、 $t=4.98875$ で6次、 $t=5.0025$ で7次、 $t=5.003375$ で8次の分裂が各々最初に起った。したがって $t=5.055$ の時刻に最初のヴォートンの64分の1のヴォートンが存在してゐるにすぎない。時間メッシュは $t=0$ で $\Delta t=0.01$, $t=1.92$ で $\Delta t=0.00512$, $t=3.070$ で $\Delta t=0.0025$

に、 $t=4.9600$ で $\Delta t=0.00125$ に、 $t=4.9975$ で $\Delta t=0.000625$ に、 $t=5.0375$ で $\Delta t=0.0003125$ に減らした。
 $t=4$ 附近からヴォートンの数が急速にふえ、 $t=5$ 少し前から時間メッシュの減下が急速に変わった。したがって $t=5$ から 5.055 の計算の方が $t=0 \sim 5$ の計算時間より長しかゝりという結果になった。

オ1図の $t \geq 5$ の図を見ても、2つの渦輪のつながりかえり起っていない。2つの渦輪が接近した付近では非常に複雑な変形が起っている。しかし、他方の渦輪の効果よりも、自分自身の相互作用によってより多く変形しているように見える。

このカオス系の保存量、全エネルギー（オ3図）、全運動量（オ4図）、全角運動量（オ5図）、全渦度（オ6図）の保存は大体満足しているものであすが、ヘリシティは $t=2$ 近くまでは一定で、それ以後は振動する。その原因はよくわからない。オ6図にはヴォートンの最大長さと渦輪全体の長さの時間的軌跡を両対数グラフで示してある。渦輪の渦線が理想的フラクタル曲線とすれば、その傾斜が $1-D$ を与え、フラクタル次元 D がわかるはずである。上の図からこれをおおると大体 $D=1.05$ となる。

渦度のノルムとして L_2 ノルム $\left[\iint \omega(a,t)^2 da \right]^{1/2}$ は

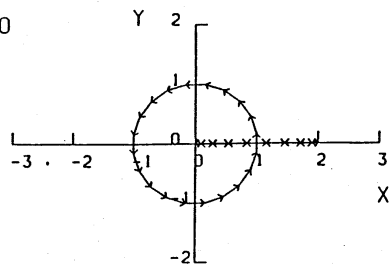
$L_\infty / \omega \quad \omega_{\max}(t) = \max_{a_i} |\omega(a_i, t)|$ と考へる。これから
 最期値で規格化し、逆散をとったものの時間的发展がオク図
 に示してある。それから $t=5$ の少し先で、これらの量から
 なるように思われる。つまり渦度の L_∞ が散散する傾向
 がみとれる。これは Euler 方程の爆発の徴候と考へら
 れよう。

参考文献

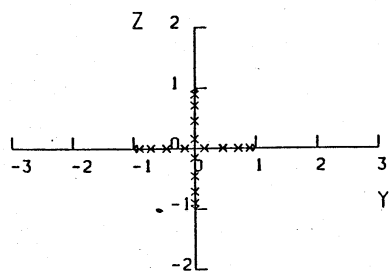
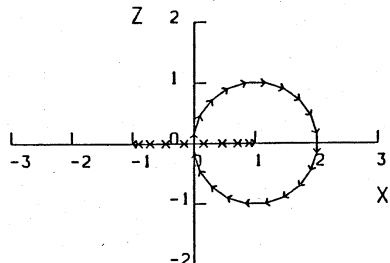
- 1) J. T. Beale and A. Majda: Math. Computation 39(1983)1.
- 2) J. T. Beale and A. Majda: Math. Computation 39(1983)29.
- 3) S. Kuwabara: Proc. of the Symp. on Mech. for Space Flight (1984)15.
- 4) S. Kuwabara: Proc. of the Sump. on Mech. for Space Flight (1985)31.
- 5) S. Kuwabara: J. Phys. Soc. Japan 54(1985) 4881.
- 6) A. Leonard: in Turbulent Shear Flows 2 (ed. by L. J. S. Bradbury et al., Springer, 1980).
- 7) B. Mandelbrot: in Turbulence and NS Equation (ed. by R. Teman, Springer, 1976)121.
- 8) E. A. Novikov: Sov. Phys., JETP 57(1983)566.
- 9) P. G. Saffman: in Transition and Turbulence (Academic Press, 1981)149.

T= 0.00000

NV= 20

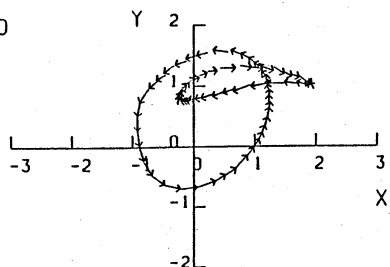


DT= 0.0100000

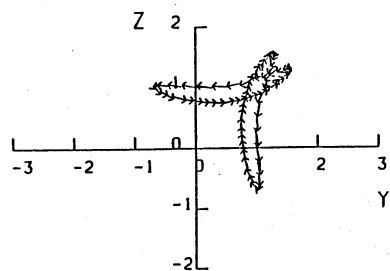
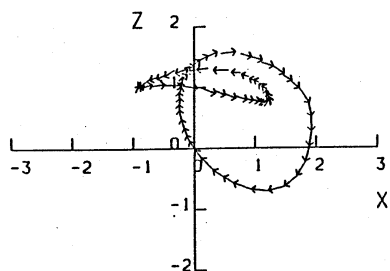


