

Decomposable operator が Spectral operator になる条件

東北薬科大学 棚橋浩太郎

Spectral operator の 1 つの自然な拡張として, decomposable operator がある。逆に, decomposable operator がいつ spectral operator になるかについて, Wadhwa [5] が, Hilbert space 上で, 条件 (I) をもてばよいことを示した。また, それとは別に, Jaffarian [2] が reductive quasidecomposable operator は spectral になることを示した。更に, この結果を拡張したものに, Wadhwa [6] がある。ここでは これらの結果をまとめて述べよう。考えている空間は complex Hilbert space H である。

§1 準備

ここでは, spectral operator, decomposable operator の定義, また証明に必要な基本的な結果をまとめておく。

Def. 1.1 $T \in B(H)$ が spectral operator とは,

$\exists E(\cdot) : \sigma$ -additive projection valued set function on Borel field

$$(i) T E(\sigma) = E(\sigma) T \quad \forall \sigma \text{ Borel set}$$

$$(ii) \sigma(T|E(\sigma)H) \subset \overline{\sigma} \quad \forall \sigma \text{ Borel set.}$$

Prop 1.2

$T \in B(H)$ spectral operator

$$\Leftrightarrow T = S + Q \quad ; \quad S \text{ is normal operator \& similar}$$

Q is quasinilpotent $\& \sigma(Q) = \{0\}$

$$SQ = QS$$

$$\Leftrightarrow T \text{ is condition (A) (B) (C) (D) satisfied.}$$

注: 上の S は $S = \int \lambda dE(\lambda)$ であり, scalar part という。

また, この分解 $S + Q$ は一意である。次に, 主定理の証明に (A) (B) (C) (D) が必要なので, 説明して置く。

Def 1.3

$T \in B(H)$ が条件 (A) をみたすとは

$$D \subset \mathbb{C} \text{ open, } f: D \rightarrow H \text{ analytic, } (\lambda - T)f(\lambda) \equiv 0 \text{ on } D$$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \text{ on } D$$

Def 1.4

$T \in B(H)$ が (A) をみたすとき, $x \in H$ に対し $(\lambda - T)^{-1}x$ は,

$$(\lambda - T)f(\lambda) \equiv x$$

をみたす analytic function であるが, 条件 (A) より上式をみたす analytic function は一意に定まる。この analytic functions の union を, $(\lambda - T)^{-1}x$ の maximal extension $\chi(\lambda)$ といひ, その定義域を $\rho_T(x)$; local resolvent set と表わす。また,

$\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$: local spectrum と定める。

注: たとえば, T normal, hyponormal, dominant, spectral,

decomposable, $\sigma(T)$ nowhere dense, $\sigma_p(T) = \emptyset$ ならば, (A) をもつ。

(A) をもたない例については。

Prop 1.5. $T \in B(H)$ が (A) をみたすとき,

$$(i) \quad \sigma_T(x) \subset \sigma(T) \quad , \quad \text{closed set} \quad \forall x \in H$$

$$(ii) \quad \sigma_T(x) = \emptyset \Leftrightarrow x = 0$$

$$(iii) \quad ST = TS \Rightarrow \sigma_T(Sx) \subset \sigma_T(x) \quad \forall x \in H$$

$$(iv) \quad \bigcup_{x \in H} \sigma_T(x) = \sigma(T)$$

Def 1.6.

$T \in B(H)$, (A) が条件 (B) をみたすとは,

$$\exists K > 0 \quad ; \quad \sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \emptyset \Rightarrow \|x\| \leq K \|x+y\|$$

Def 1.7.

$T \in B(H)$ (A) が条件 (C) をみたすとは,

$$X_T(F) \equiv \{x \in H : \sigma_T(x) \subset F\}$$

が, 任意の closed set $F \subset \mathbb{C}$ に対して, closed になる。

Def 1.8.

