

超曲面の単純K3特異点

筑波大学数学研究科 米村 崇 (Takashi Yonemura)

1. 序 2次元正規孤立特異点 (X, x) で、その minimal resolution $\pi: (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, x)$ の例外集合 E が非特異楕円曲線1本となるものを単純楕円型特異点といい、 X が超曲面の場合には、適当な局所座標 x, y, z をとれば、次の3つのいずれかの形に書くことができる (斎藤 [6])。

$$\tilde{E}_6: x^3 + y^3 + z^3 + \lambda_1 xyz, \quad \lambda_1^3 + 27 \neq 0 \quad (E^2 = -3)$$

$$\tilde{E}_7: x^2 + y^4 + z^4 + \lambda_2 xyz, \quad \lambda_2^4 - 64 \neq 0 \quad (E^2 = -2)$$

$$\tilde{E}_8: x^2 + y^3 + z^6 + \lambda_3 xyz, \quad \lambda_3^6 - 432 \neq 0 \quad (E^2 = -1)$$

ここに λ_i は楕円曲線 E の moduli に対応するパラメータである。上の3つの式はそれぞれ weight が $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ の擬斉次多項式で、minimal resolution π はこの weight に関する blow-up 1回で得られる。

逆に、非退化な多項式 $f = \sum a_\nu z^\nu$ ($a_\nu \in \mathbb{C}$) が超曲面の単純楕円型特異点を定義することと、 f の Newton boundary

$$\Gamma(f) = \left(\bigcup_{a_\nu \neq 0} (\nu + \mathbb{R}_{\geq 0}^3) \right) \text{ の convex hull の compact face の和}$$

が、点 $(1, 1, 1)$ を含むような2次元の face Δ を持つことは

同値な条件であり (渡辺 [9]), 擬斉次多項式 $f_0 = \sum_{\nu \in \Delta} a_\nu z^\nu$ の weight は前記の 3 種しか現われないことが容易にわかる。

単純 K3 特異点は、単純楕円型特異点の 3 次元版として、渡辺公夫 [3] により定義された。ここでは非退化な多項式 f で定義される単純 K3 特異点 (X, x) に対し、 f_0 の weight を分類し、この weight に関する blow-up で得られる写像 $\pi: (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, x)$ を調べる。 π は一般に resolution にはならないが、 $\tilde{X}, E$ (E は正規 K3 曲面になる) の特異点は、 f がある性質をもてば f_0 の weight から完全に決定されることがわかる。この morphism π は次の性質を持つ (泊 [7])。すなわち、 π は $\tilde{X} - E \cong X - \{x\}$ を満たす proper morphism で $\tilde{X}$ の特異点は高々 terminal singularity、さらに $K_{\tilde{X}}$ は π に関して numerically effective である。以下、この性質をもつ morphism を (X, x) の minimal resolution と呼ぶことにする。(2次元の場合は、この条件は本来の minimal resolution の定義と同値である。)

2. 単純 K3 特異点 単純 K3 特異点を定義するために必要な事項を以下にまとめる。詳しくは [2], [3], [8], [9] を参照していただきたい。 (X, x) を n 次元正規孤立特異点、 $\pi: (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, x)$ を 1 つの good resolution とする。

また必要に応じて X は十分小さな ε の Stein 近傍とする。

定義 1. (渡辺 [8]) 正規孤立特異点 (X, ε) に対して、多重種数 $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ を次のように定義する。

$$\delta_m := \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X - \{\varepsilon\}, \mathcal{O}(mK)) / L^{2/m}(X - \{\varepsilon\})$$

ここに $L^{2/m}(X - \{\varepsilon\})$ は ε で局所 $L^{2/m}$ -可積分な $X - \{\varepsilon\}$ 上の正則 m 重の形式全体の集合である。

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\delta_m = 1$ となる特異点を純楕円型特異点という。

以下 (X, ε) は quasi-Gorenstein、すなわち $X - \{\varepsilon\}$ 上いたる所 0 に等でない正則 n 形式が存在すると仮定する。このとき、 $\tilde{X}$ の canonical divisor を

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + \sum_{i \in I} m_i E_i - \sum_{j \in J} m_j E_j, \quad m_i \geq 0, m_j > 0$$