T= 4.00000

NV= 38

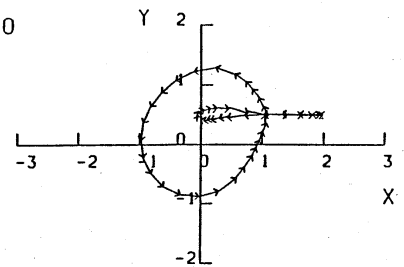


DT= 0.0025000

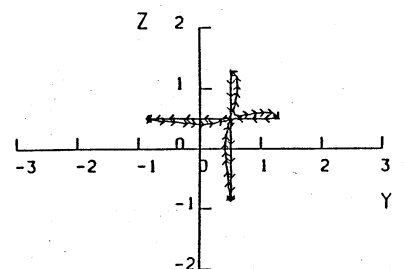
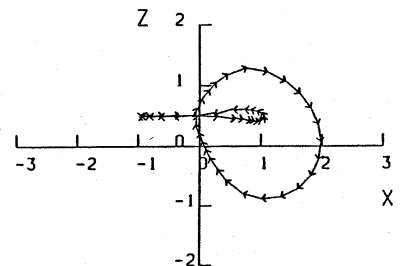


T= 2.00000

NV= 26

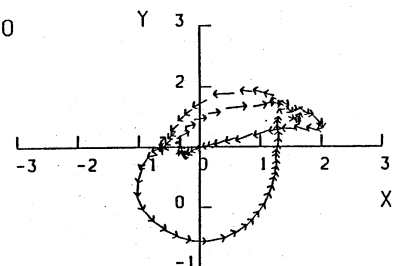


DT= 0.0050000

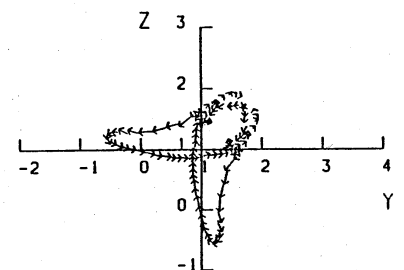
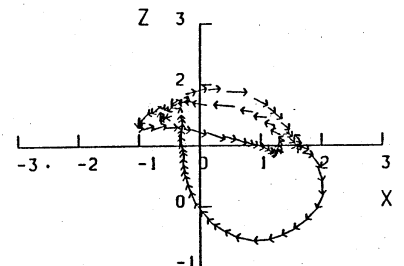


T= 5.00000

NV= 52



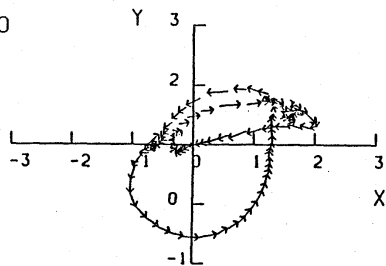
DT= 0.0006250



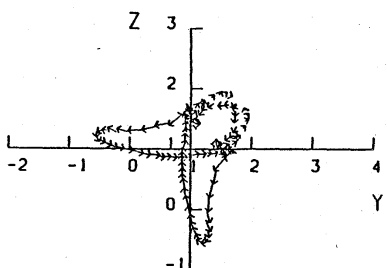
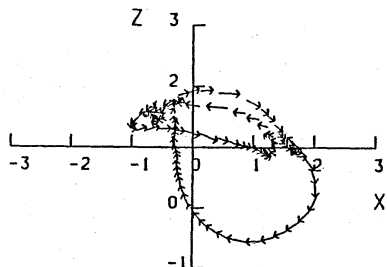
第1図. 絡まった2つ渦輪の時間的发展1 (3面図)

T= 5.02000

NV= 58

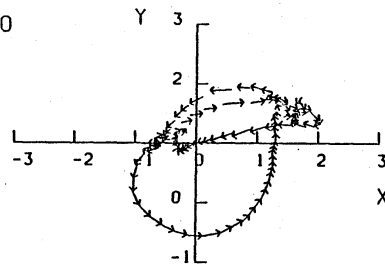


DT= 0.0006250

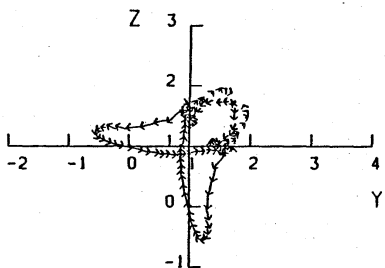
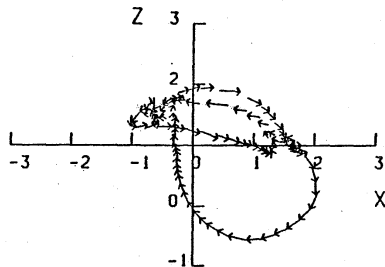


T= 5.04000

NV= 59

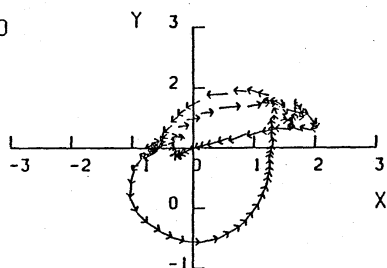


DT= 0.0003125

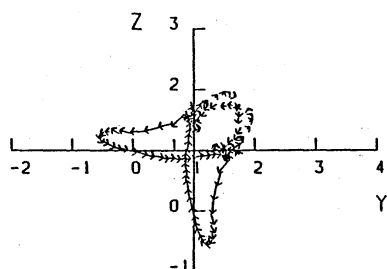
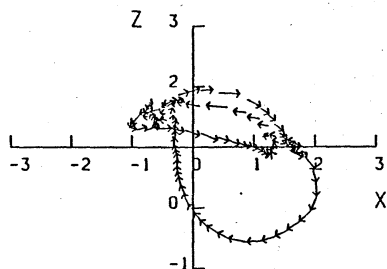


T= 5.05000

NV= 61

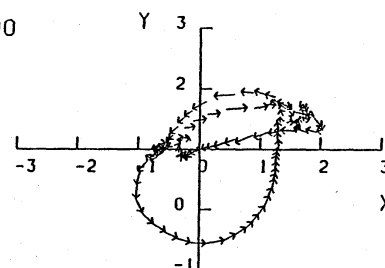


DT= 0.0003125

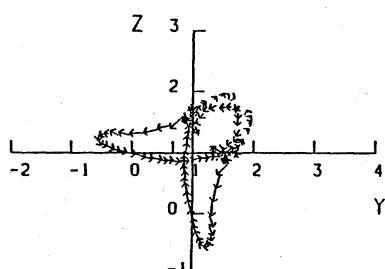
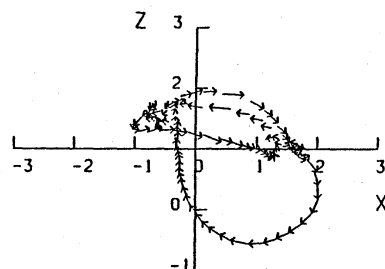


