

Super KP, Super Grassmannian and Super D-Modules

数理解析研究所 高崎金久 (TAKASAKI, Kanehisa)

0. 解題

研究集会で報告したことは既に論文にまとめているので[1], ここではその背景にある数学的考え方や目指すところなどを中心に, もっと基礎的なところから解説し直してみたい.

表題に掲げた三つの構造の相互関係は ‘super’ という接頭語を取り除いたレベルでは佐藤幹夫氏の周辺で既に数年来議論されてきた.(その詳細は未公開であるが京都大学や東北大学での講義の記録[2]から窺い知ることが出来る. また, この連続講義とは到底比べものにならないが, 筆者の解説記事[3]も参考にいただければ幸いである.) それを Manin-Radul[4]が導入した超 KP ヒエラルヒーに拡張するのはどちらかと言えば演習問題であって, 微分方程式は本来の KP ヒエラルヒーとほぼ同じ形をしている. ただ嫌らしい符号因子が沢山出て来ることのみ違っていて, 主要な問題はいかにしてそれ等を間違えないように計算するかということに尽きる, とさえ言いたくなる代物である. しかしながら, 筆者はいくつかの理由でこの ‘演習問題’ をやったことにはそれだけの価値はあったと考える.

第一に, そもそも超 KP ヒエラルヒーの対称性を扱った仕事自体がいままでほとんど無かったのである. 解の構造については super Grassmannian (超 Grassmann 多様体) や super $\mathcal{D}$ -module (超 $\mathcal{D}$ 加群) との関係を論じた上野・山田・池田の仕事があるが[5], そこでは対称性がどのように解或は方程式のレベルで実現されるかについての議論は無い. ただ最後の節に対称性を与えるはずの超 Lie 代数 $\tilde{gl}(\infty|\infty)$ が抽象的に自由フェルミ場と自由ボーズ場の対 (正確に言えば超弦理論で言うところの super-ghost system) のフーリエ展開モードの 2 次形式として構成されているだけである. 彼等はこれを KP ヒエラルヒーの場合の伊達・柏原・神保・三輪の方法[6]に習って τ (タウ) 函数に対する頂点作用素 (vertex operator) として実現しなかったのではないかと思われる. しかしながら後でも述べるように超 KP ヒエラルヒーの τ 函数はやや不完全な量で, それだけを使っ

て対称性の理論（変換理論）を作ることには無理があるらしい。

そこでどのような形式で変換理論を構築するかということになるが、この問題に対して‘**Super Grassmannian and Super $\mathcal{D}$ -Modles**’ という枠組は技術的にも理論的にも見通しの良いものであることが判った。また変換理論のみならず、方程式の構造自体を理解する（特に ‘解ける’ メカニズムを明らかにする）ことにも大いに役に立つこともはっきりした。このことは本来の **KP** ヒエラルヒーではすでによく判っていることだが[1], 超 **KP** ヒエラルヒーの場合にはこのような $\mathcal{D}$ 加群の構造を仲介にすることで[5]の議論（特に複雑な符号因子の由来）をもっと見通しの良いものに出来る。これが第二の理由である。

第三に、超 **KP** ヒエラルヒーは代数的な構造自体が反可換数値の従属変数の存在の故に複雑化しているのだが、このようなものこそ微分代数の言葉を使って定式化するのがいちばんすっきりするのである。微分代数の概念は積分可能系の分野では（一時期大いに流行ったこともあって）主に計算技巧的な側面でかなり浸透しているようだが、実は微分代数というのはむしろ微分方程式の定式化そのものに関わるもっと基礎的な概念で、方程式系そのもののことであると言ってよい。実際、どんな（代数的）微分方程式も微分代数の言葉に翻訳できるし、そのことによって変数のとり方に依らない内在的な性質を議論する枠組を構築することもできる。（この様な視点については[2]に詳しい哲学が展開されている。） $\mathcal{D}$ 加群自体が代数的な概念なので、この様な抽象化は数学的にはむしろごく自然なものである。（そもそも微分方程式を微分代数の言葉で定式化するには考える変数と方程式の範囲を一点の曇りもなく明確にする、或はせざるを得ない、わけで、それだけでも無用の誤解や迷信 — 他者のものであれ自分自身のものであれ — を解く効用はある。）

実は超 **Grassmann** 多様体と $\mathcal{D}$ 加群の関係は[5]でも論じられているのだが、それはある特殊解の族（正確には有限次元の超 **Grassmann** 多様体 — それは一般解を記述する無限次元の超 **Grassmann** 多様体の中に入っている — に対応する解達）の場合に限定されている。これはその場合の詳しい解析には適しているのだが、前述の $\tilde{gl}(\infty|\infty)$ のようなものを引き出すには一般解を扱う枠組が必要なのである。以下に紹介する方法ではそのような議論に適した $\mathcal{D}$ 加群を導入する。この $\mathcal{D}$ 加群からは超 **KP** ヒエラルヒーの従属変数（擬微分作用素）と超 **Grassmann** 多様体の上のある座標系との対応関係を非常に直接的な形で読み取ることが出来る。解の構造も変換の構造もこの関係に基づいて説明できる。

ただ、今のところこの方法では超 **Grassmann** 多様体の上のすべての点をカバー出来

ないのが難点である。上に述べた対応関係に現れる座標系の有効域は超 Grassmann 多様体の大抵の部分を取めている（数学の言葉で言えば稠密開部分集合をなす）けれども、それにはいりきらないところも‘無限遠方’として実は残っていて、そういうところに対応する現象（例えば解の極 — 発散するところ —）は今の枠組では完全には捉えられないのである。普通の KP ヒエラルヒーでは Plücker 座標というものが使えてこの問題をうまく処理できたのだが、超 Grassmann 多様体の場合にはそれに当るものがうまく作れない（[5]で用いている超行列式は Plücker 座標が持っているような良い性質を持たない）ので何か別の工夫が要る。おそらく、超 Grassmann 多様体の上の別の有効域を持つ座標系をいろいろ作っておいて多様体全体を覆い尽くし（これは数学における多様体の概念構成そのものである）、それぞれの座標系に対して個別に適当な加群を構成する、という方針で解決できるはずである（目下検討中）。

超 KP ヒエラルヒーの変換理論については Awada-Chamseddine[7]が[5]の最後の節のような方向で実際に詳しく議論している。但しそこでの主な関心は **super conformal algebra** の実現にあるので $\tilde{gl}(\infty|\infty)$ （**super conformal algebra** を含む）全体についてはあまり突っ込んだ議論はない。また超 KP ヒエラルヒーそのものの従属変数で変換がどのように書けるかについては具体的なことは何も言っていない。原理的には、通常の KP ヒエラルヒーの場合[6]と同様、そこでの場の演算子の期待値と超 Grassmann 多様体の上の前述のような座標とは直接的な対応があって、そのような方向からも以下の結果は再構成できるはずだが、以下ではそういう形式はとらない。ただ、そのように場の量子論（今の場合には本質的に自由場であるが）との比較を試しておくことは将来のためにも重要なことであろうと思う。場の量子論の形式では KP ヒエラルヒーや **superKP** ヒエラルヒーは広い意味での‘Ward 恒等式’（対称性を記述する）と解釈することが出来る。逆にそのような視点から場の理論のある側面を例えば微分代数や加群の言葉で見直す可能性が開けるであろう。実際、最近 2 次元共形的場の理論に $\mathcal{D}$ 加群を利用する試みもある。