と表わし $E_J := \sum_{j \in J} m_j E_j$ を π の essential part と呼ぶ。

(X, ε) が純楕円型るとき E_J は reduced になる (石井 [2])。

定義 2 (石井 [2]) 純楕円型特異点 (X, ε) が $(0, i)$ -型であるとは、 $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_E)$ が $(0, i)$ -Hodge 成分 $H^{0, i}(E_J)$ から成ることをいう。ただしここで

$$\mathbb{C} \cong H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_E) = \text{Gr}_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^{0, i}(E_J) \quad \text{である。}$$

定義-命題 3 (渡辺-石井 [3]) 3次元正規孤立特異点 (X, x) が単純 $K3$ 特異点であるとは次の同値な2条件が成り立つことをいう。

- (1) (X, x) は Gorenstein かつ $(0, 2)$ -型の純楕円型。
- (2) (X, x) は quasi-Gorenstein で、任意の minimal resolution $\pi: (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, x)$ に対し E は正規 $K3$ 曲面。

また超曲面の特異点に関しては次が知られている。

定理 4 (渡辺 [9]) $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ を非退化な多項式で $X = \{f=0\} \subset \mathbb{C}^4$ が $x=0 \in \mathbb{C}^4$ に孤立特異点を持つとする。 $\Gamma(f)$ を f の Newton boundary とするとき、

$$(X, x): \text{純楕円型} \iff (1, 1, 1, 1) \in \Gamma(f)$$

さらに Δ を $(1, 1, 1, 1)$ を相対内部に含む $\Gamma(f)$ の face とすると

$$(X, x): (0, 2)\text{-型} \iff \dim_{\mathbb{R}} \Delta = 3$$

3. 単純 $K3$ 特異点の weight 非退化な多項式 $f = \sum a_\nu z^\nu \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ が単純 $K3$ 特異点を定義するならば、定理 4 より $f_0 := \sum_{\nu \in \Delta} a_\nu z^\nu$ は擬斉次多項式で、その weight が一意的に定まる。それを $\alpha(f)$ と書く。すなわち、

$$\alpha(f) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{Q}_+^4, \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i \nu_i = 1 \quad (\forall \nu \in \Delta)$$

とする。特に $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$ である。従って単純 K の特異点の weight の集合 W_4 は次のように表わすことができる。

$$W' := \{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{Q}_+^4 \mid \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1 \}$$

とき、 $\alpha \in W'$ に対して

$$T(\alpha) := \{ \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 \mid \alpha \cdot \nu = 1 \}$$

と定めるとき

$$W_4 = \{ \alpha \in W' \mid (1, 1, 1, 1) \in \text{Int}(\text{convex hull of } T(\alpha) \text{ in } \mathbb{R}^4) \}$$

である。 $\alpha \in W_4$ は $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ と仮定しておく。 $\alpha \in W_4$ を

$$(*) \quad \alpha = \left(\frac{p_1}{p}, \frac{p_2}{p}, \frac{p_3}{p}, \frac{p_4}{p} \right), \quad p, p_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \gcd(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1$$

の形に書くと、定義より次が成立することがわかる。

命題 5 (1) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p$

(2) 相異なる i, j, k に対して、 $\gcd(p_i, p_j, p_k) = 1$

(3) $a_{ij} := \gcd(p_i, p_j)$ とおくと $a_{ij} \mid p$

また W_4 の weight は、手間がかかるが初等的な方法ですべて求めてしまうことができる。その結果は最後に表15としてまとめている。分類の過程で次がわかる。

命題5 (続き) (4) $\#W_4 = 95$

(5) 任意の i に対して $p_i | p$ または $p_i | (p - p_j)$ for $\exists j$

注6. M.Reid 氏は論文[5]の中で、ある性質をもった weight の集合 A_4^* を定義し、それが次のように特徴づけられ 95個の元から成ることを述べている。

$$A_4^* = \{ \alpha \in \mathbb{Q}_+^4 \mid \alpha \text{ を } (*) \text{ の形に書くとき } ① \sim ③ \text{ が成立} \}$$

$$① \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p$$

$$② \quad \text{任意の } i \text{ に対して } p_i | (p - p_j) \text{ for } \exists j \text{ (} i=j \text{ でもよい)}$$

$$③ \quad ② \text{ ですべての } i=1,2,3,4 \text{ に対し } j \text{ が同一のものにならないようにとれる。}$$

この③の条件は、命題5の(2)でおきかえられることが容易に確かめられる。従って $A_4^* = W_4$ であり、さらに M.Reid 氏の結果により、 W_4 は命題5の(1),(2),(5)で特徴づけられることがわかる。

