

Riemann面上の等角写像

京大・理 柴 雅和

種数有限な開 Riemann 面 R から torus $\Leftarrow$ 種数 1 の閉 Riemann 面 $\mathcal{T}$ への解析写像についてしらべる。このような解析写像 f があれば、 $f(R)$ は $\mathcal{T}$ 上に拓がる被覆面と考えることができ、 f は R から $f(R)$ への等角写像と与える。一般的な f の存在、 f の境界挙動（すなわち $f(R)$ の境界の形状）を指定した時の存在条件、 $\mathcal{T}$ 上の被覆面 $f(R)$ の被覆状態（たとえば被覆葉数）、 f の誘導する、 $R, \mathcal{T}$ の 1 次元 homology 群間の準同型などを考察の対象とする。

まず、与えられた準同型 α 、 R の 1 次元 homology 群から $\mathcal{T}$ の 1 次元 homology 群の間にあるとき、これをひきよめる解析写像 $f: R \rightarrow \mathcal{T}$ がつねに存在する（閉 Riemann 面の場合には、これは成立しない——Gerstenhaber [2]）。じつは、 f は Behnke-Stein の定理 ([8], p. 205) を用いて構成される。§1. 命題 9, 10, 11 を参照。しかし境界挙動などに制限がつけば、 f がつねに存在すると

は限らないう。

この問題の背景にふれる。我々の問題は2つの異なる歴史的起源をもつ；1つはKoebeの一般化された一意化定理であり，もう1つは(閉Riemann面上の)Abel積分の積内積分への還元問題，とくにPoincaréの定理である。

よく知られているように，任意の単葉型Riemann面 R は，ある水平截線領域の上に1対1等角に写像される；すなわち， R は，その境界がすべて実軸に平行な線分(点も含める)からなる，補集合の面積0の， $\mathbb{C}$ 上の領域と等角同値である。—Koebeの一般化された一意化定理([8], p.351)。この結果は種数有限な任意の開Riemann面へと拡張された(Kusunoki[6])。Kusunoki[8]，Mori[12]も参照。我々の問題は：種数 $g(<\infty)$ の任意の開Riemann面 R を測地的平行截線写像(§2, 定義9)によつて，torus T の上に広がる被覆面として実現すること。定理4, 7も参照。とくに $g=1$ のときには，[6], [8]とは別の型の，Koebeの一意化定理の直接的拡張を得る(定理5)：種数1の任意の開Riemann面は，canonicalに定まる1つのtorus上の測地的平行截線領域と等角同値である。截線集合の極値的長さによる特徴づけも与える(定理6)。これも平面の場合の拡張になつてくる(Suita[20]参照)。測地的平行截線写像がde Possel型の極値問題の解になつてくることもわかる(定理8)。

一方, Poincaré の定理とは, 開 Riemann 面 R が torus への解析写像を与えるせば, R の第 1 種正規微分による周期行列の形が制限されることを示したものである. 我々は開 Riemann 面に対して類似の問題を考察し, 結論: 有限葉測地的平行截線写像が存在するための一つの十分条件は R の Virtanen-Kusunoki-Sainouchi の意味での周期行列 ([6][15]) が特定の形をもつことであることを主張する (定理 3, 4). R が所謂有限な面の場合には必要条件でもある. また Haupt-Wirtinger の定理 ([2][3]) の開 Riemann 面への拡張も与える (定理 2).

上に示した定理 1~8 が §2 の主な内容である. 証明はすべて方針を示す程度にとどめる. §2 の基礎になるのは, (開) Riemann 面から torus への解析写像に関する Abel の定理である. これは Kusunoki による開 Riemann 面上の Abel の定理 ([6], [8]; [1] も参照) およびその拡張 (Mizumoto [11], Yoshida [22], Sainouchi [16], Watanabe [21]) などとほぼ趣を異にするので, 念のため §1 で示す. [§2 では $g < \infty$ として用いるが一応 $g \leq \infty$ のもとで (しかし他の条件は適宜簡略化して) のべる]. 証明は一切略する. 詳細は, [17][18] と参照されたい.

1. Abel の定理

R を任意の開 Riemann 面, その種数と $g (\leq \infty)$ とする. R の

Kerékjártó-Stoilow の理想境界 ΣR とかく。 R の標準近似列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ Σ とつとり, Σ に隣伴する R の標準 homology 基底 (mod ∂R) $\{A_j, B_j\}_{j=1}^g$ ととり, Σ を固定する。(以下 $R_0 = \phi$ と約束し Σ 近似列は $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ とする)。 $\{A_j, B_j\}_{j=1}^g$ は次の性質をみたすとする: (i) 各 A_j, B_j は解析的な単純閉曲線, (ii) $A_j \times B_k = \delta_{jk}$, $A_j \times A_k = B_j \times B_k = 0$, (iii) A_j と B_k は δ_{jk} 個の点で交わり, A_j と $A_k; B_j$ と B_k とは交わらない。
 (iv) $\{A_j, B_j\}_{j=g(n)+1}^{g(n+1)}$ は $R_{n+1} - \bar{R}_n$ の, border Σ 法とする homology 基底である。($g(n)$ は R_n の種数, $g(0)=0$.) 交点数の定義は [8], [19] に従う。