以上のようなことをいきなり超 KP ヒエラルヒーについて説明するのでは理解しにくい面も多かろうと思われるので、以下ではむしろ本来の KP ヒエラルヒーの場合に重点を置いて対応することを説明する。実はここでも既にいくつか新しい視点や結果が出て来るので、KP ヒエラルヒーについての独立した論説としても読めるだろう。超 KP ヒエラルヒーの場合のことは最後（11 節）で KP ヒエラルヒーについての結果を逐一書き直す形でまとめる。

1. KP ヒエラルヒー

KP ヒエラルヒーの定式化にはいろいろなやり方があるが、ここでは (Grassmann 多様体上の力学系としての解釈との関連を重視する立場から) 擬微分作用素に対する次のような発展方程式系として定義する。

$$W = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t, x) \partial^{-m}, \quad \partial = \partial/\partial x. \quad (1)$$

発展方程式は無限個の時間変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ に対するもので、

$$\begin{aligned} \partial_n W &= B_n \cdot W - W \cdot \partial^n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \text{但し } \partial_n &= \partial/\partial t_n, \end{aligned} \quad (2)$$

という形をしている。ここで右辺は作用素の積の和であるが (そのことを強調するために dot ‘ $\cdot$ ’ を置いている)、左辺は W の各係数を t_n で微分すること、つまり $\partial_n W = \sum_{m=1}^{\infty} \partial_n w_m \cdot \partial^{-m}$ を表す。少し紛らわしいがうまい記号を思い付かないのでこのままにする。 B_n は次のような微分作用素である。

$$B_n = (W \cdot \partial^n \cdot W^{-1})_+ \quad (3)$$

$(\dots)_+$ は擬微分作用素の微分作用素部分 (つまり ∂ の非負巾を取り出したもの) を表す。 B_n を展開すると係数はみな W_m の x に関する微分多項式になるから (2) の右辺も同様で、結局 (2) は w_m に対する

$$\partial_n w_m = F_{nm}(w_k, w_k^{(1)}, \dots (k \geq 1)) \quad (4)$$

(右辺は $w_k^{(l)} = \partial^l w_k$ ($l \geq 0$) の多項式) という形の無限連立発展方程式系を与えることが判る。 $B_n W$ の部分から非線型性が生じることに注意されたい。

2. 微分代数

微分代数の言葉でこの状況を言い替えると次のようになる。基礎にあるのは w_m 達の微分多項式全体のなす可換代数

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[w_m^{(n)}] \quad (m \geq 1, n \geq 0) \quad (5)$$

である。これは方程式に現れ得る従属変数とその combination の全体を規定している。この上に ∂ , ∂_n という微分を定義することが微分方程式を設定することに他ならない。 ∂ の方は明らかな仕方で定義される。 ∂_n の方は (4) で作用を定義する。こうして KP ヒエラルヒーが微分代数 $\mathcal{A}$ というものに翻訳される。一旦この様な代数の言葉になると w_m というものはもはや具体的な函数である必要はなく、むしろ何か抽象的なシンボルとみなしてよい。このときそれらの間の微分・代数関係式（微分代数の構造として与えられた）が問題の微分方程式に他ならない。これはちょうど REDUCE で 'let df(...) = ...' という式を打ち込んだようなものであって、具体的な函数で evaluate することとは区別しなければならない。

Grassmann 多様体上の力学系としての解釈をするためには w_m から新しい変数に乗り換える方がよい。これは微分代数の言葉で言えば $\mathcal{A}$ の生成系を取り直すことであるが、この新しい生成系が $\mathcal{D}$ 加群という構造を通じて得られる、というのが以下の話のミソである。

3. 微分作用素・擬微分作用素の代数

まず基本的な概念として $\mathcal{A}$ 係数の微分作用素および擬微分作用素のなす非可換代数

$$\mathcal{D} = \left\{ P = \sum_{n=0}^m p_n \partial^n; p_n \in \mathcal{A} \right\}, \quad (6)$$

$$\mathcal{E} = \left\{ P = \sum_{n=-\infty}^m p_n \partial^n; p_n \in \mathcal{A} \right\} \quad (7)$$

(m は P 毎に変わる: $p_m \neq 0$ のとき m を P の階数という) を導入する。擬微分作用素の方の $P = \sum p_n \partial^n$ という和は形式的なものであるが、二個の加法を係数の項別の和で、また乗法を

$$\partial^n \cdot p = p \partial^n + \binom{n}{1} p^{(1)} \partial^{n-1} + \binom{n}{2} p^{(2)} \partial^{n-2} + \dots \quad (p \in \mathcal{A}) \quad (8)$$

という規則に基づいて定義することにより、同様に閉じた代数系をなす。微分作用素についてはこの演算規則は通常のもと同じで、 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{E}$ の部分代数になる。 $\mathcal{E}$ の中で ∂ の負巾 $\partial^{-1}, \partial^{-2}, \dots$ のみの 1 次結合よりなるものの全体を $\mathcal{E}^{(-1)}$ と書くと

$$\mathcal{E} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{E}^{(-1)} \quad (9)$$

という分解を得る。右辺第一因子への射影が $(\dots)_+$ である；同様に第二因子への射影を $(\dots)_-$ と書く。

ここで一言注意しておく、一般に微分代数に係数をもつ微分作用素代数を考えることは実質的には微分代数（代数と微分の組としての）を与えることと同等である。つまりその非可環代数としての構造の中に微分方程式自体が組み込まれているのである。（但し上の $\mathcal{D}$ ではまだ ∂ しか考えていないので不十分であるが。）従って微分方程式系の代数的理論を非可環代数の理論の一種として再構成する可能性も考えられる。こういう視点は[2]で詳しく披瀝されている。

4. $\mathcal{D}$ 加群

さて、 $\mathcal{D}$ 加群というのは加法と $\mathcal{D}$ の線型作用とを与えられた代数系のことであるが、 $\mathcal{D}$ が非可換代数であるため左からの作用をもつもの（左 $\mathcal{D}$ 加群）と右からの作用を持つもの（右 $\mathcal{D}$ 加群）を区別する必要がある。ここでは主に左 $\mathcal{D}$ 加群を考える。 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{D}$ の部分代数だから左 $\mathcal{D}$ 加群は同時に左 $\mathcal{A}$ 加群でもあることに注意されたい。

具体的には $P \cdot W$, $P \in \mathcal{D}$ という形の擬微分作用素全体（それを $\mathcal{D}W$ と書くことにする）を問題にする。これは次のような構造を持つ：

命題. 1) $\mathcal{D}W$ は左 $\mathcal{A}$ 加群として次のような生成系を持つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}W &= \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}W_i, \\ W_i &= \partial^i - \sum_{j < 0} w_{ij} \partial^j. \end{aligned} \quad (10)$$

2) W_i は W から次のように作られる。

$$W_i = (\partial^i \cdot W^{-1})_+ \cdot W. \quad (11)$$

特に $w_n = -w_{0,-n}$ ($n \geq 1$) である。

3) W_i は次のような関係式を満たす。

$$\partial \cdot W_i = W_{i+1} - W_{i,-1} W_0 \quad (i \geq 0). \quad (12)$$

4) 逆に擬微分作用素の組 $W_i = \partial^i - \sum_{j < 0} w_{ij}$ が上の関係式を満たせば, それらの生成する左 $\mathcal{A}$ 加群は実は左 $\mathcal{D}$ 加群で, $\mathcal{D}$ 上 1 個の要素 $W = W_0$ で生成される.