補足7. 変数の数を一般に n として W_n を定義すると、 $W_3 = \{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \}$ で、任意の i に対して $p_i | p$ が成り立つが、 $n \geq 5$ の場合は命題5の(5)も成り立たなくなる。すなわち擬斉次多項式では定義できない $(0, n-1)$ -型の純楕円型特異点の weight が存在する。

4. Minimal resolution この minimal resolution
 とは、1の最後に述べた一般には resolution ではない morphism
 のこととする。 $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ を非退化な多項式とし、
 $X = \{f=0\} \subset \mathbb{C}^4$ が $x=0 \in \mathbb{C}^4$ に単純な特異点をもつとき、

定理 8 (泊 [7]) $\pi: (\tilde{X}, E) \rightarrow (X, x)$ を weight $\alpha(f)$
 の filtered blow-up とすると、 π は (X, x) の minimal
 resolution である。

$\tilde{X}, E$ の特異点を具体的に記述するため、この morphism π
 を torus embedding により構成する。

$\alpha \in W_4$ に対し $\mathbb{C}^4$ の原点 0 の weight α の blow-up を

$$\Pi: (V, F) \longrightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$$

とする。 Π は次のように構成される。

$$E_1 = (1, 0, 0, 0), \dots, E_4 = (0, 0, 0, 1), P = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$$

とし、 $\mathbb{R}^4$ の第一象限 $\sigma = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle := \sum_{i=1}^4 \mathbb{R}_{\geq 0} E_i$ を 4 つ
 の cone

$$\sigma_i = \langle E_j, E_k, E_l, P \rangle \quad \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

に分割し、cone の包含関係 $\sigma_i \subset \sigma$ より得られる morphism

$$V_i := \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma_i \cap \mathbb{Z}^4] \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma \cap \mathbb{Z}^4] = \mathbb{C}^4$$

をはり合わせてできる morphism

$$V := \bigcup_{i=1}^4 V_i \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

が π である。(σ は σ の dual cone を表わす。) π の例外集合 F は weighted projective space $\mathbb{P}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ である。 F の divisor D_i を $D_i := F - V_i$ で定義する。

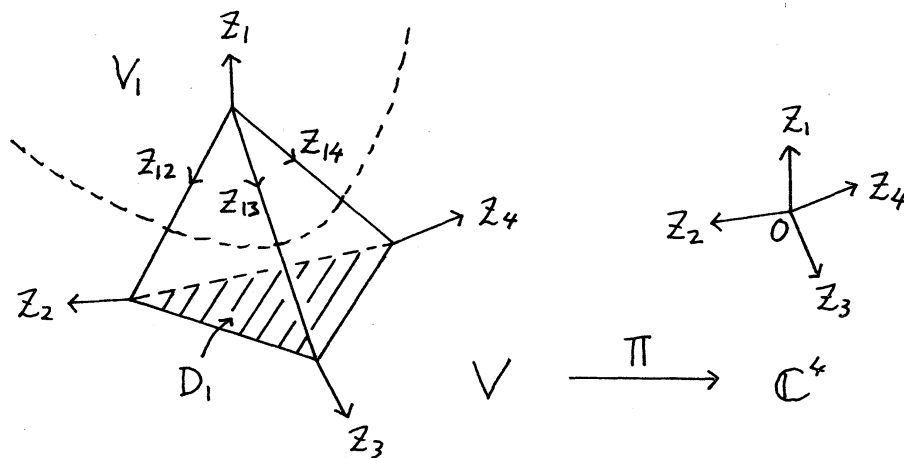
このとき $\tilde{X}$ は π による X の proper transform であり、

$$\pi = \pi|_{\tilde{X}}, \quad E = \pi^{-1}(x)$$

となる。 V_i の parameter system として、

$$z_i, z_{ij}, z_{ik}, z_{il} \quad \text{ただし} \quad z_{ij} = z^{b_{ij}}, \quad b_{ij} = (p_i E_j - p_j E_i) / a_{ij}$$

がとれる。



f に関する非退化という条件より、 $\tilde{X}, E$ の特異点を調べるには、 V および $F = \mathbb{P}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ の特異点を調べればよいことがわかる。命題5の(2)を満たす任意の (p_1, p_2, p_3, p_4) に関する blow-up に対して次の命題が成り立つ。

命題 9 (1) $V_i \cap V_j \cong \mathbb{C}^* \times \text{Spec } \mathbb{C}[\check{z}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$