R の局所変数 $z = x + iy$ により, R 上の Lebesgue 可測な微分形式 λ は $\lambda = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ とかけられる。以下 λ と $\bar{\lambda}$ は連続な 1 階微分形式は, 1 位の複素微分を表わす。 $\|\lambda\|^2 = \iint_R \lambda \wedge \bar{\lambda}^* = \iint_R (|a|^2 + |b|^2) dx dy < \infty$ となる λ は 2 乗可積分であるという。
 ($\lambda^* = -b dx + a dy$, $\bar{\lambda} = \bar{a} dx + \bar{b} dy$). R 上 2 乗可積分な(複素)微分の全体 $\Lambda = \Lambda(R)$ は, 内積 $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \operatorname{Re} \iint_R \lambda_1 \wedge \bar{\lambda}_2^* = \operatorname{Re} \iint_R (a_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2) dx dy$, $\lambda_j = a_j dx + b_j dy, j=1, 2$ により, 2 次元 Hilbert 空間となる。 $\Lambda_h := \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda: \text{調和, i.e., } \lambda \text{ は局所的に } \lambda = du, u: \text{調和とかけられる}\}$, $\Lambda_{hse} := \{\lambda \in \Lambda_h \mid \lambda \text{ は半完全, i.e., 任意の分離 cycle } d \text{ により } \int_d \lambda = 0\}$, $\Lambda_{e;0}^{(1)} := \{\lambda \in \Lambda \mid \exists f \in C^2(R), \exists f_n \in C_0^\infty(R), \lambda = df \text{ かつ } \|df - df_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ 。

定義 1. $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^g \in$, 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を通る直線 L_j の族とする。 Λ_{hse} の(閉)部分空間 $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ が次の性質をみたすと

き, Λ_0 に $\mathcal{L}$ に隣接する 等動空間 と言う: (i) $\Lambda_K = \Lambda_0 \oplus i\Lambda_0^*$ (直和),
 (ii) $\forall \lambda \in \Lambda_0, \int_{A_j} \lambda \equiv \int_{B_j} \lambda \equiv 0 \pmod{L_j}, j=1,2,\dots,g$. [以下原点を通る直線と単に直線と言う. また直線 L と, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して, $z_1 - z_2 \in L$ と $z_1 \equiv z_2 \pmod{L}$ と書き表わす]

注意. 「上の定義の $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^g$ において, 順序は重要である. たとえば $g=2$ とし, $L_1 \neq L_2$ とするならば, $\{L_1, L_2\}$ に隣接する等動空間と $\{L'_1, L'_2\}$ ($L'_1 = L_2, L'_2 = L_1$) に隣接する等動空間とは異なる」

定義 2. 「 ∂R の近傍 (i.e. ある compact 集合の外部) で定義された C^1 級微分 φ が Λ_0 -等動 とは, $\exists \lambda_0 \in \Lambda_0, \exists \lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}^{(1)}, \varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ near ∂R とかけることである」

定義 3. 「2 つの等動空間 $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ と $\Lambda'_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L}')$ ($\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^g, \mathcal{L}' = \{L'_j\}_{j=1}^g$) は条件 $\langle \lambda_0, i\overline{\lambda'_0}^* \rangle = 0, \forall (\lambda_0, \lambda'_0) \in \Lambda_0 \times \Lambda'_0$ をみたすとき, [実軸 $\mathbb{R}$ に関して] 互いに 双対的 であるという」

命題 1. 「 $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L}), \mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^g$ が 1 つの等動空間であるならば, Λ_0 の双対等動空間はつねに唯一つ存在して, それは $\Lambda'_0 := \overline{\Lambda_0} = \{\lambda \in \Lambda_{hse} \mid \overline{\lambda} \in \Lambda_0\}$ で与えられる. 従って Λ'_0 は $\mathcal{L}' = \{\overline{L_j}\}_{j=1}^g, \overline{L_j} = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in L_j\}$ に隣接する. (定義 3 では, 必然的に, $L'_j = \overline{L_j}$)」

R 上の, 実調和測度 の空間を Γ_{hm} とかき, また $\Gamma_{hse} := \{\lambda \in \Lambda_{hse} \mid \lambda: val\}$ とおく ([1], [8] 参照). このとき,

命題 2. 「 $\Lambda_K = \Gamma_{hm} + i\Gamma_{hse}$ とおくと, Λ_K は直線族 $\mathcal{L} := \{i\mathbb{R}\}$ ($i\mathbb{R}$ は虚軸を表わす) に隣接する等動空間である. Λ_K は自分自

身に双射的である」

Λ_0 -挙動をもつ R 上の有理型微分は、半完全標準微分とよばれ、とくに重要である ([6], [8], [9]).