5. 微分代数の新しい生成系

W から w_{ij} を得るには例えば (11) を係数で書き直して得られる関係式

$$\partial w_{ij} = w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,-1} w_{0,j} \quad (13)$$

を $w_{0j} = -w_{-j}$ から出発して $w_{i+1,j}$ について逐次解いていけばよい. その結果 w_{ij} はどれも w_n の微分多項式 (但し ∂ に関する) になる. 従って, 特に

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[w_{ij} \ (i \geq 0, j < 0)] \quad (14)$$

であり, その上への ∂ の作用は (13) 式が規定している. 要するに, 加群の構造を仲介にして微分代数 $\mathcal{A}$ の新しい生成系を作ったのである. この新しい生成系によって **KP** ヒエラルヒーを書き直すと次のようになる.

命題. 発展方程式系 (2) (または W の係数で書き下した (4)) は次の方程式系と同値である.

$$\partial_n w_{ij} = w_{i+n,j} - w_{i,j-n} - \sum_{k=-n}^{-1} w_{ik} w_{k+n,j} \quad (n \geq 1). \quad (15)$$

これは $\mathcal{A}$ の上の微分 ∂_n を新しい生成系で表現したものになっている.

こうして得られた生成系 w_{ij} (それは **Grassmann** 多様体上のある特別な意味を持つ座標系をなすのだが) を用いると [8] の結果をもう少し具体的に説明することが出来る. その内容は大きく分けて方程式を解くこと (解の構造) と方程式のもつ対称性 (変換群) の二つの側面から成るが, いずれにしても (13), (15) のように書かれた方程式が一種の **Riccati** 方程式 (行列型の) であることからの帰結である.

6. 一般解の構造

まず解の構造については, 次のような無限行列を導入しておく都合がよい.

$$\xi = (\xi_{ij})_{-\infty < i < \infty, j < 0}, \quad \xi_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & (i < 0, j < 0) \\ w_{ij} & (i \geq 0, j < 0) \end{cases} \quad (16)$$

これを使うと (13), (15) はそれぞれ次のように書ける.

$$\partial \xi = \Lambda \xi - \xi C, \quad (17)$$

$$\partial_n \xi = \Lambda^n \xi - \xi C_n, \quad (18)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Lambda^n &= (\delta_{i+n,j})_{-\infty < i,j < \infty}, \\ C &= (\xi_{i+1,j})_{i,j < 0}, \\ C_n &= (\xi_{i+n,j})_{i,j < 0}. \end{aligned} \quad (19)$$

これは次のような意味で ‘解ける’ 形になっている.

命題. (13), (15) の形式的巾級数解 (つまり $w_{ij} \in \mathbb{C}[[t, x]]$ という解) は $t = 0, x = 0$ に於ける任意の初期値に対して

$$\xi(t, x) = \exp(x\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n) \xi(t=0, x=0) h(t, x)^{-1} \quad (20)$$

という公式で与えられる. ここで $h(t, x)$ は $\exp(x\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n) \xi(t=0, x=0)$ の ‘上半分’ つまり添字が $i < 0, j < 0$ の部分である.

注意. 1) $h(t, x)$ の逆行列の存在, (20) 右辺の無限行列同志の積が意味を持つこと, 等は実際に証明できる ([3] 参照).

2) $\sum_{i \geq 0, j < 0} w_{ij}(t=0, x=0) y^i z^{-j-1}$ が 2 変数の巾級数として $y = 0, z = 0$ の近傍で収束する (これは w_{ij} に対する増大度条件を課しているわけだが) ならば上の公式で与えられる $\xi(t, x)$ も単なる形式的巾級数であるだけでなく $t = 0, x = 0$ の近傍で収束する.

公式 (20) を確かめること自体は簡単である. $\tilde{\xi} = \exp(x\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n) \xi(t=0, x=0)$ と置くと, これは,

$$\partial \tilde{\xi} = \Lambda \tilde{\xi},$$

$$\partial_n \tilde{\xi} = \Lambda^n \tilde{\xi},$$

という方程式を満たす. 従って $\xi = \tilde{\xi} h^{-1}$ は (13), (15) の形の方程式を満たす. h の選び方により $\xi(t, x)$ は確かに (16) のような形をしている. あとは C, C_n が (19) で与えられるも

のなることを示せばよいが、そのためには (13), (15) の両辺の行列添字が $i < 0, j < 0$ の範囲を取り出せばよい：これは

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} \delta_{i+1,j} \ (i < -1, j < 0) \\ w_{0,j} \ (j < 0) \end{pmatrix} - C, \\ 0 &= \begin{pmatrix} \delta_{i+n,j} \ (i < -n, j < 0) \\ w_{i+n,j} \ (-n \leq 0, j < 0) \end{pmatrix} - C_n, \end{aligned}$$

という等式になり、結局求める結果を得る。

7. 変換群

変換群の方についても同様である。実はこの場合本当の意味での群を定式化するのは難しいので、形式群を仲介として専ら無限小変換の方を考える。

次の無限次元 Lie 代数を導入する。

$$\begin{aligned} gl(\infty) = \left\{ A = (a_{ij} \ (-\infty < i, j < \infty)); a_{ij} \in \mathbb{C}, \right. \\ \left. \text{ある整数 } m \text{ に対して } a_{ij} = 0 \ (j - i > m) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

交換子積は通常通り： $[A, B] = AB - BA$ 。この Lie 代数に属する A および形式的パラメータ ϵ をとり、ちょうど上の一般解の公式で $\exp(x\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n)$ を使って時間発展を記述したように、1 パラメータ形式群 $\exp(\epsilon A)$ を $\xi(t=0, x=0)$ の左から掛けて右から h のような補正因子を掛ければ初期値のレベルでの形式的変換が得られる。これを解のレベルに翻訳すれば

命題。 対応する解の形式的 1 パラメータ変換は

$$\xi(t, x) \mapsto \xi_{\epsilon}(t, x) = \exp(\epsilon A(t, x)) \xi(t, x) k(\epsilon, t, x)^{-1} \quad (22)$$