T= 5.05500

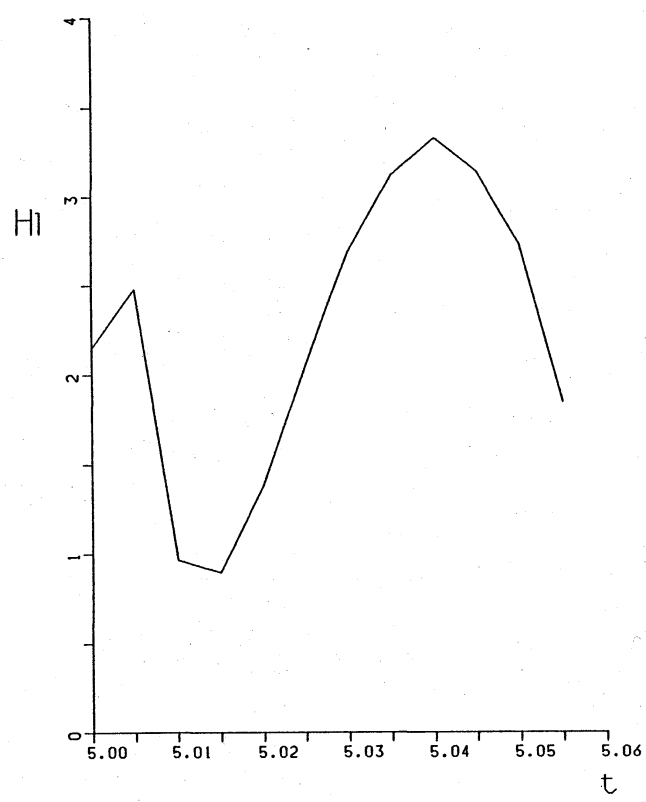
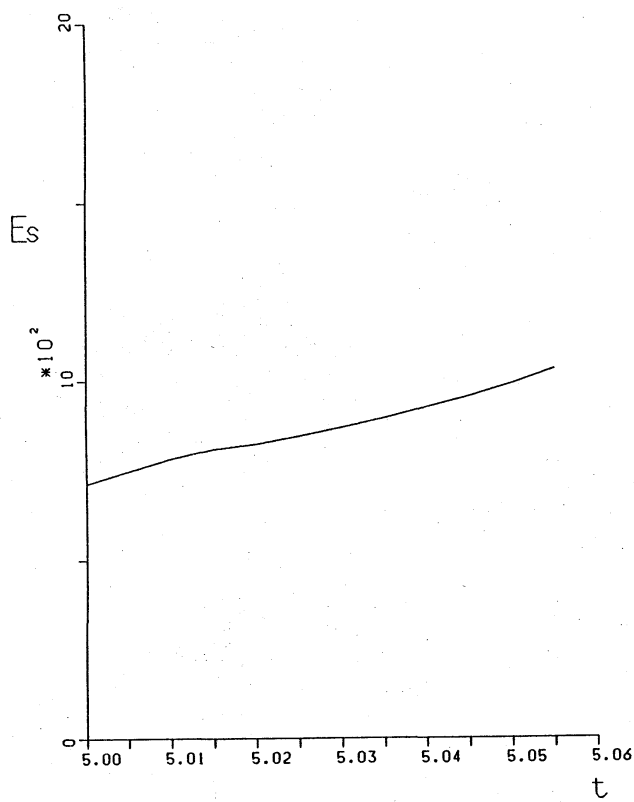
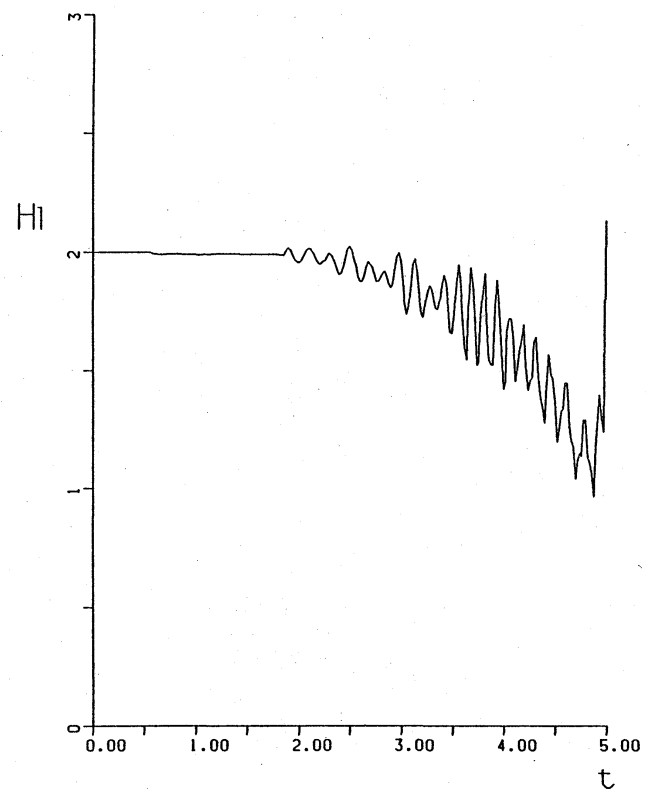
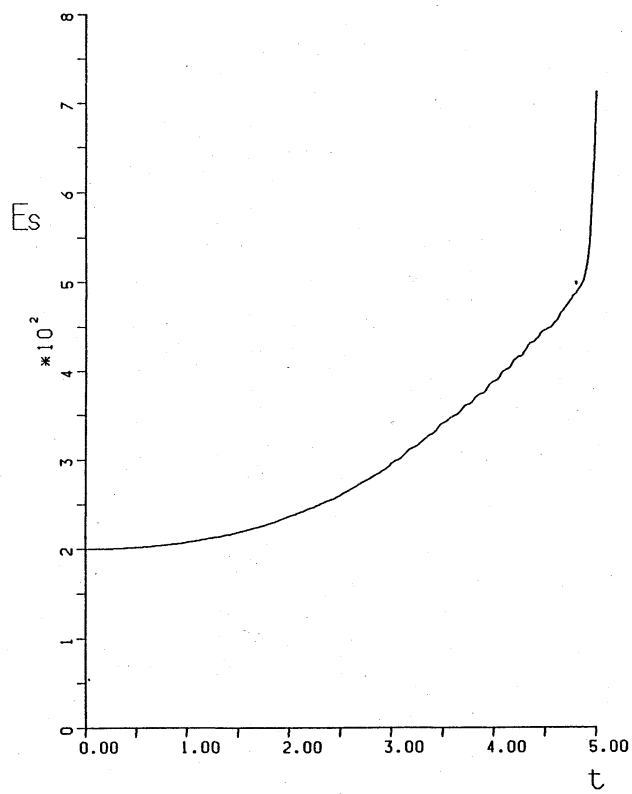
NV= 63