定義 4. 「 $2R$ の近傍で定義された (2 乗可積分とは限らない) 解析的微分 φ で、 $\int_{2R} \varphi = 0$ ^{*}かつ定義域に含まれる A_j, B_j に対し $\int_{A_j} \varphi \equiv \int_{B_j} \varphi \equiv 0 \pmod{L_j}$ とみたすものの全体 $\mathcal{A}_2(2R)$ は、実 vector 空間をなす。ただし、 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_2(2R)$ は、 $2R$ のある近傍 U 上で $\varphi = \psi$ となるとき同一視する。同じ約束を適用すれば、 $\mathcal{A}_{10} := \{\lambda \in \mathcal{A}_2(2R) \mid \lambda \text{ は } \Lambda_0\text{-挙動をもつ}\}$ は $\mathcal{A}_2(2R)$ の部分空間である。商空間 $\mathcal{A}_2(2R)/\mathcal{A}_{10}$ の元を (I) Λ_0 -特異性とよぶ。 R 上の解析的微分 φ が (I) Λ_0 -特異性 σ をもつとは、 $2R$ の近くで、 $\varphi = ds + \lambda_0 + \lambda_{e0}$, $ds \in \sigma$, $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}^{(1)}$ とかけるとき、すなわち φ が類 σ を法として Λ_0 -挙動をもつときをいう。以下では、しばしば代表元 ds も類 σ と同じ記号でかく」

R 上いたるとする正則でかつ Λ_0 -挙動をもつ微分は、上の意味でも特異性をもたず、古典論における (泡閉面上の) 第 1 種 Abelian 微分に相当する。

定義 5. 「 R 上正則な、 Λ_0 -挙動をもつ微分を 第 1 種 Λ_0 -Abel 微分とよぶ、(I) Λ_0 -特異性 σ をもつ (R 上正則な) 微分は、 σ が半完

^{*} I を $2R$ の恒等分割とすると、任意の (I) 分離 cycle d に対し $\int_d \varphi = 0$ の成り立つことを意味する。

全 $((Q)\text{semiexact}, Q \text{ は標準分割})$ であるか否かに従って第2種又は第3種の Λ_0 -Abel 微分とよぶ. これらを総称して Λ_0 -Abel 微分 とよぶ.

命題3. $\Gamma_0 = \Lambda_0(R, L)$ を任意の孝節空間とし, 直線族 $L = \{L_j\}_{j=1}^g$ は複素数列 $\{\xi_j\}_{j=1}^g$ によつて定まるものとする: $L_j = \{z = t\xi_j \mid t \in \mathbb{R}\}$. このとき R 上の第1種 Λ_0 -Abel 微分 $d\Omega_{A_j}, d\Omega_{B_j}, j=1, 2, \dots, g$ で,

$$\int_{A_k} d\Omega_{A_j} \equiv \int_{B_k} d\Omega_{B_j} \equiv 0, \int_{B_k} d\Omega_{A_j} \equiv -\int_{A_k} d\Omega_{B_j} \equiv -2\pi i / \xi_j \pmod{L_k},$$
 $k=1, 2, \dots, g$ をみたすものが unique に存在する. これらの $d\Omega_{A_j}, d\Omega_{B_j}$ は $\{\xi_j\}_{j=1}^g$ に関する, 第1種 Λ_0 -Abel 微分の基底である.

命題4. 「任意に与えられた (I) Λ_0 -特異性 σ に対して, ちょうど σ を (I) Λ_0 -特異性として持つような, R 上の (第2種又は第3種) Λ_0 -Abel 微分 ψ_σ が存在する. ψ_σ は次の意味で正規化すれば唯一つである: $\int_{A_j} \psi_\sigma \equiv \int_{B_j} \psi_\sigma \equiv 0 \pmod{L_j}, j=1, 2, \dots, g$ 」

命題5. $\Gamma_0 = \Lambda_0(R, L)$ を1つの孝節空間, $\Lambda'_0 (= \Gamma'_0)$ をその双対孝節空間とする. $\psi' = d\Omega'$ が第1種又は第2種の Λ'_0 -Abel 微分, ψ が任意種の Λ_0 -Abel 微分であれば, (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im} \int_{\partial R_n} \Omega' \psi$ はつねに (有限確定値で) 存在する. (ii) ψ の (I) Λ_0 -特異性 σ とすれば,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im} \int_{\partial R_n} \Omega' \sigma$ は σ の代表元のとり方によらず定まり, かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im} \int_{\partial R_n} \Omega' \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im} \int_{\partial R_n} \Omega' \psi$$

* Ω' は ψ' の, $R' = R - \bigcup_{j=1}^g (A_j \cup B_j)$ 上での1価な積分を表わす. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im} \int_{\partial R_n} \Omega' \psi$ は Ω' の分枝のとり方にもよらない.

定義 6. 「 $\varphi' = d\psi$, ψ は上にのべられたものとする. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial R_n} \psi' \psi \right]$ を $\operatorname{Res}_{\partial R} \psi' \psi$ とかい, これを微分 $\psi' \psi$ (厳密な意味では微分ではない) の ∂R における 一般化された]留数 とよぶ. $\operatorname{Res}_{\partial R} \psi' \sigma$ についても同様」

命題 6. 「 $\varphi' = d\psi$, ψ は命題 5 と同様とするば, 次の Riemann の周期関係式が成り立つ:

$$\operatorname{Res}_{\partial R} \psi' \sigma = \operatorname{Res}_{\partial R} \psi' \psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^g \left(\int_{A_j} \varphi' \int_{B_j} \psi - \int_{B_j} \varphi' \int_{A_j} \psi \right) \quad (\text{有限和})$$