と書ける。但し $k(\epsilon, t, x)$ はその前の $\exp(\dots)\xi(\dots)$ の行列添字が負の範囲に対応する部分行列であり、また $A(t, x)$ は次の通り。

$$A(t, x) = \exp(x\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n) A \exp(-x\Lambda - \sum_{n=1}^{\infty} t_n \Lambda^n). \quad (23)$$

(22) が実際に解の変換を引き起こすことは (20) を導いたときと同じ論法で確かめられる。

ϵ の 1 次のオーダーまで計算することにより対応する無限小変換

$$\delta_A \xi = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \xi_\epsilon \Big|_{\epsilon=0} \quad (24)$$

を求めることが出来る。

命題. ξ の無限小変換は次のようになる。

$$\delta_A \xi = A(t, x) \xi - \xi C_A(t, x). \quad (25)$$

ここで $C_A(t, x)$ は次のような行列。

$$C_A(t, x) = \left(a_{ij}(t, x) + \sum_{k < 0} a_{ik}(t, x) w_{kj} \right)_{i,j < 0}. \quad (26)$$

w_{ij} を使って書けば (25) は次のようになる。

$$\delta_A w_{ij} = a_{ij}(t, x) + \sum_{k \geq 0} a_{ik}(t, x) w_{kj} - \sum_{l < 0} w_{il} (a_{lj}(t, x) + \sum_{k \geq 0} a_{lk} w_{kj}) \quad (27)$$

さらに次のことが判る。

命題. こうして得られた無限小変換は次の交換関係を満たす。

$$\delta_{[A, B]} w_{ij} = [\delta_B, \delta_A] w_{ij}. \quad (28)$$

微分代数の言葉で言えば, (27) は $\mathcal{A}_{t, x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}[[t, x]]$ の新しい微分を定義する。より正確に言えば δ_A は (29) に加えて

$$\delta_A(t_n) = 0, \quad \delta_A(x) = 0 \quad (29)$$

という条件も満たすものとして定義される。一方もともと $\mathcal{A}$ 上に与えられた ∂, ∂_n の方は ($\mathbb{C}[[t, x]]$ に対しては $\partial/\partial x, \partial/\partial t_n$ として作用するものとして) このテンソル積の上に自然な拡張を持つ。このとき次のことが δ_A の構成法よりすぐに判る,

命題. δ_A ($A \in gl(\infty)$) は皆 ∂, ∂_n ($n \geq 1$) と可換である。

この命題の中で述べられた性質 (∂, ∂_n との可換性) は実は微分代数の言葉で定式化した微分方程式の対称性の定義そのものなのである。一般的設定で言えば, まず可換代数 $\mathcal{A}$ とそ

の上のいくつかの微分 ($\delta_i, i \in I$) (つまり Leibniz 規則 $\delta_i(uv) = \delta_i(u)v + u\delta_i(v)$ ($u, v \in \mathcal{A}$) を満たす線型写像) の組として微分代数が一つ設定される; これらの基本的な微分達を与える代わりにその $\mathcal{A}$ 係数 1 次結合のなす Lie 代数 Θ を与えるといってもおなじことである; このときこの微分代数の対称性 (あるいは 'Lie-Bäcklund 変換') とは一般に $\mathcal{A}$ の微分 δ で

$$[\delta, \Theta] \subset \Theta \quad (30)$$

を満たすもののことである。但しこのままでは Θ 自身も対称性を与えることになって常識的感覚と合わないので Θ に族さないもののみを対称性と呼ぶのが慣例のようである。(30) は Θ の生成系 δ_i に対して

$$[\delta, \delta_i] = \sum f_{ij} \delta_j, \quad f_{ij} \in \mathcal{A}, \quad (31)$$

という関係式が満たされることと同等であるが、 δ_i がうまく選ばれていると右辺の係数が消えることがある。上の状況がまさにそうになっている。Pfaff 方程式系の取り扱いに慣れている人はここで説明していることの意味がすぐにピンと来るであろう。

なお、 $\delta_{\mathcal{A}}$ を $\mathcal{A}$ ではなくそれと $\mathbb{C}[[t, \mathbf{x}]]$ とのテンソル積の上の微分とみなさなければならぬのは (25), (27) の右辺に $a_{ij}(t, \mathbf{x})$ という量 ($\mathbb{C}[[t, \mathbf{x}]]$ に属する) が現れるためである。 $\mathcal{A}$ はあくまで w_{ij} というもの (抽象的代数の要素であって具体的な函数ではない) しか含んでいない。但し例外的に $\mathcal{A} = \Lambda^n$ (n は整数) の生成する対称性は $\mathcal{A}$ の言葉だけで定義出来る。もしも $\mathcal{A}$ 上の微分とみなすならばそれは ∂_n と一致する。しかし注意して欲しいのは、上の定義に従えば δ_{Λ^n} は (29) も満たすなので $\mathcal{A}_{t, \mathbf{x}}$ 上の微分としては ∂_n とは一致しないということである。この辺は数学的清教主義の行き過ぎた面と映るかも知れないが、むしろ今や普段何となくやっていることの曖昧さをこの様な諸概念の分析を通じて反省すべきときではないかと思う。

8. もう一つの行列表示

上の議論では ξ という行列が基本的な役割を演じているが、実はもうひとつこれと 'dual' の関係にるもう一つの全く同等な行列形式がある。それは次の行列による。

$$\eta = (\eta_{ij})_{i \geq 0, -\infty < j < \infty}, \quad \eta_{ij} = \begin{cases} -w_{ij} & (i \geq 0, j < 0), \\ \delta_{ij} & (i, j \geq 0). \end{cases} \quad (32)$$

これは次のような意味で DW の $\mathcal{A}$ -生成系 W_i ($i \geq 0$) の展開係数を並べたものと思っ
てよい.

$$\begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \eta \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \partial^{-1} \\ 1 \\ \partial \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

この η で前述の微分代数構造や対称性を表現することもできる (具体的なことは省く).

DW を中心に据える立場からすればむしろこの η を用いて全てを定式化の方がよい
とも言える. まず ξ で説明したのは [8] との対応関係を尊重するためである.

実は ξ の方もある $\mathcal{D}$ 加群と (33) の様な関係にある. 但し今度は左 $\mathcal{D}$ 加群ではなくて右
 $\mathcal{D}$ 加群が現れる. 具体的には $W^{-1}\mathcal{D}$ というものを考えるのである. これについても DW
の場合と全く同様なことが言える. 興味のある読者は試みられたい.

9. τ 関数

KP ヒエラルヒーの面白さはこれまでに扱ってきた変数の背後に τ 関数 (あるいは広田の
変数) というものがあって理論を完全に規定していることにある. この τ 関数は微分代数
の視点から見るとどのような位置付けになるであろうか?

τ 関数は w_{ij} に対するポテンシャル関数であり, 次の方程式の解として特徴付けら
れる.

$$\partial \log \tau = w_{0,-1} \quad (34a)$$

$$\partial_n \log \tau = \sum_{k=-n}^{-1} w_{k+n,k} \quad (34b)$$

直接計算によって次のことは容易に確かめられる.