ただし、 $\check{z}_{ij} = \langle (0,1,0), (0,0,1), (a_{ij}, p_k, p_\ell) \rangle$

(2) $\{z_{ij}=0\} \text{ in } V_i \cong \text{Spec } \mathbb{C}[\check{p}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$

ただし、 $\check{p}_{ij} = \langle (0,1,0), (0,0,1), (p_i, p_k, p_\ell) \rangle$

特に $\alpha \in W_k$ のときは命題 5 (1), (3) より次を得る。

系 10 (1) $\text{Spec } \mathbb{C}[\check{z}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$ の特異点は高々 terminal

(2) $p_i | (p - p_j)$ ならば $\text{Spec } \mathbb{C}[\check{p}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$ も高々 terminal

また F の特異点についてはやはり一般に命題 5 (2) を満たす (p_1, p_2, p_3, p_4) に対して次が成り立つ。 $p_i = a_i a_{ij} a_{ik} a_{il}$ によって整数 a_i を定める。

命題 11 (1) $\det(\sigma_{ij}) = a_{ij}$ とする $\mathbb{R}^2$ の cone σ_{ij} があって

$$F - (D_i \cup D_j) \cong \mathbb{C}^* \times \text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma}_{ij} \cap \mathbb{Z}^2]$$

さらに $\text{Spec } \mathbb{C}[\check{\sigma}_{ij} \cap \mathbb{Z}^2]$ の特異点が A 型となるための必要十分条件は $a_{ij} | (p_k + p_\ell)$ となることである。

(2) $D_i - D_j$ の特異点が A 型となるための必要十分条件は $p_j | (a_{jk} p_\ell + a_{j\ell} p_k)$ となることである。このとき特異点は $A_{a_j a_{ij} - 1}$ 型になる。よって特に $\alpha \in W_k$ で $p_j | (p - p_i)$ なる

ば $D_i - D_j$ の特異点は A_{p-1} 型になる。

5. E の特異点 4で準備した命題を用いて E の特異点を記述する。 f は 4と同じでさらに次の条件を仮定する。

(★) 各 i に対して、 f_0 は z_i^n または $z_i^m z_j$ の形の項を持つ。
 命題 5 (5) より任意の $\alpha \in W_4$ に対して (★) を満たす f で $\alpha(f) = \alpha$ となるものがとれる。命題 11 および 図 [4, Lemma 4.8 とその証明] を用いて次の結果を得る。

補題 12 (1) E は $A_{\lambda_{ij}-1}$ 型特異点を λ_{ij} 個持つ。ただし

$$\lambda_{ij} := \#\{v \in \Delta \cap \mathbb{Z}^4 \mid v_k = v_l = 0\} - 1 \quad \text{である。}$$

(2) f_0 が z_i^n の形の項を持たず、 $z_i^m z_j$ の形の項を持てば、 E は A_{p-1} 型特異点を 1 個持つ。

(3) E の特異点は上記の (1), (2) のみである。

この補題は E の特異点が (weight でなく) Δ の情報、すなわち f の Newton boundary $\Gamma(f)$ から記述されることを示すものであるが、実は f_0 が (★) を満たす場合には weight さえ同じならば $\Gamma(f)$ (従って Δ) が変化しても E の特異点は変わらない。すなわち次が成立する。

定理 13 E の特異点の種類および個数は $\alpha(f)$ によって決まり f のとり方によらない。その内容は

$A_{a_{ij}-1}$ が t_{ij} 個, A_{p_i-1} が σ_i 個

である。ただしここで、

$$t_{ij} = \#\{v \in T(\alpha) \mid v_k = v_l = 0\} - 1$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & (p_i | p \text{ のとき}) \\ 1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

証明は省くが、その本質的な部分は命題 5 の (5) において $p_i | p$ と $p_i | (p - p_j)$ が同時に成立するとき (するわけが f_0 が $z_i^n, z_i^m z_j$ の形の項を同時に含み得るとき)、 $a_{ij} = p_i$ ととり、命題 11 の (1) と (2) の特異点が共に $A_{a_{ij}-1}$ 型となる点にある。