上に考えた一般の開 Riemann 面 R とは別に, 任意に, 種数 1 の開 Riemann 面 $\mathcal{T}$ を考える. $\mathcal{T}$ の 1 つの標準 homology 基底 $\{C_0, C_1\}$ とする. この基底に関する $\mathcal{T}$ の第 1 種正規積分 E_0, E_1 とする:

$$\int_{C_0} dE_0 = 1, \quad \int_{C_1} dE_0 = \tau, \quad \operatorname{Im} \tau > 0. \quad \text{このとき } \forall \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ に対し}$$

$E = \lambda E_0$ は $\mathcal{T}$ 上の一般の第 1 種積分を与え, かつ $E^{-1} = \rho$ とおくと, ρ は $\mathcal{T}$ の普通被覆写像 $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{T}$ と与える. $\lambda = \pi_0, \lambda\tau = \pi_1$ と書きなおして, さらに一般性を失うことなく, 「 C_0, C_1 は $\mathcal{T} - C_0 \cup C_1$ が E の 1 つの分枝によって平行四辺形 $(0, \pi_0, \pi_0 + \pi_1, \pi_1)$ に写しれるようにとられている」としてよい. 我々は, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\pi_0, \pi_1)$ と表示する. (このように書くとき, 標準 homology 基底 $\{C_0, C_1\}$ も指定されたとあると考えることに注意.) $\gamma_0: z \mapsto z + \pi_0, \quad \gamma_1: z \mapsto z + \pi_1$ で生成される $\mathbb{C}$ の

平行移動群 Π によ, $\mathbb{C} / \Pi \cong \mathbb{C} / \pi$ (双正則) である. 我々は格子点の集合 $\{z = m\pi_0 + n\pi_1 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ もまた Π とかくことにする.

命題 7. 「 π_0, π_1 によ, $\mathbb{C}$ 内の直線を L_0, L_1 とする: $L_k = \{z = t\pi_k \mid t \in \mathbb{R}\}$. 任意の写像 $\varepsilon: \{1, 2, \dots, g\} \rightarrow \{0, 1\}$ に, 族 $\mathcal{L}_\varepsilon = \{L_{\varepsilon(j)}\}_{j=1}^g$ が対応するが, $\mathcal{L}_\varepsilon$ に隣接する孝動空間およびその双対孝動空間が Π に存在する ([10] 参照). これを Π に属する ε -許容な孝動空間 とする. (定義 1 のあとの注意によ, ε が異なれば, ε -許容な孝動空間は互いにことなる)」

定義 7. 「 Π を孝動空間とし, Π を格子とする. (I) Π の特異性 σ が Π と両立する というのは, $\int_d \sigma \equiv 0 \pmod{\Pi}$ が任意の分離曲線 d に対して成り立つときをいう」

$\mathcal{T}$ の 1 次元 (整係数) homology 群を $H_1(\mathcal{T})$ で示す. また R の, $2R$ を法とした 1 次元 homology 群を $H_1^*(R)$ で示す. 一般に cycle X の属する homology 類を $[X]$ で示すことにすれば, 任意の準同型 $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{T})$ は上に定められた $\{A_j, B_j\}_{j=1}^g, \{C_0, C_1\}$ によ, $\mathbb{Z}$

$$(*) \quad \begin{cases} \eta([A_j]) = m_{j0}[C_0] + m_{j1}[C_1] \\ \eta([B_j]) = n_{j0}[C_0] + n_{j1}[C_1], \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, g$$

とかける. $m_{jk}, n_{jk} \in \mathbb{Z}$.

定義 8. 「準同型 $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{T})$ が, [標準 homology 基底の組

($\{A_j, B_j\}_{j=1}^g, \{C_0, C_1\}$) に関し 2] 有限型 であるとは, η が (*) で表現されることができたとする $\sum_{j=1}^g (m_j^2 + n_j^2)(m_{j+1}^2 + n_{j+1}^2) < \infty$ が満たされることをいう。

命題 8. 「準同型 $H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{P})$ が有限型ならば, 適当な写像 $\varepsilon: \{1, 2, \dots, g\} \rightarrow \{0, 1\}$ が存在して, $\varepsilon^*(y_j) = 1 - \varepsilon(y_j)$ とすると

$$(**) \quad \begin{cases} \eta([A_j]) = m_j [C_{\varepsilon(y_j)}] + m_j^* [C_{\varepsilon^*(y_j)}] \\ \eta([B_j]) = n_j [C_{\varepsilon(y_j)}] + n_j^* [C_{\varepsilon^*(y_j)}], \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, g,$$

とあらわされる。ここで $m_j, m_j^*, n_j, n_j^* \in \mathbb{Z}$, かつ $m_j^* = n_j^* = 0$ が有限個を除くすべての j について成り立つ。

一般に, 連続写像 $g: R \rightarrow \mathcal{P}$ によつて与えられる準同型 $H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{P})$ を f_* で表わすことにする。