$T \in B(H)$, (A)(B) のとき, subset $\sigma \subset \mathbb{C}$ が $\mathcal{S}_1$ に属すとは,

$$\{x+y \in H : \sigma_T(x) \subset \sigma, \sigma_T(y) \subset \sigma'\} \text{ dense in } H$$

但し, σ' は σ の complement. $\mathbb{C} \setminus \sigma$ を表わす

ここで, $\sigma \in \mathcal{S}_1$ に対し $E(\sigma): x+y \rightarrow x$ と定めて,

Prop 1.9. $T \in B(H) \quad (A) \quad (B)$ のとき, $\sigma \in \mathcal{S}_1$ に対し

$$\exists! E(\sigma) \text{ projection} : E(\sigma)x = x \quad \text{if } \sigma_T(x) \subset \sigma$$

$$E(\sigma)x = 0 \quad \text{if } \sigma_T(x) \subset \sigma'$$

$$\|E(\sigma)\| \leq K$$

注: ここで projection は $E^2 = E$ を意味して, self-adjoint をつけくめるときは, orthogonal projection ということにする。また, T が spectral のときは,

$$X_T(F) = E(F)H \quad \forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed}$$

とな, ている。

Def 1.10.

$T \in B(H)$, $(A) \quad (B)$, $\sigma \in \mathcal{S}_1$ とするとき, σ が family $\mathcal{S}_2$ に属すとは, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in H$, $\exists x_1, x_2 \in H$

$$: \sigma_T(x_1) \subset \sigma_T(x) \cap \sigma, \quad \sigma_T(x_2) \subset \sigma_T(x) \cap \sigma'$$

$$\|x_1 + x_2 - x\| < \varepsilon$$

更に, $\sigma \in \mathcal{S}_2$ が family $\mathcal{S}$ に属すとは,

$$\exists F_n, E_n \text{ closed set } \in \mathcal{S}_2; \quad F_n \subset \sigma, \quad E_n \subset \sigma'$$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{E(F_n) + E(E_n)\}x \quad \forall x \in H.$$

注: $T \quad (A) \quad (B) \quad (C)$ のとき, $E(\cdot)$ は Boolean algebra $\mathcal{S}$ 上の σ -additive spectral measure になるわけだが, 残, ている条件(D)は, Borel set が $\mathcal{S}$ に含まれるための条件である。実は(D)は, 別の表現がされているが, ここでは次のようにしておく。

Def 1.11 $T \in B(H)$ (A) (B) (C) が条件 (D) をみたすとは、

任意の closed set は λ に属す。

次に decomposable operator とその基本的な性質を説明して置く。

Def. 1.12.

$T \in B(H)$ とする。subspace $\mathcal{Y} \subset H$ が、 T の spectral maximal space とは

$$(i) \quad T\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$$

(ii) T の invariant subspace $\mathcal{M}$ が

$$\sigma(T|_{\mathcal{M}}) \subset \sigma(T|_{\mathcal{Y}}) \Rightarrow \mathcal{M} \subset \mathcal{Y}$$

Def 1.13

$T \in B(H)$ が decomposable とは、

$\forall \{G_i\}_{i=1}^n$ finite open covering of $\sigma(T)$,

$\exists \{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n$ spectral maximal space of T : (i) $\sigma(T|_{\mathcal{Y}_i}) \subset G_i$

$$(ii) \quad H = \mathcal{Y}_1 + \cdots + \mathcal{Y}_n$$

注: (ii) の和は直和ではなく、単に和の形に表現できるということを示す。spectral operator は decomposable である。

Prop 1.14

$T \in B(H)$ (A) とする。 $X_T(F)$ が closed なら、 $X_T(F)$ は T の spectral maximal space で、 $\sigma(T|_{X_T(F)}) \subset \overline{F} \cap \sigma(T)$

Prop 1.15.

$T \in B(H)$ が decomposable なら、条件 (A), (C) をみたす。

よ, て, $X_T(F)$ は $\forall F \subset \mathbb{C}$ closed に対し spectral maximal space of T になるが, 逆に, T の任意の spectral maximal space Y は $Y = X_T(\sigma(T|_Y))$ と表わされる。

§2 本論

Def 2.1. $T \in B(H)$, (A) (C) が条件(I)をみたすとは,

$$\sigma_T(P_F x) \subset \sigma_T(x) \quad \forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed}$$

但, P_F は $X_T(F)$ への orthogonal projection

Th. 2.2.

