

pfaffian の微分, Laplace 展開, Jacobi 等式

広 大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

広 大 工 伊藤雅明 (Masaaki Ito)

ソリトン方程式は解の構造によつていくつかの系列に分けられる。2次元 K-dV 方程式に代表される KP 方程式系の解は Wronskian で表わされることが知られている。ここでは BKP 方程式

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau \cdot \tau = c$$

の解 τ が pfaffian で表わされることが、pfaffian に関する演算を行う数式処理プログラムを用いて示す。

(1) pfaffian の定義, pfaffian の展開.

W を n 次の反対称行列とする。 W の pfaffian $\text{pf } W$ は W の行列式の平方根

$$\det W = [\text{pf } W]^2$$

として定義され,

$$\text{pf } W = (1, 2, \dots, n)$$

と表わす。奇数次の反対称行列式の値は0であるので、奇数次の pfaffian も0である。例えば、4次の反対称行列

$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

を考えると、 W_4 の行列式は

$$\det W_4 = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

であるので、 W_4 の pfaffian は

$$\text{pf } W_4 = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

となる。又、これを

$$\text{pf } W_4 = (1, 2, 3, 4)$$

と表わす。

pfaffian $(1, 2, \dots, 2n)$ の基本的な展開則は

$$\begin{aligned} & (1, 2, 3, \dots, 2n) \\ &= \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (1, j) (2, 3, \dots, \hat{j}, \dots, 2n) \end{aligned}$$

である。ここで $\hat{j}$ は j を除くという意味である。この展開則によらず、 $\text{pf } W_4$ は

$$\text{pf } W_4 = (1, 2, 3, 4)$$

$$= (1, 2)(3, 4) - (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3)$$

と展開される。 (j, k) は π_4 の j, k 成分に対応しており、

$$(j, k) = -(k, j)$$

である。

(2) pfaffian の微分

BKP 方程式は

$$(D_1^6 - 5D_1^3D_3 - 5D_3^2 + 9D_1D_5)\tau \cdot \tau = 0$$

で表わされるが、ここで $D_1, D_3, \dots$ は

$$D_x^m f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m f(x) g(x') \Big|_{x'=x}$$

で定義される双線形微分演算子であるので、 τ が pfaffian で表わされることを示すためには、pfaffian に対する微分則を調べておかなければならない。

そこで、pfaffian の要素 (j, k) として

$$(j, k) = C_{j,k} + \int_{-\infty}^{\infty} D_{x_1} f_j(x_1) \cdot f_k(x_1) dx_1 \quad \text{--- ①}$$

を考えよう。ここで $C_{j,k}$ は定数であり、 f_j は線形微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_m} f_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^m f_j \quad (m : \text{odd})$$

を満たすものとする。\$(j, k)\$ の \$\alpha_1\$ に関する微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (j, k) &= D_{\alpha_1} f_j \cdot f_k \\ &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_1} \right) f_k - f_j \left(\frac{\partial f_k}{\partial \alpha_1} \right) \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

で表わされる。ここで、関数の微分を表わす pfaffian として次の記号を導入する

$$\begin{aligned} (d_m, j) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right)^m f_j & m=0, 1, 2, \dots \\ (d_n, d_m) &\equiv 0 & n=m=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad \dots \quad (3)$$

この記号を用いると、(2)式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (j, k) &= (d_1, j)(d_0, k) - (d_0, j)(d_1, k) \\ &= (d_0, d_1, j, k) \quad \dots \quad (4) \end{aligned}$$

となり、pfaffian の \$\alpha_1\$ 微分も pfaffian で表現される。BKP方程式は \$\alpha_1\$ だけでなく、\$\alpha_3, \alpha_5\$ に関する微分も含むので、それらに関する微分則も調べておく。