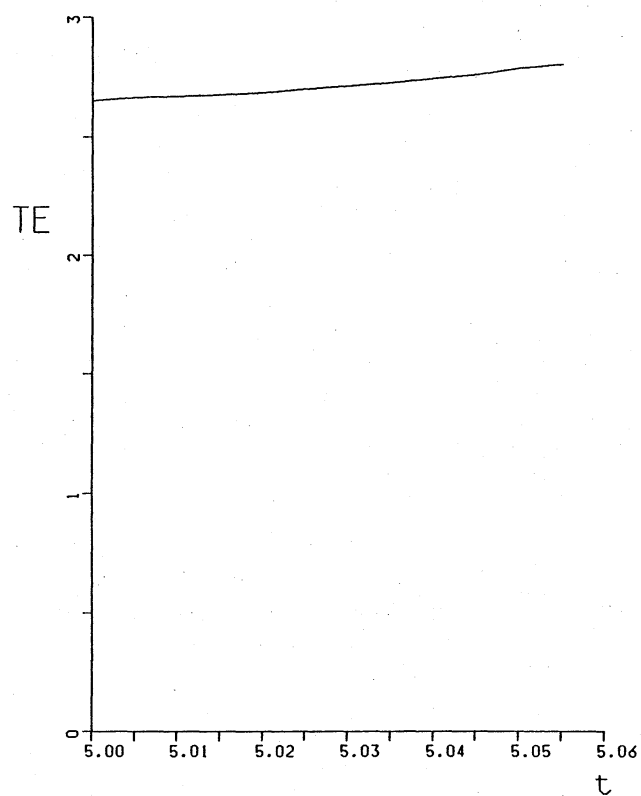
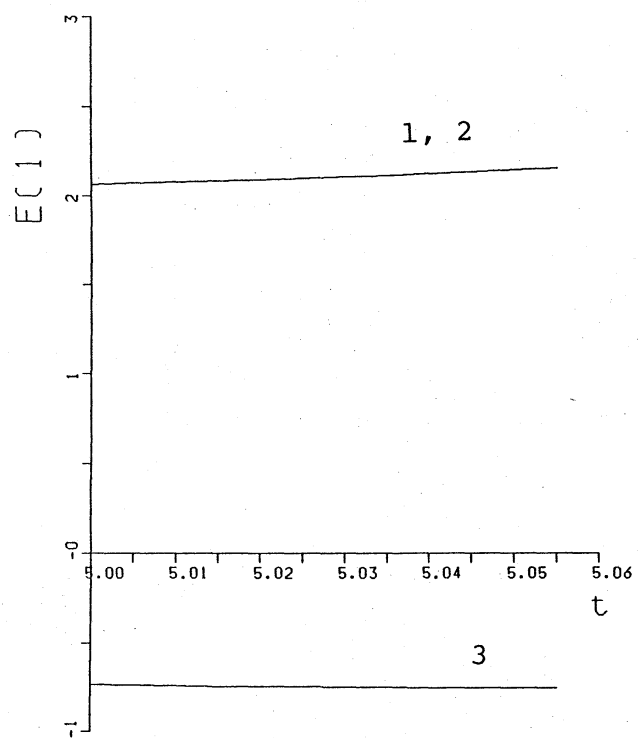
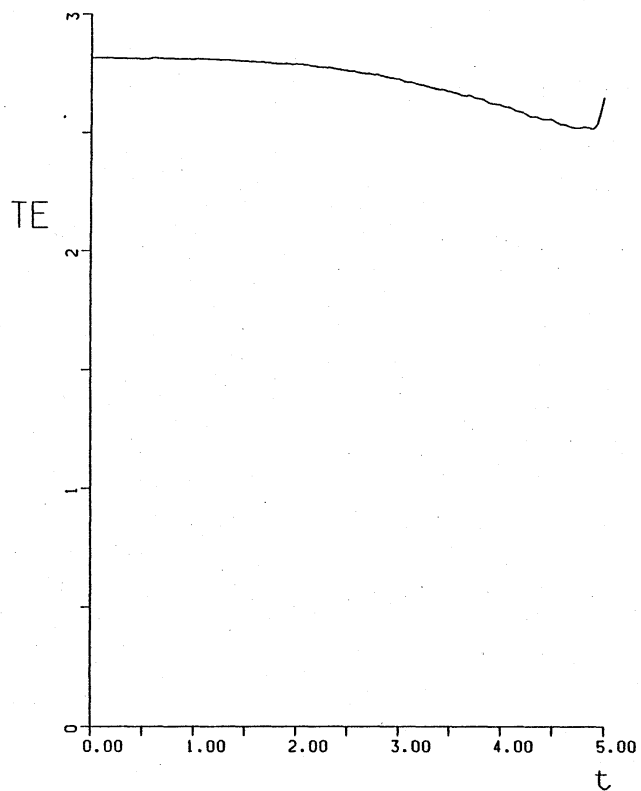
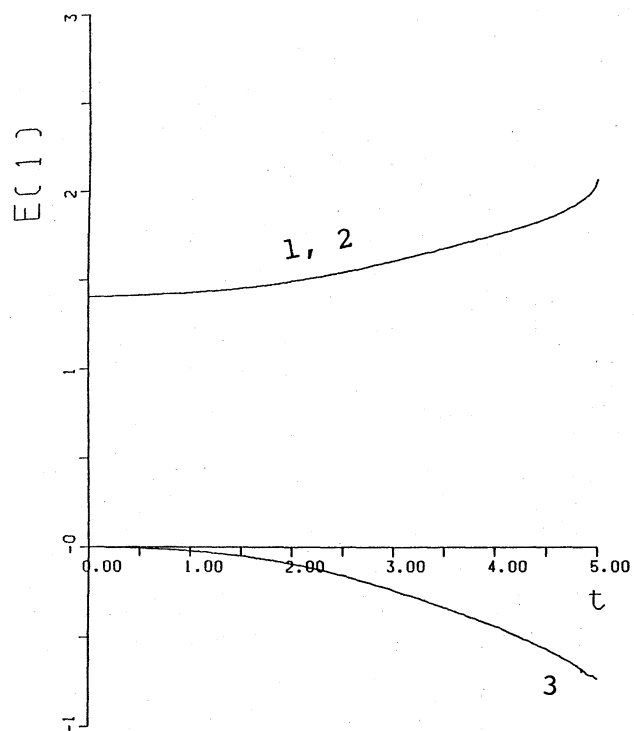
DT= 0.0003125