定理 (Atel の定理の拡張). 「(*) で表現された有限型の準同型 $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{P})$ が与えられたとする。また Λ_0 は π に属する ε -許容な任意の等動空間とし, σ は π と両立する (I) Λ_0 -特異性とする。このとき, 解析写像 $f: R \rightarrow \mathcal{P}$ で, $d(f^*f)$ が σ を特異性としかつ $f_* = \eta$ となるものが存在するたのには, 次式をみたす R 上の第 1 種 Λ_0 -Atel 微分 ψ_0 の存在することが必要十分である:

$$\begin{cases} \int_{\Lambda_0} \psi_0 = -\pi_{\varepsilon(y_j)} \operatorname{Res}_{\partial R} \Phi'_{A_j} \sigma + m_j \pi_{\varepsilon(y_j)} + m_j^* \pi_{\varepsilon^*(y_j)} \\ \int_{B_j} \psi_0 = -\pi_{\varepsilon(y_j)} \operatorname{Res}_{\partial R} \Phi'_{B_j} \sigma + n_j \pi_{\varepsilon(y_j)} + n_j^* \pi_{\varepsilon^*(y_j)} \end{cases}, \quad j=1, 2, \dots, g.$$

== で, $d\Phi'_{A_j}, d\Phi'_{B_j}$ は $\left\{ \frac{2\pi i}{\pi \varepsilon_{ij}} \right\}_{j=1}^g$ に関する, 第1種 Λ_0' -Abel 微分の基底である (Λ_0' は Λ_0 の双対等動空間)。

命題1~8が全体として2.2の定理の証明を形成するが, 詳細は略する。[18]を参照されたい。

2. 測地的平行截線写像

以下 R の種数 g は正でかつ有限とする。このときには, 任意の準同型 $H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{T})$ は有限型である。

命題9. 「与えられた torus $\mathcal{T}$ に対し, R が $\mathcal{T}$ 上の有限葉被覆面として実現することは, 1つもできるとは限らない」

R としていわゆる有限型の Riemann 面を考える。すなわち, 閉 Riemann 面 R_0 とその上の有限個の(異なる)点 $p_1, \dots, p_N$ に対し, $R = R_0 - \{p_1, \dots, p_N\}$ とおく ($N \geq 1$)。 R が $\mathcal{T}$ に有限葉に覆う被覆面として実現されるのは, R_0 が $\mathcal{T}$ 上(有限葉)の被覆面として実現されることと同値である。古典論によつて (Krazer [5] 参照), 任意の R_0 が与えられた $\mathcal{T}$ (の上)への解析写像を許す訳ではないから命題9がなりたつ。

命題9は §1 の Abel の定理からわかる。本文中述べた Poincaré の定理および後述する定理4も参照。

次の命題は Behnke-Stern の定理の直接的帰結である:

命題10. 「任意の torus T と任意の準同型 $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(T)$ に対し、解析写像 $f: R \rightarrow T$ で $f_* = \eta$ とみたすものが存在する」

この結果は $g = \infty$ でも正しい。しかし f の境界挙動を制限すれば ($g < \infty$ でも) $f_* = \eta$ とする解析的な $f: R \rightarrow T$ があるとは限らない (定理4)。

定義9. 「torus T の標準 homology 基底 $\{C_0, C_1\}$ とし、この基底に関する T の正規微分により定められる曲率0の Riemann 計量について、 C_0 は測地線であるとする。解析写像 $f: R \rightarrow T$ による R の、被覆面としての像 $f(R)$ の相対境界の成分 $[$ の T への射影 $]$ がすべて (上にのべた計量で測ったとき) C_0 に測地的平行であるとき、 f は $\{C_0, C_1\}$ に関する 測地的平行截線写像 とよぶ。 $\{C_0, C_1\}$ により $T = T(1, \tau)$ である場合には、 $f: R \rightarrow T(1, \tau)$ が測地的平行截線写像であるともいう (p.8 参照)」

上の命題9 において考えられる Riemann 面の例により、次のこともわかる。

命題11. 「torus $T = T(1, \tau)$ (と準同型 $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(T)$) を任意に与えるとき、($f_* = \eta$ とみたす) 有限葉測地的平行截線写像がつかねにあるとは限らない」

与えられた Riemann 面 R から与えられた torus T への、(有限葉もしくは無限葉の) 測地的平行截線写像の存在条件をしらべるための準備として、

補題 1. 「 R は種数 $g (< \infty)$ の任意の開 Riemann 面, $\varphi \in R$ 上の第 1 種半完全標準微分 (亦第 1 種 1_k -Abel 微分) とする. このとき φ の零点の個数は (重複度も含めて数えて) $2g-2$ を満たす.」
これは閉面上の, よく知られた結果の一般化である. 証明は所謂 Hurwitz の定理を用いて与えられる.

そこで, $\varphi = d\omega$ を R 上の第 1 種半完全標準微分とする. R の標準 homology 基底 $\{A_j, B_j\}_{j=1}^g$ を, すべての cycles が解析的で, 唯一つの点 O で交わり, 他には交点をもたないようにと, 選ぶ. さらに φ の零点のまわりには小さな円を描きそれを K_i とする. φ の零点は前補題によ, 有限個しかない. いま n 個ある, とする. 各 K_i ($i=1, 2, \dots, n$) 上の 1 点と O とを, 互いに交わらずまた A_j, B_j と交わらぬような解析的曲線 γ_i で結ぶ. $R'' = R - \bigcup_{j=1}^g (A_j \cup B_j) - \bigcup_{i=1}^n (K_i \cup \gamma_i)$ とおくと, R'' は planar な Riemann 面である. ω は R'' の上で 1 価正則となる. $S'' = \omega(R'')$ は $\mathbb{C}$ 上の不分岐な被覆面と考えられる. $\omega(R'')$ の境界のうち, R の理想境界に対応しない部分は, 閉曲線 $C' = \sum_{j=1}^g (A_j^+ + B_j^+ + A_j^- + B_j^-) + \sum_{i=1}^n (\gamma_i^+ - \gamma_i^-)$ の ω による像である. ここで一般に曲線 γ の左側を γ^+ , 右側を γ^- で示した.