命題. 方程式系 (34) は (13) と (15) のもとで完全積分可能である. つまり (34a), (34b)
の右辺をそれぞれ f, f_n と書くと次の方程式が満たされている.

$$\partial_n f - \partial f_n = 0, \quad (35a)$$

$$\partial_m f_n - \partial_n f_m = 0. \quad (35b)$$

従って (34) の解の存在は確かに保証されている。

(34) の由来は Grassmann 多様体の幾何学にある[9]。τ 関数がもともと一種の無限行列式（粗っぽく言えば (20) に出てきた $h(t, \mathbf{x})$ の行列式）として導入されている[8]ことを思い出せば (34) の意味も想像できると思う。(34) が次のように書き直せることに注意されたい。

$$\partial \log \tau = \text{tr}(\Lambda_{-+} \mathbf{W}), \quad (36a)$$

$$\partial_n \log \tau = \text{tr}(\Lambda^n_{-+} \mathbf{W}), \quad (36b)$$

但し $\Lambda_{-+} = (\delta_{i+1,j})_{i < 0, j \geq 0}$, $\Lambda^n_{-+} = (\delta_{i+n,j})_{i < 0, j \geq 0}$, また $\mathbf{W}$ は ξ の ‘下半分’

$$\mathbf{W} = (w_{ij})_{i \geq 0, j < 0}. \quad (37)$$

$\log \tau = \log \det h(t, \mathbf{x})$ という式を形式的に微分してやればこんな式が実際に出てくる。

ところで[6]では τ 関数を特徴付ける微分方程式として別の形のものを与えている。今の設定で言えばそれは次のようになる。

$$\partial \tau = -w_1 \tau, \quad (38a)$$

$$p_n(-\partial_t) \tau = w_n \tau, \quad (38b)$$

但し $p_n(t)$ は母函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n \right)$$

により定義される多項式、また $p_n(-\partial_t)$ はそれから $t_1 \mapsto -\partial_1$, $t_2 \mapsto -\partial_2/2$, $t_3 \mapsto -\partial_3/3$, ... という置き換えで得られる微分作用素である。当然 (34) と (38) は同等でなければならない。実際 (34) を逐次 w_{ij} について解いて $\log \tau$ の微分多項式の形に書くことができる。(なお、[8]のような Plücker 座標を用いた定式化からも (34) を導くことができる。その方がむしろ簡単なのだが、超 KP ヒエラルヒーには Plücker 座標の方法が拡張しにくいのでここではこれ以上議論しない。)

微分代数の視点からこういう τ 関数の定義方程式を解釈すると以下のようなになる。今新しい微分代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を可換代数としては

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}[\log \tau, w_{ij}] \quad (39)$$

という表示を持ち、また微分としては (13), (15), (34) により定義される ∂, ∂_n ($n \geq 1$) を持つものとする。このとき自然に決まる微分代数準同型 $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ は単射になる。これは当り前のように思われるかも知れないが、そうではなくてこれは積分可能条件 (35) が (13) と (15) のもとで満たされているということの言い替えなのである。実際、 $\tilde{\mathcal{A}}$ の中では (34) が基本関係式として組み込まれているから (35) は常に満たされているわけで、従って $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ が単射ならば (35) は $\mathcal{A}$ の中で考えてもやはり成り立っていないわけではなく、逆にそれが単射性のための唯一の条件であることもすぐに判る。少し別の言い方をすればこうなる。(35) は (34) から微分と代数演算によって $\log \tau$ を消去したものであり、その両辺は $\log \tau$ を含まないので $\mathcal{A}$ の要素ともみなせるが、この関係式が $\mathcal{A}$ でも同時に満たされている（言い換えれば $\log \tau$ に対する方程式 (34) から w_{ij} の間に新しい方程式が生じない）ことが単射性の意味するところである。一般にポテンシャル（あるいは Estabrook-Wahlquist の言うところの‘擬ポテンシャル’）の概念は同様の理由で微分代数の拡大として理解できる。

10. τ 函数の変換理論

τ 函数も含めた変換理論は拡大された微分代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を使って定式化される。基本的な形式は w_{ij} の変換理論と殆ど同じだが、 $gl(\infty)$ の代わりにその 1 次元中心拡大 $\tilde{gl}(\infty)$ の現れることが大きな違いである。

ここでも変換は無限小変換として理解する。 $\tilde{gl}(\infty)$ は集合としては

$$\tilde{gl}(\infty) = gl(\infty) \oplus \mathbb{C}z \quad (40)$$

で与えられ、交換関係は

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = [\widetilde{A}, \widetilde{B}] + c(A, B)z, \quad (41a)$$

$$[\tilde{A}, z] = 0 \quad (A, B \in gl(\infty)), \quad (41b)$$

で定義される Lie 代数である。但しここで $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$ は (40) で第 2 因子のないもの $(A, 0), (B, 0), \dots$ を意味し (A, B , 等自身との区別のために用いる), また $c(A, B)$ はつぎのような $gl(\infty)$ 上の 2 次形式（コサイクルになっている）である。

$$c(A, B) = \text{tr}(A_{-+}B_{+-} - B_{-+}A_{+-}). \quad (42)$$

ここで $A_{\pm, \pm}$ は A の次の4つのブロックをあらわす.

$$A = \begin{pmatrix} A_{--} & A_{-+} \\ A_{+-} & A_{++} \end{pmatrix}, \quad A_{+-} = (a_{ij})_{i \geq 0, j < 0}, \text{ etc.} \quad (43)$$

[9]で議論しているように, $\tilde{gl}(\infty)$ の各要素はまず $\log \tau$ と w_{ij} の $(t, \mathbf{x}) = (0, 0)$ に於ける初期値に対して無限小変換を引き起こす. これは KP ヒエラルヒー以前の, 無限次元 Grassmann 多様体の幾何学からの帰結である. この無限小変換が引き起こす $\log \tau$ と w_{ij} の無限小変換を計算すると次のようになる. まず $A \in gl(\infty)$ に対しては

$$\delta_{\tilde{A}} \log \tau = \text{tr} A_{-+}(t, \mathbf{x}) \mathbf{W} + \gamma(A; t, \mathbf{x}), \quad (44a)$$

$$\delta_{\tilde{A}} \mathbf{W} = A_{+-}(t, \mathbf{x}) + A_{++}(t, \mathbf{x}) \mathbf{W} - \mathbf{W} (A_{--}(t, \mathbf{x}) + A_{++}(t, \mathbf{x}) \mathbf{W}), \quad (44b)$$

$$\delta_{\tilde{A}} t_n = 0, \quad \delta_{\tilde{A}} \mathbf{x} = 0 \quad (44c)$$

となる. また z に対しては

$$\delta_z \log \tau = 1, \quad (45a)$$

$$\delta_z \mathbf{W} = 0, \quad (45b)$$

$$\delta_z t_n = 0, \quad \delta_z \mathbf{x} = 0 \quad (45c)$$

となる. 但しここで $\gamma(A; t, \mathbf{x})$ は次の微分方程式の初期値問題の解 ($\mathbb{C}[[t, \mathbf{x}]]$ に於ける) である.

$$\partial \gamma(A; t, \mathbf{x}) = c(\Lambda, A(t, \mathbf{x})), \quad (46a)$$

$$\partial_n \gamma(A; t, \mathbf{x}) = c(\Lambda^n, A(t, \mathbf{x})), \quad (46b)$$

$$\gamma(A; 0, 0) = 0. \quad (46c)$$

もう少し正確に言えばこの結果は次のようにまとめられる.