第1図. 絡まった2つ渦輪の時間的发展2 (3面図)



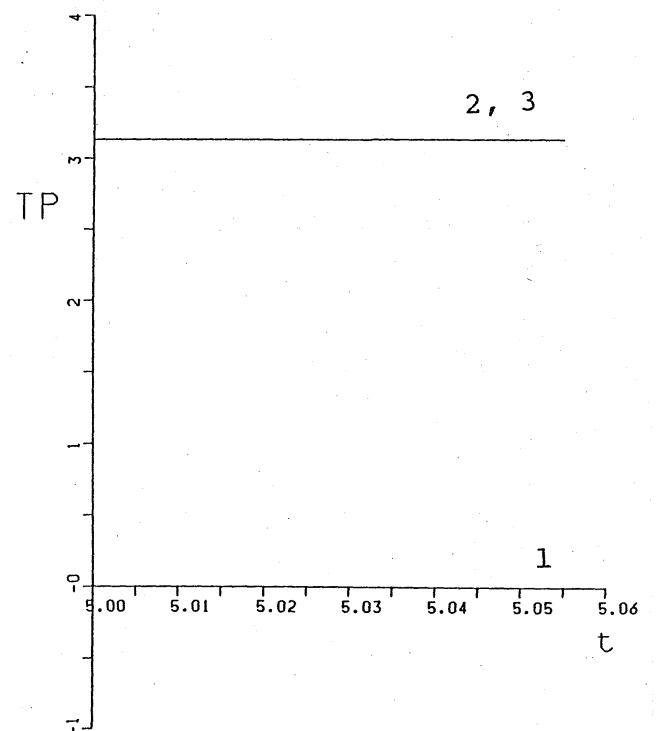
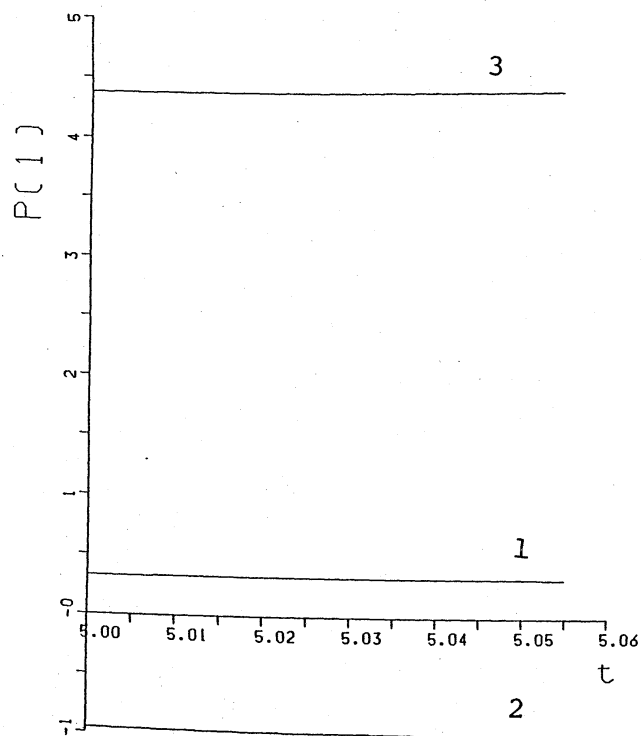
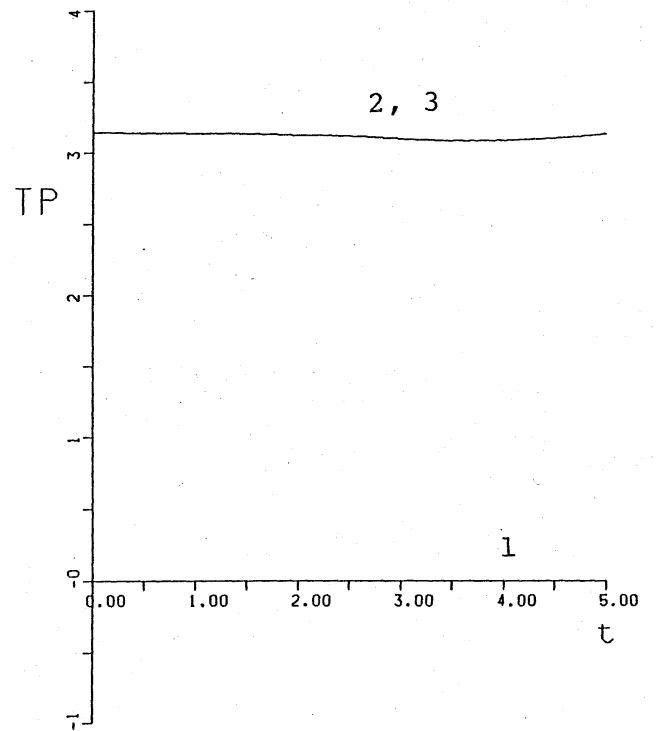
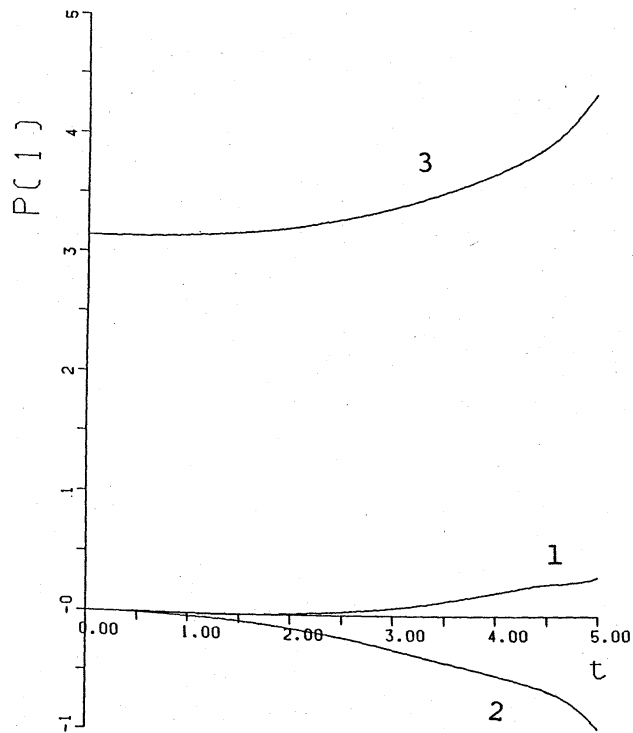
第2図. エンストロフィーとヘリシティの時間的发展