次の補題は Koebe-Courant の補題の拡張を与える:

補題 2. 「 w -平面 $\mathbb{C}$ の被覆面 $S'' = \omega(R'')$ 上の 2 葉可積分な C' 級函数 λ で $\omega(C')$ 上 $\lambda = 0$ となるものは,

$$\iint_{S''} \frac{\partial A}{\partial \bar{v}} du dv = 0, \quad w = u + iv$$

をみたす。

この補題は、 $\lambda \circ \omega$ が R'' 上では C^1 級で、 $R - R''$ 上では $= 0$ となる R 上の連続函数 λ , $\|d\lambda\|_R < \infty$ に拡張されることを用いれば、古典的な場合と同様に示される ([8] [9] を参照)。

定理 1. Torus T は測地線による標準 homology 基底 $\{C_0, C_1\}$ によつて $T = T(1, T)$ であるとする。解析写像 $f: R \rightarrow T$ は $d(p \circ f)$ が第 1 種 n/n_k -Abel 微分である (i.e. $n \cdot d(p \circ f)$ が R 上正則な半完全標準微分である) とするならば、 f は測地的平行軌線写像である。 $f(R)$ は T 上ほとんどいたるところ K 葉である一軌線の射影の全面積は 0 である。ここで K は f_* によつて定まる定数。

証明の方針のみのべる。 $C = \sum_{j=1}^g (A_j^+ + B_j^+ + A_j^- + B_j^-)$, $R' = R - \bigcup_{j=1}^g (A_j \cup B_j)$ とおく。 R' は単葉型の Riemann 面であり、 ω はその上で 1 価正則。 $S' = \pi(R')$ は $\mathbb{C}$ 上分岐した被覆面である。 C は区分的に解析的な閉曲線であり、 $\widehat{\mathbb{C}} - \pi(C)$ は有限個の成分 $S_1, \dots, S_N$ に分かれる (ω は $\overline{R'}$ 上で定義され、従つて $\pi(C)$ は確定する)。閉曲線 $\pi(C)$ の S_k に関する回転数 $\pm g_k$ とするとき、偏角の原理を用いて、 ω は S_k に属する $\gamma \in R'$ 上では高々 g_k 回しかとらなことをいわれる。また各成分 S_k が $g_k - 1$ 以下の被覆葉数をもつ点の集合の π に関する合併は、2次元測度 0 であることをいわれる。さらに補題

2 によ, 2, 2重(R')-重(C) の各連結成分は, すべて実軸に平行な線分よりなることもわかる. 補題 1 に注意すれば, 面 R を R' を用いて compact continuation することが出来る ([12] 参照). この continuation を R^* とかく. 面 R^* は $R^* = \bigcup_{j=1}^g (A_j \cup B_j)$ 上で連続であることは明らかである. $p \circ \pi = f$ であるから, f は R^* から $\mathcal{P}$ (の上) への連続写像である. (R 上では解析的). 従って Hopf [3], 定理 III_a によ, 2, f が $R^* \in \mathcal{P}$ 上 K 葉の被覆面として実現していることがわかる. 但し K は, $f_*(A_j) = m_{j0}[C_0] + m_{j1}[C_1]$, $f_*(B_j) = n_{j0}[C_0] + n_{j1}[C_1]$ とかくとき, $K = \sum_{j=1}^g (m_{j0}n_{j1} - m_{j1}n_{j0})$ で与えられる整数. ($K > 0$ であることは拡張された Riemann の周期不変式からわかる.) 故に f によ, 2 面 R は $\mathcal{P}$ 上ほとんどいたるところ ($\mathcal{P}$ 上総面積 0 の截線集合を除いて) K 葉の被覆面として実現していることがわかった.

注意 1. 「上の議論は φ が R 上に (有限個の) 極をもつときにも平行に適用出来る. 定理 7 を参照」

注意 2. 「平面領域の場合と同様に, 截線 (の射影) の全面積が正となるような torus (の被覆面) は存在することがわかる. 従って上の定理 1 で推えた f は極値的である. あるいは平面領域の場合における極値的平行截線写像の拡張にな, 2 である. 定理 5 および定理 8 を参照.