命題. (44) と (45) の定義する $\tilde{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{C}[[t, \mathbf{x}]]$ 上の微分 δ_X ($X \in \tilde{gl}(\infty)$) は ∂, ∂_n と可換である. 従って $\log \tau$ と w_{ij} に対する発展方程式系 (13) + (15) + (34) の対称性を与える. さらに次の交換関係を満たす.

$$[\delta_{\tilde{A}}, \delta_{\tilde{B}}] = \delta_{[\tilde{B}, \tilde{A}]} + c(B, A) \delta_z, \quad (47a)$$

$$[\delta_{\tilde{A}}, \delta_z] = 0 \quad (A, B \in gl(\infty)). \quad (47b)$$

w_{ij} の変換に関わる部分は既に議論したものと全く同じ形をしていることに注意されたい。

$\log \tau$ の変換公式に現れている奇妙な因子 γ は $\bar{g}l(\infty)$ の交換関係の‘異常項’ ((41a) の最後の項) に由来するもので、一種のアノマリーである。

1.1. 超 KP ヒエラルヒーの場合

以下ではこれまでに説明してきたことを超 KP ヒエラルヒーの場合に焼き直す。

KP ヒエラルヒーの W に対する方程式に対応するのは次のような方程式である。

$$\bar{D}_n W = B_n W - W D^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (48)$$

記号を説明する。 $\bar{D}_n$ は無限個の変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ に関する

$$\bar{D}_n = \begin{cases} \partial/\partial t_{2m} & \text{if } n = 2m \\ \partial/\partial t_{2m-1} - \sum_{k \geq 1} t_{2k-1} \partial/\partial t_{2k+2m-2} & \text{if } n = 2m-1 \end{cases} \quad (49)$$

という superderivatives (超微分, しかし以下では単に微分ということにする), 但し t_{2m} ($m = 1, 2, \dots$) は‘ボゾンの’, t_{2m-1} ($m = 1, 2, \dots$) は‘フェルミオンの’とする。つまり

$$t_m t_n - (-)^{mn} t_n t_m = 0 \quad (50)$$

という関係を満たすとする。また $W = W(t, x, \theta, D)$ は

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t, x, \theta) D^{-n} \quad (51)$$

という形の (1|1) 次元超空間 (その座標 (x, θ) に於て x は‘ボゾンの’, θ は‘フェルミオンの’) の上の擬微分作用素である。(この様な擬微分作用素の一般論については [4], [5] などを参照されたい。) D は

$$D = \partial/\partial \theta + \theta \partial/\partial x \quad (52)$$

というフェルミオンの微分である。これは 2 乗すると $\partial/\partial x$ になる:

$$D^2 = \partial/\partial x. \quad (53)$$

さらに

$$w_m w_n - (-)^{mn} w_n w_m = 0 \quad (54)$$

という代数的関係式もおく。つまり w_n は n が偶数のとき‘ボソンの’で奇数のとき‘フェルミオンの’であることを要請する。最後に B_n は

$$B_n = (W \cdot D^n \cdot W^{-1})_+, \quad (55)$$

で定義される。但し $(\dots)_+$ は微分作用素部分（つまり D の非負巾よりなる部分）をあらわす。

上の方程式系を微分代数の言葉に翻訳する。基礎になるのは次の超可換代数である。

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[w_n^{[k]}; k \geq 0, n \geq 1] \quad (56)$$

但し [4] にならって $D^k w_n$ を $w_n^{[k]}$ と略記した。超可換代数の構造、つまり $\mathbb{Z}_2$ grading

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}} \quad (\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\})$$

は $w_n^{[k]} \in \mathcal{A}_{\bar{k}+\bar{n}}$ となるように定める。 D および D^2 はそれぞれ‘ボソンの’あるいは‘フェルミオンの’微分として理解する。さらに発展方程式 (48) を $\mathcal{A}$ 上の微分 $\bar{D}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を定義するものとして理解する。

D 加群を考える舞台として $\mathcal{A}$ に係数をもつ微分作用素および擬微分作用素の代数

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ P = \sum_{n=0}^m p_n D^n; p_n \in \mathcal{A} \right\}, \quad (57)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ P = \sum_{n=-\infty}^m p_n D^n; p_n \in \mathcal{A} \right\}, \quad (58)$$

(m は P 毎に変わる: $p_m \neq 0$ のとき m を P の階数という) を導入する。 $\mathcal{E}$ の中の W で生成される左 $\mathcal{D}$ 部分加群 $\mathcal{D}W$ がここで考える基本的な対象である。これについては次のことが判る。

命題. 1) 左 $\mathcal{A}$ 加群として $\mathcal{D}W$ は次のような生成系を持つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}W &= \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}W_i, \\ W_i &= D^i - \sum_{j < 0} w_{ij} D^j, \quad w_{ij} \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (59)$$

2) W_i は具体的に次のように書ける。

$$W_i = (D^i \cdot W^{-1})_+ W. \quad (60)$$

3) $w_{ij} \in \mathcal{A}_{i-j}$ であり, さらに次の方程式を満たす.

$$Dw_{ij} = w_{i+1,j} - (-)^{i-j-1} w_{i,j-1} - (-)^{i+1} w_{i,-1} w_{0,j}. \quad (61)$$

4) 逆に 3) のような w_{ij} 達はある W から以上のようにして得られるものになる. W の係数 w_n は w_{ij} から $w_n = -w_{0,-n}$ というように読み取れる.

このことから特に

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[w_{ij} \ (i \geq 0, j < 0)]. \quad (62)$$

(61) は D の作用をこの新しい生成系で書き下したものである. $\bar{D}_n$ の作用 (つまり微分代数の言葉で定式化した超 **KP** ヒエラルヒー) は次のようになる.