第3図. 運動エネルギーの時間的发展.

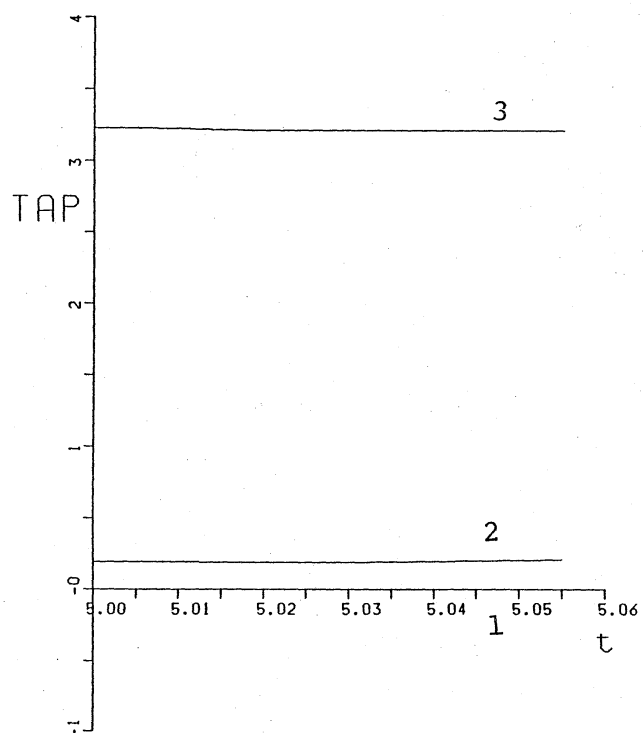
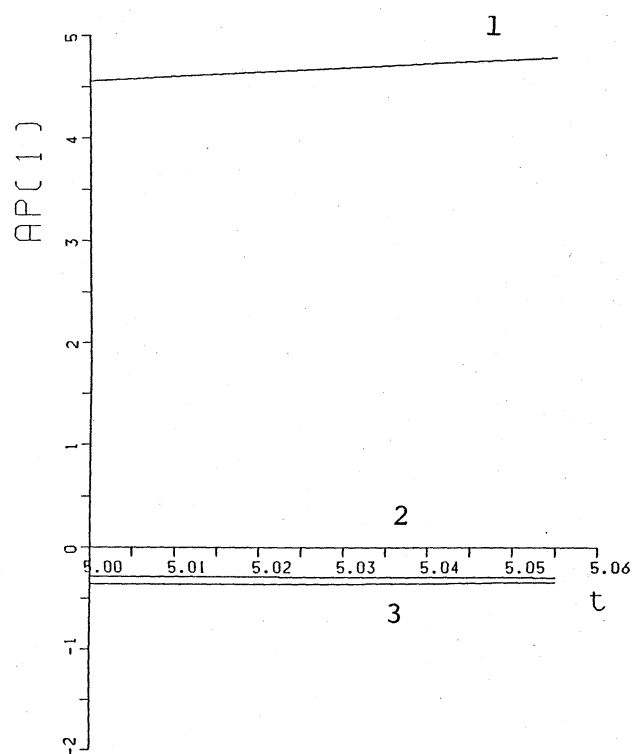
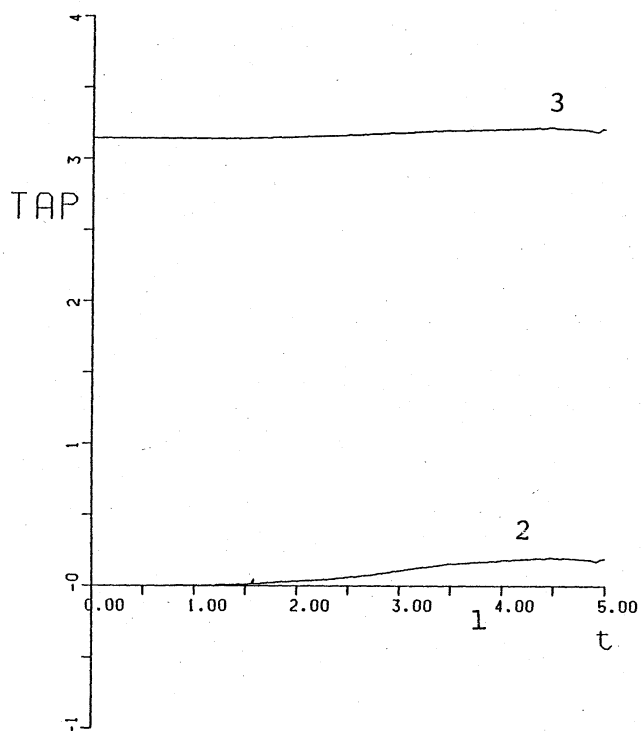
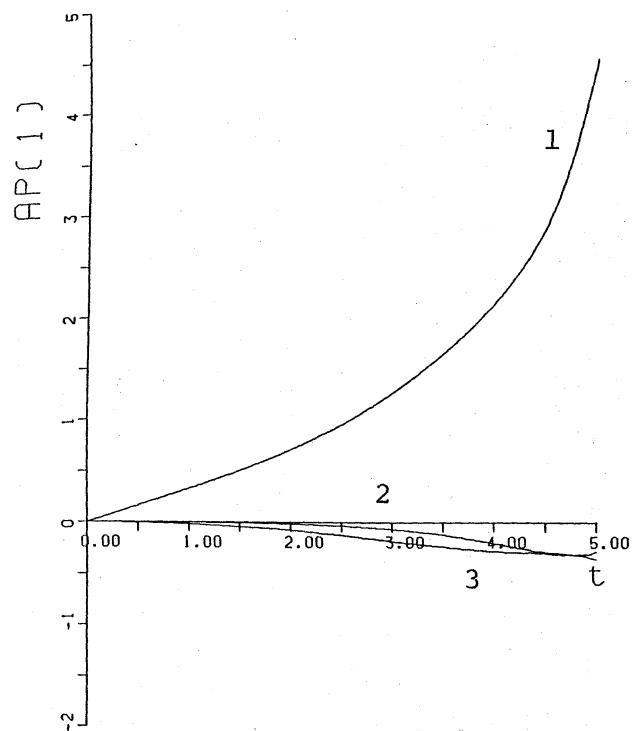
1 : 渦輪1, 2 : 渦輪2, 3 : 相互エネルギー,