また定理 13 において f_0 に関する条件 (★) は必要である。実際 weight $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ を持つ次の 3 つの多項式

$$g_0 = x^4 + y^4 + z^4 + w^4 \quad (\text{これだけが (★) を満たす。})$$

$$g_1 = x^4 + y^4 + z^4 + (x^2 y^2 + y^2 z^2) w^2 + w^5$$

$$g_2 = x^4 + y^4 + z^4 + (x^2 w + y^2 w + z^3) w + w^5$$

を考えると、 E の特異点は順に、なし、 A_1 1 つ、 A_2 1 つ となる。

6. E の特異点の rank と f_0 のパラメータの個数の関係

定理 13 より f が (★) を満たせば $\alpha(f)$ から E の特異点が決まるから、その rank を $r(\alpha)$ と書く。すなわち

$$r(\alpha) = \sum_{i < j} t_{ij} (a_{ij} - 1) + \sum_{i=1}^4 \sigma_i (p_i - 1)$$

である。

また $\alpha(f) = \alpha$ とする多項式 f に対し、 f_0 は一般に $t(\alpha) := \#T(\alpha)$ 個の項を持つ。このとき weight α を保つ座標変換 $z \mapsto w$

$$z_i = \sum_{v \in N_i(\alpha)} b_{iv} w^v, \quad N_i(\alpha) = \{v \in T(\alpha) \mid \sum_{j=1}^4 v_j p_j = p_i\}$$

を適当にとれば、 $f(w)$ が $t(\alpha) - n(\alpha) + 4$ 個の項を持つようにでき、そのうちの4つは係数を1にとれる。ただしここで、 $n(\alpha) := \sum_{i=1}^4 \#N_i(\alpha)$ とする。すなわち $t(\alpha) - n(\alpha)$ を f_0 のパラメータの個数と考えられる。このとき次が成り立つ。

系 14 $\alpha \in W_4$ に対し、 $t(\alpha) - n(\alpha) + r(\alpha) = 19$

最後に、 W_4 に属する 95 個の weight α 、 f の例、 E の特異点、 $t(\alpha)$, $n(\alpha)$, $r(\alpha)$ を表にまとめしておく。実は f として擬斉次多項式 (すなわち $f = f_0$) とするものがとれる。ここではそのうち項の数が最小になるような f を選んである。

表 15

No.	α	f	E の特異点	$t(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
1	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$x^4 + y^4 + z^4 + w^4$	I_4	35	16	0
2	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$	$x^3 + y^4 + z^4 + w^6$	$3A_1 + 4A_2$	15	7	11
3	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$x^3 + y^3 + z^6 + w^6$	$3A_1$	30	14	3
4	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^3 + y^3 + z^4 + w^{12}$	$3A_3$	21	11	9
5	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^6 + z^6 + w^6$	I_4	39	20	0
6	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$	$x^2 + y^5 + z^5 + w^{10}$	$5A_1$	28	14	5
7	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^4 + z^8 + w^8$	$2A_1$	35	18	2
8	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^2 + y^4 + z^6 + w^{12}$	$2A_1 + 2A_2$	27	14	6
9	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20})$	$x^2 + y^4 + z^5 + w^{20}$	$A_1 + 2A_4$	23	13	9
10	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})$	$x^2 + y^3 + z^{12} + w^{12}$	A_1	39	21	1
11	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15})$	$x^2 + y^3 + z^{10} + w^{15}$	$3A_1 + 2A_2 + A_4$	18	10	11
12	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18})$	$x^2 + y^3 + z^9 + w^{18}$	$3A_1 + A_2$	30	16	5
13	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{24})$	$x^2 + y^3 + z^8 + w^{24}$	$2A_2 + A_3$	27	15	7
14	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42})$	$x^2 + y^3 + z^7 + w^{42}$	$A_1 + A_2 + A_6$	24	14	9
15	$(\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$x^3 + y^3z + z^5 + w^5$	$5A_2 + A_3$	12	6	13
16	$(\frac{1}{3}, \frac{7}{24}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$	$x^3 + y^3w + z^4 + w^8$	$A_1 + 4A_2 + A_6$	9	5	15
17	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15})$	$x^3 + y^3 + z^5 + zw^6$	$A_1 + 3A_4$	14	8	13
18	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9})$	$x^3 + y^3 + z^4w + w^9$	$A_1 + 3A_2$	23	11	7