定理1の証明に用いた議論から, 次の結果もわかる。(i)は Haupt-Wiringer の定理 (Haupt [3]; [2] も参照) の拡張と与える

定理2. 「 R を種数 g が1より大きい開 Riemann 面とする. $\tau \in \mathbb{C}$ とし, (i) R 上の任意の標準 homology 基底に関して, $(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{g-1}; \tau, \underbrace{0, \dots, 0}_{g-1})$, $\text{Im} \tau > 0$ の形の周期をもつ第1種半完全標準微分は存在しえない. (ii) f が R からある torus T への解析写像で $d(p^*f)$ が第1種 $i\mathbb{A}_K$ -Abel 微分 ($\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$) となるものとする. f のひきおこす homology 群の準同型が $f_*([A_j]) = m_{j0}[C_0] + m_{j1}[C_1]$, $f_*([B_j]) = n_{j0}[C_0] + n_{j1}[C_1]$, $j=1, 2, \dots, g$ とかいたとすれば, $f(R)$ の被覆葉数は $K = \sum_{j=1}^g (m_{j0}n_{j1} - m_{j1}n_{j0})$ であり, τ と ξ は $K > 0$ である. $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ なら $d_1 = \text{G.C.M. } \{m_{jk}\}_{\substack{1 \leq j \leq g \\ k=0,1}}, d_2 = \text{G.C.M. } \{n_{jk}\}_{\substack{1 \leq j \leq g \\ k=0,1}}$

次の定理は Poincaré の定理の拡張である.

定理3. 「 $\tau = \tau(1, \tau)$ とする. R の種数 g が1より大きいければ, 次の2つは同値である.

(1) 解析写像 $f: R \rightarrow T$ で $d(p^*f)$ が第1種 $i\mathbb{A}_K$ -Abel 微分となる (i.e. $id(p^*f)$ が第1種半完全標準微分となる) ものが存在する.

(2) R の, 適当に選ばれた標準 homology 基底 (mod $2R$) に関する

Virtanen-Kusunoki-Sainouchi の意味での周期行列 (Kusunoki [7], [8]; Sainouchi [15]) が

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & \frac{a+b\tau}{K_1} & \frac{1}{K_2} & 0, \dots, 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & \underbrace{\quad\quad\quad}_g & & \end{bmatrix} *$$

の形である. $\therefore K_1, K_2 \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$, $K_2 | K_1$; $a, b \in \mathbb{Z}$

[証明]. (2) $\Rightarrow$ (1) はほとんど明らか. §1. Abel の定理による. (1) $\Rightarrow$ (2) もまた Abel の定理を用い, 次は R の標準 homology 基底 (mod R) ととりかえることにより, 得られる. 詳細は略するが, 古典的な theta 函数論における変換の理論を適用したことに相当することと注意しておく. Krazer [5], Siegel [19] などと参照. 定理 2 も必要である. また種数 K_1, K_2 ; a, b は f_* にのみよる. (条件 (2) の $*$ は $(g-1) \times g$ 行列でその第 1 列 vector は定数からなることもわかる ([7]).)

定理 1, 3 から容易に,

定理 4. 「種数 $g \geq 2$ の開 Riemann 面 R の [適当な標準 homology 基底 (mod R) に關する] Virtanen-Kusunoki-Sainouchi の周期行列が」

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & \frac{a+b\tau}{K_1} & \frac{1}{K_2} & 0, \dots, 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ & & & \underbrace{\quad\quad\quad}_g & & \end{bmatrix} *, \quad \begin{array}{l} K_1, K_2 \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}, \\ K_2 | K_1, \\ a, b \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

命題11(定理4も参照)によつて, 一般に, 与えられた $R, \pi(1, \tau)$ の間には指定された準同型 $H_1^*(R) \rightarrow H_1(\pi(1, \tau))$ とおきおける有限葉測地的平行截線写像は存在し, しかし R 上に任意に1点 p_0 を指定して $R_{p_0} = R - \{p_0\}$ とおくとき, 次の定理がなりたつ.

定理7. 「 R は種数 g ($1 \leq g < \infty$) の任意の開 Riemann 面, $p_0 \in R$, $\pi = \pi(1, \tau)$ は torus とする. 任意に与えられた準同型 $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(\pi)$ に対し, 測地的平行截線写像 $f_{p_0}: R_{p_0} \rightarrow \pi$ で $(f_{p_0})_* = \eta$ となるものがつねに存在する. p_0 の位数が高々 $2g$ の極をとるようにとれる. また p_0 の任意の近傍 U に対し, $f_{p_0}(R-U)$ は π 上有限葉の被覆面である」

証明には §1. Abel の定理を使う. 点 p_0 の位置を具体的に表して, 線型方程式系を解く問題に帰着する. とくに p_0 が R の non-Weierstrass 点であれば(そのような点は R 上稠密; Mori [12] 参照), $2g$ は g でおきかえられることもわかる.

注意. 「 $f(\pi)$ は勿論 π と無限葉に被覆する. 正確な被覆状況は直接に, あるいは Ahlfors の被覆面の理論より分る (Ohtsuka [13] 参照). 写像 f_{p_0} は R_{p_0} の分離 cycles と π 上 0 に homologous なる cycles に写すことを注意しておく. R が有限面ならば, この点に関してもっと精密な議論が可能である(定義7参照)」

最後に、定理 1 又は 7 の測地的平行截線写像の極値性に関する de Possel 型の定理をのべる:

定理 8. 「 R は種数 $g(<\infty)$ の閉 Riemann 面, $\mathcal{T}$ は torus とする.