命題. 新しい生成系 w_{ij} に対して

$$\bar{D}_n w_{ij} = (-)^{in} (w_{i+n,j} - w_{i,j-n} - \sum_{k=-n}^{-1} w_{ik} w_{n+k,j}). \quad (63)$$

ここで再び $\xi = (\xi_{ij})_{-\infty < i < \infty, j < 0}$, $\xi_{ij} = \delta_{ij} \ (i, j < 0)$; $w_{ij} \ (i \geq 0, j < 0)$ という無限行列を導入して (61) と (63) を書き直すと次のようになる.

$$D\xi = \Lambda\xi - S\xi S_{--}C, \quad (64a)$$

$$\bar{D}_n \xi = S^n \Lambda^n \xi - S^n \xi C_n, \quad (64b)$$

但しここで Λ^n , C , C_n は前と同じだが, S_{--} , S^n はそれぞれ:

$$\begin{aligned} S_{--} &= ((-)^i \delta_{ij})_{i,j < 0}, \\ S^n &= ((-)^{in} \delta_{ij})_{-\infty < i, j < \infty}. \end{aligned} \quad (65)$$

こうしておくとき形式的巾級数解 (つまり $w_{ij} \in \mathbb{C}[[t, x, \theta]]$ という解) の構造は簡潔に説明できる:

命題. $t = 0, x = 0, \theta = 0$ での初期値を与えたときの形式的巾級数解は次のように書ける.

$$\xi(t, x, \theta) = \exp(x\Lambda^2 + \theta\Lambda + \sum_{n \geq 1} t_n S^n \Lambda^n) \xi h(t, x, \theta)^{-1}. \quad (66)$$

ここで $h(t, x, \theta)$ は右辺の第1項と第2項の積の与える行列から添字が $i, j < 0$ の範囲を取り出して作った行列である。

ξ は [5] の主要結果で使っている無限行列とは少し異なるが、どちらも超 Grassmann 多様体の同じ点を代表しているので、本質的には同等である。微分代数的な構造を見るにはここでのやり方の方が適している。我々は方程式自体を扱うこと（例えば従属変数を w_n から w_{ij} に取り替える議論）と方程式の解を扱うこと（実際に解く手順など）とを極力分離して考えるという立場をとっている。前者は微分代数の構造を云々することであり、それによってまず出来るだけ解き易い形（言い替えれば、それだけ方程式系の本質に迫った形）に変形しておいてからおもむろに解を書き下す段階に進むのである。[5] ではその辺が混ざり合っていて、計算も少しゴチャゴチャしているような気がする。

τ 関数を定義する微分方程式は次のようになる。

$$D \log \tau(t, x, \theta) = -w_{0,-1}, \quad (67a)$$

$$\bar{D}_n \log \tau(t, x, \theta) = \sum_{j=-n}^{-1} (-)^{j(n+1)} w_{j+n,j}, \quad (67b)$$

ここで注意すべきなのは $D, \bar{D}_n$ が可換でも超可換でもなくて次のような複雑な交換関係に従うことである。

$$\bar{D}_n D - (-)^n D \bar{D}_n = 0, \quad (68a)$$

$$\bar{D}_m \bar{D}_n - (-)^{mn} \bar{D}_n \bar{D}_m = ((-)^{mn} - 1) \bar{D}_{m+n}. \quad (68b)$$

このことがそもそも超 KP ヒエラルヒーの取り扱いを複雑にしている一つの大きな要因である。今の場合も (67a), (67b) の右辺をそれぞれ f, f_n と書くと (67) の積分可能条件は

$$D f_n - (-)^n \bar{D}_n f = 0, \quad (69a)$$

$$\bar{D}_m f_n - (-)^{mn} \bar{D}_n f_m = ((-)^{mn} - 1) f_{m+n}, \quad (69b)$$

というややこしい形になる。これは（少なくとも見た目には）普通この種の議論でよく出て来るような‘保存則’の形をしていない。しかしながら、ともかく次のことが言える。

命題. 超 KP ヒエラルヒーのもとで (69) は満たされる。

従って (67) の解は存在する。しかも解は

$$\tau(t, x, \theta) \rightarrow \text{const.} \tau(t, x, \theta). \quad (70)$$

という不定性を別にすれば一意的であることもすぐに確かめられる。こうして[5]の導入した τ 関数を微分方程式で特徴付けることが出来る。

このように超 KP ヒエラルヒーに対しても τ 関数を定義する微分方程式が得られるが、この方程式を w_{ij} について解いて w_{ij} を $\log \tau$ の微分多項式として表すことは出来ない。つまり (38) のような関係式は作れそうないのである。災いのもとには (67) 右辺に現れる奇妙な符号因子にある。このために KP ヒエラルヒーの場合にはうまくいった計算が全部駄目になるのである。(i, j の小さいところで実験してみるとすぐに判る。) 別の言い方をすれば、超 KP ヒエラルヒーの τ 関数はもとの系の情報をかなり ‘忘れている’ ということになる。

このようなことが起こるのは次のような理由によると思われる。(67) の符号因子は τ 関数が KP ヒエラルヒーの場合のような行列式ではなくて超行列式 (superdeterminant) であること (このことは[5]に指摘されている) に由来している。フェルミ的自由度を忘れれば超 KP ヒエラルヒーは実は2つの独立な KP ヒエラルヒー (それぞれ系 I, 系 II と名付けよう) の連立系になる。(但し独立変数は共通。) このときそれぞれの τ 関数を τ_I, τ_{II} と書くと超 KP ヒエラルヒーとしての τ 関数はそれらの比 τ_I/τ_{II} に一致する。このため分子分母で情報の打ち消し合いが起こるらしい。フェルミオンの自由度を入れると話はもう少し複雑だが定性的にはこれで何が起きているかが説明できる。元々超対称性は場の理論で発散を打ち消すための機構として重要なのだが、いまは大事なもので打ち消してしまっているのである。

微分代数の言葉で以上のことを言い直すとこうなる：新しい微分代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を超可換代数としては $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}[\log \tau, w_{ij}]$ という表示を持ち、その上に (61), (63), (67) によって定義される微分 $D, \bar{D}_n$ を持つものとする。これが微分代数として $\mathcal{A}$ の拡大になるというのが上の命題の意味するところである。

超 KP ヒエラルヒーの変換理論で基本的なのは

$$gl(\infty|\infty) = \{A = (a_{ij}) \ (i, j \in \mathbb{Z}); \ a_{ij} \in \mathbb{C}, \\ \exists m \in \mathbb{Z}, \ a_{ij} = 0 \text{ for } j - i > m\} \quad (71)$$

という超 Lie 代数とその 1 次元中心拡大 $\tilde{gl}(\infty|\infty)$ である. $gl(\infty|\infty)$ の超 Lie 代数としての $\mathbb{Z}_2$ -graded structure $gl(\infty|\infty) = gl(\infty|\infty)_{\bar{0}} \oplus gl(\infty|\infty)_{\bar{1}}$ は

$$gl(\infty|\infty)_{\bar{p}} = \left\{ A = (a_{ij}); a_{ij} = 0 \ (i - j \not\equiv p \bmod 2) \right\} \quad (72)$$

というように, また超交換子は homogeneous な要素 A, B (つまり $gl(\infty|\infty)_{\bar{0}}, gl(\infty|\infty)_{\bar{1}}$ のいずれかに属する) に対して

$$[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - (-)^{p(A)p(B)} BA \quad (73)$$