No.	α	f	Eの特異点	$l(\alpha)$	$n(\alpha)$	$l(\alpha)$
19	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$	$x^2y + y^4 + z^4 + w^8$	$4A_1 + A_2$	24	11	6
20	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{24})$	$x^2z + y^3 + z^4 + w^{24}$	$A_1 + A_2 + A_8$	18	10	11
21	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$x^2y + y^5 + z^5 + w^5$	A_1	34	16	1
22	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$	$x^2z + y^3 + z^5 + w^{15}$	$2A_2 + A_5$	21	11	9
23	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$x^2z + y^4 + z^6 + w^6$	$6A_1 + A_4$	17	8	10
24	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^2z + y^3 + z^6 + w^{12}$	$3A_1 + A_4$	24	12	7
25	$(\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$	$x^2z + y^3 + z^9 + w^9$	A_3	33	17	3
26	$(\frac{9}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$	$x^2w + y^4 + z^5 + w^{10}$	$5A_1 + A_8$	13	7	13
27	$(\frac{11}{24}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^2w + y^3 + z^8 + w^{12}$	$3A_1 + A_{10}$	15	9	13
28	$(\frac{10}{21}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21})$	$x^2w + y^3 + z^7 + w^{21}$	A_9	24	14	9
29	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15})$	$x^2 + y^5 + z^6 + yw^6$	$2A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4$	10	6	15
30	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{40}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^5 + z^5w + w^8$	$A_3 + 2A_4 + A_6$	8	6	17
31	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^4z + z^6 + w^8$	$2A_2 + 2A_3 + A_4$	12	7	14
32	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$	$x^2 + y^4z + z^7 + w^7$	$7A_1 + A_2$	19	9	9
33	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9})$	$x^2 + y^4w + z^6 + w^9$	$4A_1 + 2A_2 + A_3$	16	8	11
34	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$	$x^2 + y^4w + z^5 + w^{15}$	$5A_1 + A_2 + A_6$	13	7	13
35	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{28})$	$x^2 + y^4 + z^7 + zw^{18}$	$A_1 + A_2 + 2A_6$	12	8	15
36	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10})$	$x^2 + y^4 + z^6w + w^{10}$	$2A_1 + A_2 + 2A_4$	16	9	12
37	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16})$	$x^2 + y^4 + z^5w + w^{16}$	$A_2 + 2A_3$	24	13	8
38	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{30})$	$x^2 + y^3z + z^5 + w^{30}$	$A_1 + A_2 + A_7$	21	12	10

No.	α	f	Eの特異点	$\lambda(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
39	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18})$	$x^2 + y^3 z + z^6 + w^{18}$	$2A_2 + A_4$	24	13	8
40	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14})$	$x^2 + y^3 z + z^7 + w^{14}$	$3A_1 + A_3$	27	14	6
41	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{24}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^2 + y^3 z + z^8 + w^{12}$	$2A_1 + 2A_2 + A_6$	16	9	12
42	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	$x^2 + y^3 z + z^{10} + w^{10}$	A_2	36	19	2
43	$(\frac{1}{2}, \frac{11}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12})$	$x^2 + y^3 w + z^9 + w^{12}$	$A_1 + 2A_2 + A_{10}$	12	8	15
44	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16})$	$x^2 + y^3 w + z^8 + w^{16}$	$2A_1 + A_4$	28	15	6
45	$(\frac{1}{2}, \frac{9}{28}, \frac{1}{7}, \frac{1}{28})$	$x^2 + y^3 w + z^7 + w^{28}$	$A_1 + A_8$	24	14	9
46	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{11}, \frac{5}{66})$	$x^2 + y^3 + z^{11} + zw^{12}$	$A_1 + A_2 + A_4 + A_{10}$	9	7	17
47	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{21}, \frac{1}{14})$	$x^2 + y^3 + yz^7 + w^{14}$	$A_1 + 2A_2 + A_3 + A_6$	13	8	14
48	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{48}, \frac{1}{16})$	$x^2 + y^3 + z^9 w + w^{16}$	$2A_2 + A_4 + A_7$	12	8	15
49	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{42}, \frac{1}{21})$	$x^2 + y^3 + z^8 w + w^{21}$	$3A_1 + A_4 + A_6$	15	9	13
50	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{30})$	$x^2 + y^3 + yz^5 + w^{30}$	$A_1 + A_3 + A_4$	25	14	8
51	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{36}, \frac{1}{36})$	$x^2 + y^3 + z^7 w + w^{36}$	$A_4 + A_5$	24	14	9
52	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{7}{36})$	$x^3 + y^4 + xz^3 + zw^4$	$A_2 + A_3 + A_6 + A_7$	5	4	18
53	$(\frac{1}{3}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6})$	$x^3 + y^3 w + xz^3 + w^6$	$A_1 + 3A_2 + A_3 + A_4$	10	5	14
54	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{21}, \frac{1}{7})$	$x^3 + y^3 w + yz^3 + w^7$	$3A_2 + A_4 + A_5$	9	5	15
55	$(\frac{7}{20}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10})$	$x^2 y + y^3 w + z^4 + w^{10}$	$3A_1 + A_5 + A_6$	11	6	14
56	$(\frac{11}{30}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6})$	$x^2 y + y^3 z + z^5 + w^6$	$A_1 + A_7 + A_{10}$	6	5	18
57	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6})$	$x^2 y + y^4 + xz^3 + w^6$	$2A_1 + A_2 + A_4 + A_8$	8	5	16
58	$(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16})$	$x^2 z + y^3 w + z^4 + w^{16}$	$A_1 + A_4 + A_5$	19	10	10