$T \in B(H)$ decomposable で (I) をみたすなら,

$$T = N + Q \quad ; \quad N \text{ normal, } Q: \text{ quasinilpotent, } NQ = QN$$

⇔ T は spectral operator with normal scalar part.

以下, この定理を証明していく。Prop 1.15 より (A), (C) はよく知られているので, (B), (D)を示していく。

Lemma 2.3.

$T \in B(H)$ decomposable が (I) をみたすなら,

$$(B_0) \quad \sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \emptyset \Rightarrow (x, y) = 0$$

をみたす。よ, て, このとき, $\|x\| \leq \|x + y\|$

証: $\sigma_T(x) = F$, P_F を subspace $X_T(F)$ への orthogonal projection とする。条件(I)より $\sigma_T(P_F y) \subset \sigma_T(y)$ また,

$$P_F y \in X_T(F) \text{ より } \sigma_T(P_F y) \subset F$$

$$\therefore \sigma_T(Py) \subset \sigma_T(y) \cap F = \sigma_T(y) \cap \sigma_T(x) = \emptyset$$

$$\therefore Py = 0$$

$$\therefore (x, y) = (Px, y) = (x, Py) = (x, 0) = 0 \quad "$$

lemma 2.4.

$T \in B(H)$ decomposable が (I) をみたすなら.

$$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')} \quad \forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed.}$$

証: lemma 2.3 より

$$X_T(F) \perp X_T(F') \quad \therefore X_T(F) \subset X_T(F')$$

逆を示そう。 $F \subset G$ open を任意にとると $\{G, F'\}$ は $\sigma(T)$

の open covering になるから

$\exists y_1, y_2 : T$ の spectral maximal space

$$(i) \sigma(T|_{y_1}) \subset G, \sigma(T|_{y_2}) \subset F' \quad (ii) H = y_1 + y_2$$

$$\text{ここで, } \forall x \in X_T(\overline{G})^\perp \text{ を } x = x_1 + x_2, \quad x_i \in y_i$$

$$\text{と分解すると} \quad 0 = P_{\overline{G}} x = x_1 + P_{\overline{G}} x_2$$

$$\therefore \sigma_T(x_1) = \sigma_T(P_{\overline{G}} x_2) \subset \sigma_T(x_2)$$

$$\therefore \sigma_T(x) \subset \sigma_T(x_1) \cup \sigma_T(x_2) \subset \sigma_T(x_2) \subset \sigma(T|_{y_2}) \subset F'$$

$$\therefore X_T(\overline{G})^\perp \subset X_T(F') \quad \therefore X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^\perp$$

ここで $G \supset F$ は任意だから

$$X_T(F) = \bigcap_{G \supset H_{\text{open}}} X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^\perp$$

$$\therefore X_T(F) = X_T(F')^\perp \quad \therefore X_T(F)^\perp = \overline{X_T(F')}$$

$$\therefore H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')} "$$

lemma 2.5 $T \in B(H)$, decomposable, (I) は条件 (D) をみたす。

証: $F \subset \mathcal{C}$ closed を任意にとる。lemma 2.4 より

$$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')} \quad \text{なので, } F \in \mathcal{S}_1 \text{ は明らか。また,}$$

$X_T(F)$ への orthogonal projection P_F は定義から $E(F)$ に等しいので, $H_n \subset F'$ closed, $\cup H_n = F'$ となる増加列をとると

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_F + P_{H_n}) \alpha = \lim \{E(F) + E(H_n)\} \alpha$$

となり, 条件 (I) より

$$\sigma_T(E(F)\alpha) \subset F \cap \sigma_T(\alpha), \quad \sigma_T(E(H_n)\alpha) \subset H_n \cap \sigma_T(\alpha) \subset F' \cap \sigma_T(\alpha)$$

よって, $F \in \mathcal{S}_2$ また, この式から, $F \in \mathcal{S}$ であることも明らか。

T 2.2 の証明.