(i) R 上に測地的平行截線写像 f_0 があるとする. $\mathcal{M}_{f_0} = \{f: R \rightarrow \mathcal{T}$

$f_* = (f_0)_*$, $\|d(\vec{p} \circ f)\|_R < \infty\}$ とおくとき, f_0 が有限葉ならば,

$\mathcal{M}_{f_0} \neq \emptyset$ であって, f_0 は $\mathcal{M}_{f_0}$ の汎函数 $I(f) = \text{Im} \int_{\vec{p}(R)} \vec{p}^{-1} d\vec{p}^{-1}$ に

最大にする唯一の写像である. 極値は 0 である.

(ii) $p_0 \in R$ と $\eta: H_1^*(R) \rightarrow H_1(\mathcal{T})$ を与えられた準同型とする.

f_{p_0} は定理 7 の f_0 とし, 点 p_0 の $\vec{p} \circ f_{p_0} = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{z^n} + \text{regular terms}$ と

する ($N \geq 2g$ とし). $\mathcal{N}_\eta = \{f: R_{p_0} \rightarrow \mathcal{T}, f_* = \eta, p_0 \circ \vec{p} \circ f = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \text{Im} \int_{\vec{p}(R)} \vec{p}^{-1} d\vec{p}^{-1} \geq 0\}$ とおくとき $\mathcal{N}_\eta \neq \emptyset$ であり, f_{p_0}

は $\mathcal{N}_\eta$ の中で汎函数 $J(f) = \text{Re} \sum_{n=1}^N n a_n b_n$ に最小にする唯一の

写像である.

証明には, (i) では $\|d(\vec{p} \circ f) - d(\vec{p} \circ f_0)\|$ を, (ii) では $\|d(\vec{p} \circ f) -$

$d(\vec{p} \circ f_{p_0})\|$ を考えればよい. Kusunoki [6], [8] と類似の方法によ

るが, (実部ではなく) 微分 $d(\vec{p} \circ f)$, $d(\vec{p} \circ f_0)$ etc. 自身を用いて計算する必要がある ([17] 参照).

なお, 上の定理における明確に断わってはいないが, $f:$

$R \rightarrow \mathcal{T}$ は勿論解析的であるとす. また $f(R)$ は 1 つものように,

$\mathcal{T}$ 上に拡がり被覆面と考える.

引用文献

- [1] Ahlfors, L. & Sario, L. : Riemann surfaces. Princeton Univ. Press. 1960. 382pp.
- [2] Gerstenhaber, M. : On a theorem of Haupt and Wirtinger concerning the periods of a differential of the first kind, and a related topological theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 476-481.
- [3] Haupt, O. : Ein Satz über die Abelsche Integrale 1. Gattung. Math. Z., 6(1920), 219-237.
- [4] Hopf, H. : Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen. J. Reine Angew. Math., 165(1931), 225-236.
- [5] Krazer, A. : Lehrbuch der Thetafunktionen. Teubner. 1903. 509pp.
- [6] Kusunoki, Y. : Theory of Abelian integrals and its applications to conformal mappings. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math., 32(1959), 235-258.
- [7] ----- : Square integrable normal differentials on Riemann surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 59-69.
- [8] ----- : Theory of functions - Riemann surfaces and conformal mappings. (in Japanese). Asakura. 1973. 408pp.
- [9] Kusunoki, Y. & Ota, M. : On parallel slit mappings of planar Riemann surfaces. Mem. Konan Univ., Sci. Ser., 17(1974), 31-37. Supplements. Ibid. 18(1975), 31-39.
- [10] Matsui, K. : Convergence theorems of Abelian differentials with applications to conformal mappings. I. J. Math. Kyoto Univ., 15(1975), 73-100; II. Ibid 17(1977), 345-374.
- [11] Mizumoto, H. : Theory of Abelian differentials and relative extremal length with applications to extremal slit mappings. Jap. J. Math., 37(1968), 1-58.
- [12] Mori, M. : Canonical conformal mappings of open Riemann surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 169-192.
- [13] Ohtsuka, M. : On the behavior of an analytic function about an isolated boundary point. Nagoya Math. J., 4(1952), 103-108.
- [14] Rodin, B. : Extremal length of weak homology classes on Riemann surfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 15(1964), 369-372.

- [15] Sainouchi, Y. : On the analytic semiexact differentials on an open Riemann surface. J. Math. Kyoto Univ., 2(1963), 277-293.
- [16] ----- : On the meromorphic differentials with an infinite number of polar singularities on open Riemann surfaces. Ibid. 14(1974), 499-532.
- [17] Shiba, M.: Some general properties of behavior spaces of harmonic semiexact differentials on an open Riemann surface. Hiroshima Math. J., 8(1978), 151-164.
- [18] ----- : Abel's theorem for analytic mappings of an open Riemann surfaces of genus one. J. Math. Kyoto Univ., 18(1978).
- [19] Siegel, C. L. : Topics in complex function theory, vol. 2. Wiley-Interscience. 1971. 193pp.
- [20] Suita, N. : The modern theory of functions -theory of conformal mappings. (in Japanese). Morikita. 1977. 196pp.
- [21] Watanabe, O. : Theory of meromorphic differentials with infinitely many poles on open Riemann surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 165-197.
- [22] Yoshida, M. : The method of orthogonal decomposition for differentials on open Riemann surfaces. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 8(1968), 181-210.