No.	α	f	E の特異点	$l(\alpha)$	$n(\alpha)$	$l(\alpha)$
59	$(\frac{8}{21}, \frac{1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{1}{21})$	$x^2z + y^3 + z^6w + w^{21}$	$A_4 + A_7$	18	10	11
60	$(\frac{7}{18}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18})$	$x^2z + y^3 + yz^3 + w^{18}$	$A_1 + A_3 + A_6$	19	10	10
61	$(\frac{11}{28}, \frac{1}{4}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7})$	$x^2z + y^4 + z^4w + w^7$	$2A_1 + A_5 + A_{10}$	7	5	17
62	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{20})$	$x^2z + y^4 + z^5 + yw^5$	$A_2 + 2A_3 + A_7$	10	6	15
63	$(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$	$x^2z + y^3w + z^5 + w^{10}$	$2A_1 + A_2 + A_3$	23	11	7
64	$(\frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8})$	$x^2z + y^3w + z^6 + w^8$	$A_1 + A_6 + A_9$	10	7	16
65	$(\frac{14}{33}, \frac{1}{3}, \frac{5}{33}, \frac{1}{11})$	$x^2z + y^3 + z^6w + w^{11}$	$A_4 + A_{13}$	9	7	17
66	$(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$	$x^2z + y^3w + z^7 + w^7$	$A_1 + A_2$	31	15	3
67	$(\frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{2}{21})$	$x^2z + y^3 + z^7 + yw^7$	$A_1 + 2A_2 + A_8$	14	8	13
68	$(\frac{13}{30}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{10})$	$x^2z + y^3 + yz^5 + w^{10}$	$A_1 + A_3 + A_{12}$	10	7	16
69	$(\frac{7}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})$	$x^2w + y^4 + yz^4 + w^8$	$4A_1 + A_2 + A_6$	14	7	12
70	$(\frac{4}{9}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9})$	$x^2w + y^3z + z^6 + w^9$	$2A_1 + A_4 + A_7$	14	8	13
71	$(\frac{7}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$	$x^2w + y^3z + z^5 + w^{15}$	$A_3 + A_6$	22	12	9
72	$(\frac{7}{15}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15})$	$x^2w + y^3 + yz^5 + w^{15}$	$A_1 + A_6$	26	14	7
73	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{2}{50})$	$x^2 + y^5 + yz^5 + zw^6$	$A_1 + A_4 + A_6 + A_7$	6	5	18
74	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^4w + yz^5 + w^8$	$2A_3 + A_4 + A_6$	9	6	16
75	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{22}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11})$	$x^2 + y^4w + yz^3 + z^5w + w^{11}$	$5A_1 + A_3 + A_4$	14	7	12
76	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{13}, \frac{5}{26}, \frac{1}{13})$	$x^2 + y^4w + yz^4 + w^{13}$	$4A_1 + A_4 + A_5$	13	7	13
77	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{26}, \frac{5}{26}, \frac{1}{26})$	$x^2 + y^3z + z^5w + w^{26}$	$A_4 + A_6$	21	12	10
78	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{22})$	$x^2 + y^3z + yz^4 + w^{22}$	$A_1 + A_3 + A_5$	22	12	9