①式を \$\alpha_3\$ で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} (j, k) = \int_{-\infty}^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_1} f_k - f_j \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_1} \right) d\alpha_1'$$

$$= \left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} \right) f_2 - f_j \left(\frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} \right) - 2 \left[\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \right) \right]$$

となる。ここで③の記号を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} (j, t_2) &= (d_3, j)(d_0, t_2) - (d_0, j)(d_3, t_2) \\ &\quad - 2[(d_3, j)(d_1, t_2) - (d_1, j)(d_2, t_2)] \\ &= (d_0, d_3, j, t_2) - 2(d_1, d_2, j, t_2) \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となり、pfaffianで表現される。同様にして、 x_5 に関する微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_5} (j, t_2) &= (d_0, d_5, j, t_2) - 2(d_1, d_4, j, t_2) + 2(d_2, d_3, j, t_2) \\ &\quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

を得る。

一般に $(1, 2, \dots, 2n)$ に対する微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (1, 2, \dots, 2n) &= (d_0, d_1, 1, 2, \dots, 2n) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} (1, 2, \dots, 2n) &= (d_0, d_3, 1, 2, \dots, 2n) - 2(d_1, d_2, 1, 2, \dots, 2n) \\ \frac{\partial}{\partial x_5} (1, 2, \dots, 2n) &= (d_0, d_5, 1, 2, \dots, 2n) - 2(d_1, d_4, 1, 2, \dots, 2n) \\ &\quad + 2(d_2, d_3, 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned}$$

で与えられる。

(3) pfaffian のための REDUCE プログラム

1) 及び (2) 節で見てきた pfaffian の展開, 微分を実行する REDUCE プログラムを実行例で示す。

まず記号の説明をしておく。

- ° pfaffian を表わすには PF を用いる。例えば $(1, 2, 3, 4)$ を表わすには, $PF(1, 2, 3, 4)$ とする。成分の数は任意である。又, ③式で定義したような関数の微分を表わす pfaffian 例えは,

$$(d_0, d_1, 1, 2) \text{ は } PF(B(0), B(1), 1, 2)$$

と表わす。一般に d_e は $B(e)$ と表わす。

- ° pfaffian の微分には DP を用いる。例えは,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_e}\right)^m (1, 2, 3, 4) \text{ は } DP(PF(1, 2, 3, 4), x_e, m)$$

と表わす。DH オペ-4 と同じ表記法である。

- ° pfaffian を展開則に従って展開するには, PPF 又は EVALWP を用いる。EVALWP(F) は F の中に含まれる pfaffian $PF(\dots)$ を全て展開する。

- ° 双線形微分演算子 $D_{x_2}^m$ を表わすには D を用いる。

$$D_{x_1}^{\ell} D_{x_2}^m \dots D_{x_n}^{k_n} f \cdot g \text{ は } D(f, g, x_1, \ell, x_2, m, \dots, x_n, k_n)$$

で表わす。 $g=f$ のときには $D(f, g, \dots)$ の代りに $D1(f, \dots)$

と表わしてもよい。例えは

$$D_{x_1}^3 D_{x_3} f \cdot f \quad \text{は} \quad D1(f, x_1, 3, x_3)$$

と表わす。f, g の中に pfaffian $PF(\dots)$ が含まれている場合は自動的に上記の微分規則が適用される。

次に関数の実行例を示す。

Q2 := PF(1, 2, 3, 4);

Q2 := PF(1, 2, 3, 4)