で与えられる. ここで $p(A), p(B)$ は A, B のパリティ (つまり A, B の属する $\text{grade} \in \mathbb{Z}_2$) をあらわす. $gl(\infty|\infty)$ の上には

$$c(A, B) = \text{Str}(A_{-+}B_{+-} - B_{-+}A_{+-}), \quad (74)$$

というコサイクルがある. 但しここで Str は super trace をあらわす, つまり一般に行列 $C = (c_{ij})_{i,j < 0}$ に対して $\text{Str } C = \sum_{i < 0} (-)^i c_{ii}$ である. また $A_{\sigma\sigma'}$ ($\sigma, \sigma' = \pm$) は前と同様に行列 $A = (a_{ij})_{-\infty < i, j < \infty}$ の 4 つのブロックをあらわす. このコサイクルは 1 次元中心拡大

$$\tilde{gl}(\infty|\infty) = gl(\infty|\infty) \oplus \mathbb{C}z \quad (75)$$

を

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = [\widetilde{A, B}] + c(A, B)z, \quad [\tilde{A}, z] = 0, \quad (76)$$

という超交換関係をもつ超 Lie 代数として定める. (ここでも $A \in gl(\infty|\infty)$ に対して $\tilde{A}$ は $(A, 0)$ の意味.)

超 KP ヒエラルヒーの対称性は $\tilde{A}$ のテンソル積による拡大 $\tilde{A}_{t,x,\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{A} \otimes \mathbb{C}[[t, x, \theta]]$ の上の新たな微分として構成される. より正確には, 今度は $D, \bar{D}_n$ と超可換な微分が対称性を与える. 前と同様に行列

$$W = (w_{ij})_{i \geq 0, j < 0} \quad (77)$$

を用いて対称性の具体的な形を書き下す. まず homogeneous な $A \in gl(\infty|\infty)$ に対して $A(t, x, \theta) \in gl(\infty|\infty) \otimes \mathbb{C}[[t, x, \theta]]$ を次のような関係式 (これは '超 Lie 群' $GL(\infty|\infty)$ の中の等式である) によって定義する.

$$\begin{aligned} & \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n S^n \Lambda^n + x \Lambda^2 + \theta \Lambda \right) \exp(\epsilon A) \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t_n S^n \Lambda^n - x \Lambda^2 - \theta \Lambda \right) \\ &= \exp(\epsilon A(t, x, \theta)), \end{aligned} \quad (78)$$

ここで ϵ は $p(A) = \bar{0}$ のとき‘ボゾンの’で $p(A) = \bar{1}$ のとき‘フェルミオンの’ (つまり $\epsilon^2 = 0$) なパラメータである. A についての線型性を要求すれば $A(t, x, \theta)$ は $gl(\infty|\infty)$ の全ての要素に対して一意的に拡張される. さて, $A \in gl(\infty|\infty)$ と z に対して $\tilde{A}_{t,x,\theta}$ 上の微分 $\delta_{\tilde{A}}$ と δ_z を次のように定める.

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{A}} W(t, x, \theta) &= A_{+-}(t, x, \theta) + A_{++}(t, x, \theta) W(t, x, \theta) \\ &\quad - S^{p(A)} W(t, x, \theta) S^{p(A)} (A_{--}(t, x, \theta) + A_{-+}(t, x, \theta) W(t, x, \theta)), \end{aligned} \quad (79a)$$

$$\delta_{\tilde{A}} \log \tau(t, x, \theta) = \text{Str} A_{-+}(t, x, \theta) W(t, x, \theta) + \gamma(A; t, x, \theta), \quad (79b)$$

$$\delta_{\tilde{A}} t_n = 0, \quad \delta_{\tilde{A}} x = 0, \quad \delta_{\tilde{A}} \theta = 0, \quad (79c)$$

$$\delta_z W(t, x, \theta) = 0, \quad (80a)$$

$$\delta_z \log \tau(t, x, \theta) = 1, \quad (80b)$$

$$\delta_z t_n = 0, \quad \delta_z x = 0, \quad \delta_z \theta = 0, \quad (80c)$$

ここで $\gamma(A; t, x, \theta) \in \mathbb{C}[[t, x, \theta]]$ は次の方程式系の一意的な解である.

$$(-)^{p(A)} D \gamma(A; t, x, \theta) = c(\Lambda, A(t, x, \theta)), \quad (81a)$$

$$(-)^{p(A)n} \bar{D}_n \gamma(A; t, x, \theta) = c(S^n \Lambda^n, A(t, x, \theta)), \quad (81b)$$

$$\gamma(A; 0, 0, 0) = 0. \quad (81c)$$

命題. このようにして各 $X \in \tilde{gl}(\infty|\infty)$ に対して定義された $\tilde{A}_{t,x,\theta}$ 上の微分 δ_X は $D, \bar{D}_n$ と超可換であり, 超 **KP** ヒエラルヒーの対称性を与える. さらに次の超交換関係に従う.

$$[\delta_{\tilde{A}}, \delta_{\tilde{B}}] = \delta_{[\tilde{B}, \tilde{A}]} + c(B, A) \delta_z, \quad (82a)$$

$$[\delta_{\tilde{A}}, \delta_z] = 0 \quad (A, B \in gl(\infty|\infty)). \quad (82b)$$

参考文献

- [1] K. Takasaki, *Symmetries of the Super KP Hierarchy*, RIMS-641, Kyoto University Nov. 1988, to appear in *Lett. Math. Phys.*
- [2] 佐藤幹夫, 京都大学での連続講義, 1984-86; 東北大学での集中講義, 1986 (近野俊明筆記), 数理研講究録 668 'D 加群概説 (II)' 所収.
- [3] Takasaki, K., *Integrable Systems as Deformations of D-Modules*, preprint RIMS-601, Kyoto, 1987, to appear in *Theta Functions*, AMS Summer Institute, Bowdoin College 1987.
- [4] Manin, Yu.I., and Radul, A.O., *Commun. Math. Phys.* **98**, 65 (1985).
- [5a] Ueno, K., and Yamada, H., in *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, M. Jimbo, T. Miwa and A. Tsuchiya eds., Kinokuniya, Tokyo, 1988, p.373.
- [5b] Yamada, H., *Hiroshima Math. J.* **17**, 373 (1987).
- [5c] Ikeda, K., Ueno, K., and Yamada, H., *Algebraic Study on the SuperKP hierarchy and the Ortho-Symplectic Super-KP Hierarchy*, preprint 1988.
- [6] Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., and Miwa, T., in *Non-linear Integrable Systems - Classical Theory and Quantum Theory*, RIMS Symposium 1981, M. Jimbo and T. Miwa eds., World Scientific, Singapore, 1983, p.41.
- [7] Awada, M.A., and Chamseddine, A.H., *Phys. Lett.* **B206**, 437(1988).
- [8] M. Sato and Y. Sato, *Soliton Equations as Dynamical Systems on Infinite Dimensional Grassmann Manifold*, in *Nonlinear PDE in Applied Science*, U.S.-Japan seminar Tokyo 1982,
- [9] K. Takasaki, *Geometry of Universal Grassmann Manifold from Algebraic Point of View*, RIMS-623, to appear in *Reviews of Mathematical Physics*.