No.	α	f	E の特異点	$l(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
79	$(\frac{1}{2}, \frac{9}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{16})$	$x^2 + y^3z + z^6w + w^{16}$	$2A_1 + A_4 + A_8$	13	8	14
80	$(\frac{1}{2}, \frac{13}{84}, \frac{5}{84}, \frac{1}{11})$	$x^2 + y^3z + z^8w + w^{11}$	$A_1 + A_4 + A_{12}$	9	7	17
81	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{13}, \frac{3}{26}, \frac{1}{13})$	$x^2 + y^3w + yz^6 + w^{13}$	$3A_1 + A_2 + A_7$	16	9	12
82	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{22}, \frac{3}{22}, \frac{1}{22})$	$x^2 + y^3w + yz^5 + w^{22}$	$A_2 + A_6$	25	14	8
83	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{54}, \frac{2}{27})$	$x^2 + y^3 + z^{10}w + yw^9$	$A_1 + A_3 + A_4 + A_8$	10	7	16
84	$(\frac{1}{3}, \frac{7}{27}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27})$	$x^3 + y^3z + xz^3 + yw^4$	$A_2 + A_4 + A_5 + A_6$	6	4	17
85	$(\frac{5}{14}, \frac{2}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7})$	$x^2y + y^3w + xz^3 + w^7$	$3A_1 + A_2 + A_3 + A_4$	13	6	12
86	$(\frac{9}{25}, \frac{7}{25}, \frac{1}{5}, \frac{4}{25})$	$x^2y + y^3w + z^5 + zw^5$	$A_3 + A_6 + A_8$	7	5	17
87	$(\frac{5}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{1}{13})$	$x^2z + xy^2 + z^6w + w^{13}$	$A_2 + A_3 + A_4$	20	10	9
88	$(\frac{11}{27}, \frac{1}{3}, \frac{5}{27}, \frac{2}{27})$	$x^2z + y^3 + z^5w + xw^8$	$A_1 + A_4 + A_{10}$	11	7	15
89	$(\frac{5}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11})$	$x^2w + xy^2 + yz^4 + w^{11}$	$A_1 + A_2 + A_4$	24	12	7
90	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{34}, \frac{3}{17}, \frac{2}{17})$	$x^2 + y^4z + y^2w^5 + z^5w + zw^7$	$2A_1 + A_3 + A_5 + A_6$	8	5	16
91	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{19}, \frac{2}{19}, \frac{5}{38})$	$x^2 + y^4z + yz^5 + yw^6 + z^3w^4$	$A_1 + A_4 + A_5 + A_7$	7	5	17
92	$(\frac{1}{2}, \frac{11}{38}, \frac{5}{38}, \frac{3}{38})$	$x^2 + y^3z + yw^9 + z^7w + zw^{11}$	$A_2 + A_4 + A_{10}$	10	7	16
93	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{34})$	$x^2 + y^3z + yz^6 + yw^8 + zw^{10}$	$A_1 + A_2 + A_3 + A_9$	11	7	15
94	$(\frac{7}{19}, \frac{5}{19}, \frac{4}{19}, \frac{3}{19})$	$x^2y + y^3z + z^6w + xw^4$	$A_2 + A_3 + A_4 + A_6$	9	5	15
95	$(\frac{7}{17}, \frac{5}{17}, \frac{3}{17}, \frac{2}{17})$	$x^2z + xy^2 + z^5w + yw^6$	$A_1 + A_2 + A_4 + A_6$	13	7	13

なお、正規K3曲面 E の特異点に関して、A.R. Fletcher 氏の論文[1]に、これと同じ表が存在する。

参考文献

- [1] A.R. Fletcher, Plurigeners of 3-folds and weighted hypersurfaces, thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Warwick, 1988.
- [2] S. Ishii, On isolated Gorenstein singularities, Math. Ann. 270 (1985), 541 - 554.
- [3] S. Ishii and K. Watanabe, On simple K3 singularities (in Japanese), Notes appearing in the Proceedings of the Conference on Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ, 1988, 20-31.
- [4] M. Oka, On the resolution of hypersurface singularities, in Complex Analytic Singularities (T. Suwa and P. Wagreich, eds.), Advanced Studies in Pure Math. 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 405 - 436.
- [5] M. Reid, Canonical 3-folds, Journées de Géométrie algébrique d'Angers, (A. Beauville, ed.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 273-310
- [6] K. Saito, Einfach-elliptische Singularitäten, Invent. Math. 23 (1974), 289-325.
- [7] M. Tomari, The canonical filtration of higher dimensional

purely elliptic singularity of a special type, preprint, 1989.

[8] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities, I, Math. Ann. 250 (1980), 65-94.

[9] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities, II, in Complex Analytic Singularities (T. Suwa and P. Wagreich, eds.), Advanced Studies in Pure Math. 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 671-685.