PPF(1, 2, 3, 4); (1, 2, 3, 4) の展開

$PF(3, 4) * PF(1, 2) - PF(2, 4) * PF(1, 3) + PF(2, 3) * PF(1, 4)$

EVALWP Q2; Q2 の中の pfaffian を展開する。

$PF(3, 4) * PF(1, 2) - PF(2, 4) * PF(1, 3) + PF(2, 3) * PF(1, 4)$

Q1 := PF(1, 2) *

DP(Q1, X1); $\frac{\partial}{\partial x_1} Q_1$

$PF(B(0), B(1), 1, 2)$

DP(Q1, X1, 2); $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Q_1$

$PF(B(0), B(2), 1, 2)$

DP (Q1, X3) ;

$$\frac{\partial}{\partial x_3} Q_1$$

$$- (2*PF (B (1), B (2), 1, 2) - PF (B (0), B (3), 1, 2))$$

DP (Q1, X3, X1) ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} Q_1$$

$$- (PF (B (1), B (3), 1, 2) - PF (B (0), B (4), 1, 2))$$

DP (Q1, X5) ;

$$\frac{\partial}{\partial x_5} Q_1$$

$$2*PF (B (2), B (3), 1, 2) - 2*PF (B (1), B (4), 1, 2) + PF (B (0), B (5), 1, 2)$$

DP (Q1, X5, X1) ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x_5 \partial x_1} Q_1$$

$$- (PF (B (1), B (5), 1, 2) - PF (B (0), B (6), 1, 2) - 2*PF (B (0), B (1), B (2), B (3), 1, 2))$$

このようなプログラムを用いて, BKP 方程式

$$(D_{x_1}^5 - 5D_{x_3}D_{x_1}^3 - 5D_{x_5}^2 + 9D_{x_1}D_{x_5})\tau \cdot \tau = 0$$

の解 τ が pfaffian で表わされることが確かめられる。BKP 方程式を operator として定義し, 1-soliton, 及び 2-soliton 解に対応する pfaffian $PF(2, 2)$ 及び $PF(1, 2, 3, 4)$ を代入すると,

OPERATOR BKP;

[FOR ALL F LET
BKP (F) = D1 (F, X1, 6) - 5*D1 (F, X1, 3, X3) - 5*D1 (F, X3, 2) + 9*D1 (F, X1, X5);

ON LIST;

R1 := BKP (PF (1, 2));

R1 :=

$$\begin{aligned} & -90 * (PF (B (2), B (3), 1, 2) * PF (B (0), B (1), 1, 2) \\ & \quad - PF (B (1), B (3), 1, 2) * PF (B (0), B (2), 1, 2) \\ & \quad + PF (B (1), B (2), 1, 2) * PF (B (0), B (3), 1, 2) \\ & \quad - PF (B (0), B (1), B (2), B (3), 1, 2) * PF (1, 2)) \end{aligned}$$

R2 := BKP (PF (1, 2, 3, 4));

R2 :=

$$\begin{aligned} & -90 * (PF (B (2), B (3), 1, 2, 3, 4) * PF (B (0), B (1), 1, 2, 3, 4) \\ & \quad - PF (B (1), B (3), 1, 2, 3, 4) * PF (B (0), B (2), 1, 2, 3, 4) \\ & \quad + PF (B (1), B (2), 1, 2, 3, 4) * PF (B (0), B (3), 1, 2, 3, 4) \\ & \quad - PF (B (0), B (1), B (2), B (3), 1, 2, 3, 4) * PF (1, 2, 3, 4)) \end{aligned}$$

となる。各々の $pfaffian$ を展開すると、

EVALWP R1;

0

EVALWP R2;

0

となり、解であることが確かめられる。上の R1 及び R2 は同じ構造をしており、 n -soliton 解に対応する $pfaffian (1, 3, \dots, 2n)$ に対しても同じ構造の恒等式

$$\begin{aligned}
& (d_0, d_1, d_2, d_3, 1, 2, \dots, 2n)(1, 2, \dots, 2n) \\
& - (d_0, d_1, 1, 2, \dots, 2n)(d_2, d_3, 1, 2, \dots, 2n) \\
& + (d_0, d_2, 1, 2, \dots, 2n)(d_1, d_3, 1, 2, \dots, 2n) \\
& - (d_0, d_3, 1, 2, \dots, 2n)(d_1, d_2, 1, 2, \dots, 2n) \\
& = 0
\end{aligned}$$

が成立する。