T が (A) (B) (C) (D) をみたすことがわかったので, Prop 2 より T は spectral operator である。よって scalar part $\int \lambda dE$ が normal になる, よって $E(\cdot)$ が self adjoint になることを示せばよい。 $F \subset \mathcal{C}$ closed として十分である。 $\alpha, \beta \in H$, lemma 2.5 のように $H_n \subset F'$ をとると

$$\begin{aligned} (E(F)\alpha, (1-E(F))\beta) &= (E(F)\alpha, E(F')\beta) \\ &= \lim (E(F)\alpha, E(H_n)\beta) \end{aligned}$$

ここで, $\sigma_T(E(F)\alpha) \subset F$, $\sigma_T(E(H_n)\beta) \subset H_n \subset F'$ 故, lemma 2.3 より $(E(F)\alpha, (1-E(F))\beta) = 0$

$$\therefore E(F)(1-E(F))^* = 0 \quad \therefore E(F) = E(F) \cdot E(F)^* //$$

A. A. Jaffarian [] は、同様の結果を *reductive quasi-decomposable operator* について成立することを示した。彼の方法は *spectral measure* を実際に作って、いたのだが、ここでは、Th. 2.2 と同様の論法で別証明する。

Def 2.6

$T \in B(H)$ が *quasidecomposable* とは、条件 (A) をみたし、

$\forall \{G_i\}_{i=1}^n$ finite open covering of $\sigma(T)$, $\exists \{F_i\}_{i=1}^n$ closed set

(i) $F_i \subset G_i$ (ii) $\sigma(T) = \cup F_i$ (iii) $X_T(F_i)$ closed

(iv) $H = \vee X_T(F_i)$

但、 $\vee X_T(F_i)$ は closed linear span of $\{X_T(F_i)\}$

注: $T \in B(H)$ が *decomposable* なら *quasi-decomposable* であることは、Prop 1.15 よりわかる。 *quasi-decomposable* であるが、*decomposable* とならない例は、Albrecht [] を参照、lemma 2.7.

$T \in B(H)$ *quasi-decomposable operator* は、(C) をみたす。

証: $X_T(F) = X_T(F \cap \sigma(T))$ だから、 $F \subset \sigma(T)$ closed のとき考えればよい。 $G \supset F$ open を任意にとると、 $\{G, F'\}$ は $\sigma(T)$ の open covering である。よって

$\exists F_1 \subset G, F_2 \subset F'$ closed

(i) $\sigma(T) = F_1 \cup F_2$, (ii) $X_T(F_i)$ closed (iii) $H = \overline{X_T(F_1) + X_T(F_2)}$

ここで、 $\sigma(T) = F_1 \cup F_2$, $F_2 \subset F'$ より $F \subset F_1$

$$\therefore X_T(F) \subset X_T(F_1)$$

$$\therefore X_T(F) \subset \bigcap_{G \supset F} X_T(F_1) \equiv \mathcal{Z}$$

逆に $\lambda \in \mathcal{Z}$ なら

$$\sigma_T(\lambda) \subset F_1 \subset G, \quad G \supset F \text{ は任意故 } \sigma_T(\lambda) \subset F$$

$$\therefore \lambda \in X_T(F) \quad \therefore X_T(F) = \mathcal{Z} \quad \text{closed} \quad //$$

Th. 2.8

$T \in B(H)$ reductive, quasidecomposable operator は spectral operator with normal scalar part.

証: lemma 2.7 より T は (C) をもつ。よ、て reductive 故 $X_T(F) \quad \forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed}$ は T の reducing subspace になる。よ、て Prop 1.5 (iii) より T は条件 (I) をもつことがわかる。

次に、 $\sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset \overline{F} \quad \forall F \subset \mathbb{C} \text{ closed}$ となることを示そう。もし、そうでないとする。

$$\exists \lambda_0 \in \sigma(T|X_T(F)^\perp) \setminus \overline{F},$$

$$\therefore \exists \varepsilon > 0, \quad G_0 \equiv \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\} \text{ とおくと } G_0 \cap \overline{F} = \emptyset$$