TE : 全エネルギー



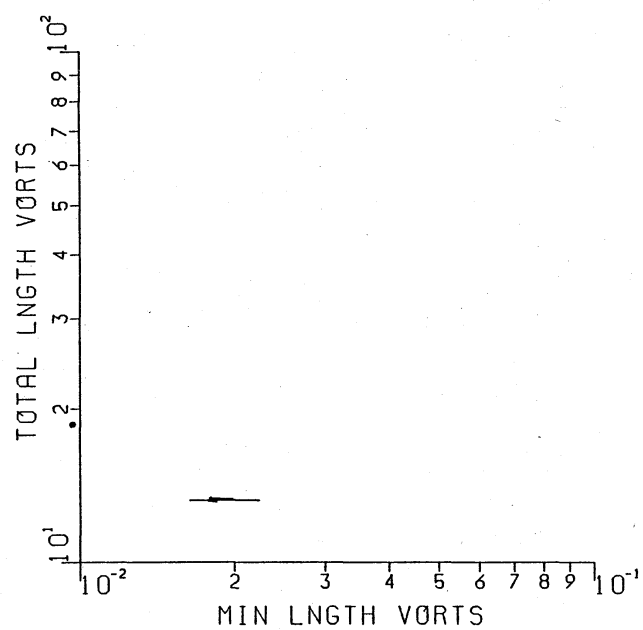
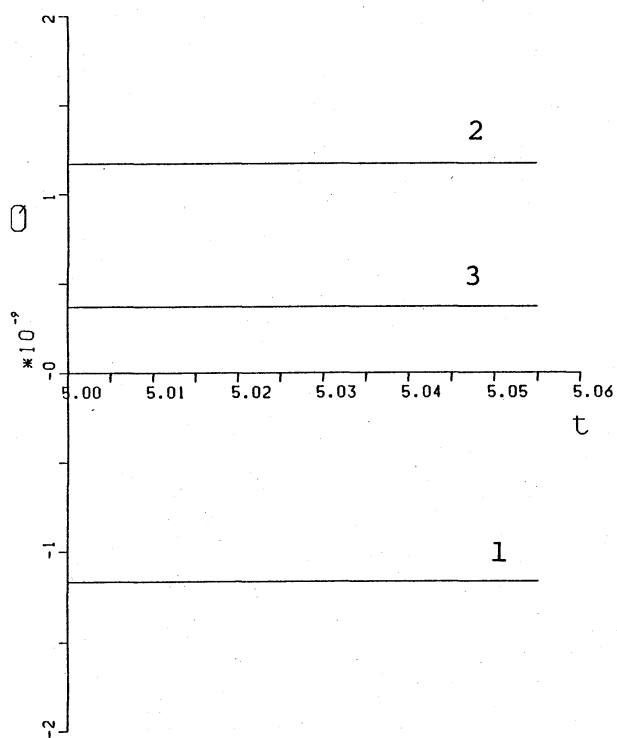
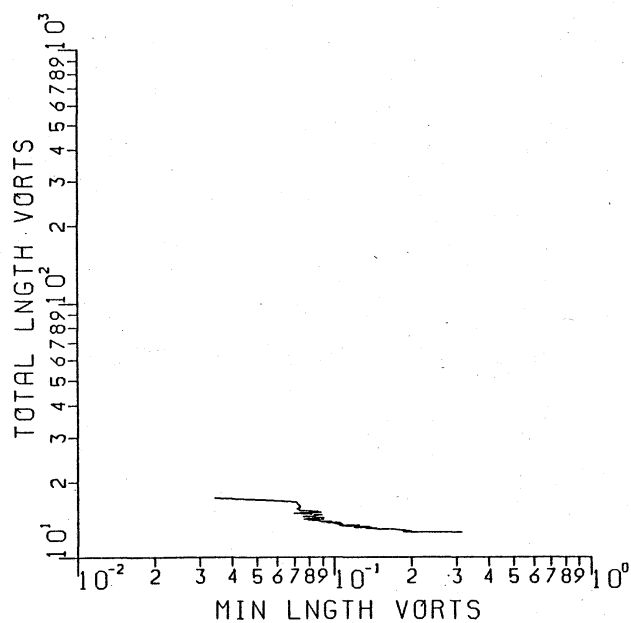
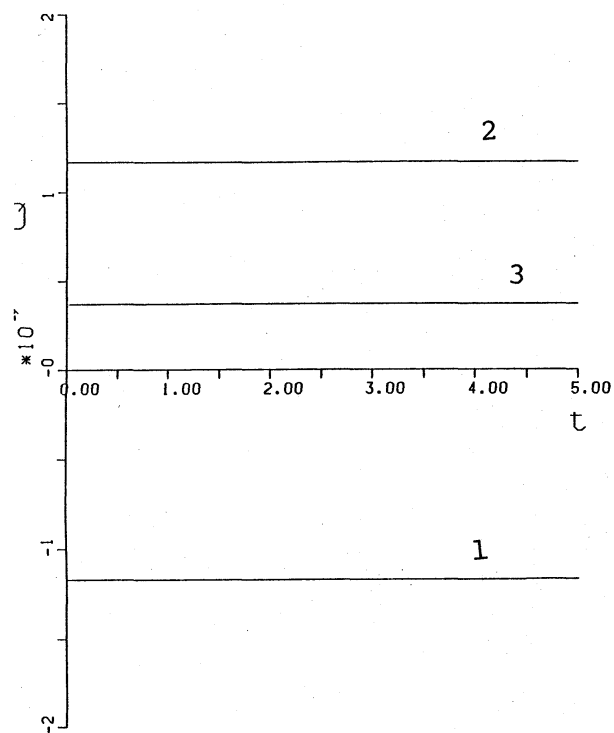
第4図. 運動量成分の時間的发展.