さて、 T は (A) をもち、 $X_T(F)^\perp$ は T の reducing subspace だから $T|X_T(F)^\perp$ も (A) をもつ。ここで、 $G_1 = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ とおくと、 $\{G_0, G_1\}$ は $\sigma(T)$ の open covering になるから、

$$\exists F_0 \subset G_0, \quad \exists F_1 \subset G_1, \quad \text{closed sets}$$

$$H = \overline{X_T(F_0) + X_T(F_1)}$$

ここで、 $X_T(F)^\perp$ への orthogonal projection を P とおくと

$$\begin{aligned} P H &= X_T(F)^\perp = \overline{P X_T(F_0) + X_T(F_1)} \subset \overline{P X_T(F_0) + P X_T(F_1)} \\ &= \overline{X_{T|X_T(F)^\perp}(F_0) + X_{T|X_T(F)^\perp}(F_1)} \end{aligned}$$

さて, $F_0 \subset G_0 \subset F$ だから, $\forall y \in X_{T|X_T(F)^\perp}(F_0)$ は

$$\sigma_T(y) = \sigma_{T|X_T(F)^\perp}(y) \in F_0 \subset F$$

$$\therefore y \in X_T(F) \cap X_T(F)^\perp \quad \therefore y = 0$$

$$\therefore X_{T|X_T(F)^\perp}(F_0) = \{0\} \quad \therefore X_T(F)^\perp = X_{T|X_T(F)^\perp}(F_1)$$

よ, て $\sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset F_1 \subset G_1$. これは $\lambda_0 \in G_1$, $\lambda_0 \in \sigma(T|X_T(F)^\perp)$ に反する. $\therefore \sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset \overline{F'}$

$$\text{次に, } H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')} \quad \forall F \subset \mathcal{C} \text{ closed}$$

を示そう. lemma 2.3 と同様にして, $X_T(F) \perp X_{F'}(F')$,

よ, て $X_T(F) \subset X_T(F')^\perp$ かわかる. また, 前に示したことから $\sigma(T|X_T(F)^\perp) \subset \overline{F'}$ $\therefore X_T(F)^\perp \subset X_T(\overline{F'})$

よ, て, $G \supset F$ open を任意にとるとこのことから,

$$X_T(\overline{G})^\perp \subset X_T(\overline{G'}) \subset X_T(F')$$

$$(\textcircled{1}) \quad F \subset G \subset \overline{G}, \therefore F' \supset G' \supset \overline{G'} \therefore \overline{G'} \subset \overline{G'} = G' \subset F'$$

$$\therefore X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^\perp \therefore X_T(F) = \bigcap_{G \supset F} X_T(\overline{G}) \supset X_T(F')^\perp$$

よ, て $X_T(F) \perp X_T(F')$ とあわせて,

$$X_T(F) = X_T(F')^\perp \therefore X_T(F)^\perp = \overline{X_T(F')}$$

以下は, T 対 2.2 の証明とま, 全く同様なので略する。

Cor. 2.9

$T \in B(H)$ が 条件 (A), (C), (I) をみたし.

$H = X_T(F) \oplus \overline{X_T(F')}$ $\forall F \subset G$ closed をみたすなら
 T は spectral operator with normal scalar part.

注: Radjabalipour [3] は, $T \in B(H)$ が (C) をもてば,
 (A) をもつことを示したので, 上の 2.9 では, 条件 (A)
 を除いてよい。また, 今まで使った decomposable の性質は,
 2-decomposable, つまり $\forall \{G_1, G_2\}$ open covering of $\sigma(T)$
 でおきかえられるが, 2-decomposable operator は decomposable
 operator であることが知られている。しかし, 2-quasi-decom-
 -posable operator が quasidecomposable operator かどうかは,
 まだ知られていない。Radjabalipour [4]。

参照

- [1] E. Albrecht, An example of a weakly decomposable
 operator which is not decomposable, Rev. Roum. Pures
 Appl. 20 (1975) 855 ~ 861
- [2] A. A. Jafarián, On reductive operators, Indiana
 Univ. Math. J. 23 (1974) 607 ~ 613
- [3] M. Radjabalipour, On subnormal operators, Trans.
 Amer. Math. Soc. 211 (1975) 377 ~ 389
- [4] —————, On equivalence of decomposable
 and 2-decomposable operators, Pac. J. Math. 77 (1978)
 243 ~ 247

- [5] B. L. Wadhwani, Decomposable and Spectral operators on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 112 ~ 114
- [6] —————, A note on reductive operators, Acta Sci. Math., 38 (1976) 187 ~ 189