(1, 2, 3) : 成分, $P(1)$: 渦輪1, TP : 全運動量

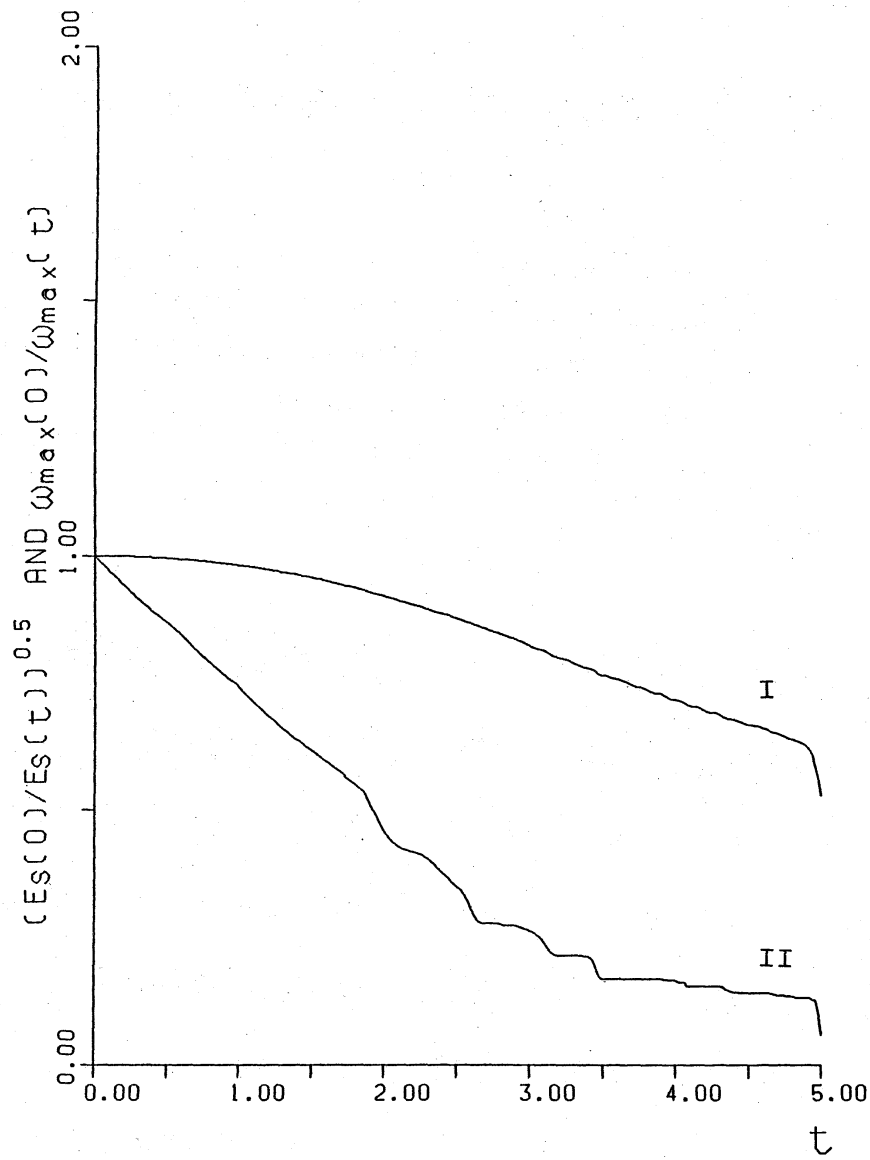


第5図. 角運動量成分の時間的发展.

AP (1) : 渦輪1, TAP : 全角運動量



第6図. 全渦度の時間的发展およびヴォートの最小長さと渦輪の長さの時間的軌跡



第7図. 渦度ノルムの逆数の時間的发展.

I : $(E_s(0)/E_s(t))^{0.5}$, II : $\omega_{\max}(0)/\omega_{\max}(t)$