

ON NONLINEAR ERGODIC THEOREMS FOR NONEXPANSIVE SEMIGROUPS IN BANACH SPACES

芝浦工業大学 厚芝 幸子 (Sachiko Atsushiba)

Department of Mathematics

Shibaura Institute of Technology

1. 序

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への nonexpansive であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときである. $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. 最初の非線形エルゴード定理は Hilbert 空間において Baillon [5] が確立した: C を Hilbert 空間 H の空でない有界閉凸部分集合とする. T を C から C への nonexpansive mapping とする. x を C の元とする. このとき, $S_n(x) = (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ は T の不動点に弱収束する. Bruck [6] は Baillon の定理 [5] を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間へ一般化した (実数パラメータの写像族に対する定理は [17, 19] を参照). また, 同じ空間において, Hirano, Kido and Takahashi [11, 12] が可換な非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を示し, さらに Lau, Shioji and Takahashi [15] は非可換な非拡大半群に対する定理を示した. 一方, Opial 条件をみたす Banach 空間はノルムに滑らかさを仮定しない空間であるが, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間で, Hirano [10] が nonexpansive mappings に対する非線形エルゴード定理を示し, Miyadera and Kobayasi [17] が実数パラメータの写像族に対する定理を示した. [1] ではこの空間において可換な非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を示した. このような流れを受けて, 最近 Kaczor, Kuczumow and Reich [14] が, 一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間より一般的な Banach 空間である, 一様凸でその共役空間が Kadec-Klee 条件をみたす Banach 空間において nonexpansive mappings に対する非線形エルゴード定理を示したし, 実数パラメータの写像族に対する定理 [13] も示された.

本研究では, 一様凸でその共役空間が Kadec-Klee 条件をみたす Banach 空間において得られた可換な非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を報告する. また, Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理と Opial

Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, weak convergence, nonlinear ergodic theorem.

条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード 定理が統一的な考えで証明されることにしても報告する.

2. 準備

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ も x_n が x に弱収束することを表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに, $\mathbb{N}$ はすべての非負の整数からなる集合を表す.

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ について $\|x + y\|/2 < 1$ が成立するときをいう. 狭義凸な Banach 空間 E では, 任意の $x, y \in E, \lambda \in (0, 1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1 - \lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば, $x = y$ となる.

$B_r = \{v \in E : \|v\| \leq r\}$ とする. Banach 空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x, y \in B_1$ かつ $\|x - y\| \leq \varepsilon$ ならば, $\|x + y\|/2 \leq 1 - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在することである. 一様凸な Banach 空間は回帰的であり, 狭義凸であることが知られている ([21] 参照). また, Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in S_E$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (1)$$

が存在するときをいう. ただし, $S_E = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする. $x \in S_E$ に対して, 極限 (1) が $y \in S_E$ に関して一様に存在するとき, Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. Banach 空間 E が Opial 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ をみたすならば

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するときをいう ([18]). 回帰的な Banach 空間においては, この条件は E の $\text{net}\{x_\alpha\}$ が $w\text{-}\lim_{\alpha} x_\alpha = x$ をみたすならば

$$\liminf_{\alpha} \|x_\alpha - x\| < \liminf_{\alpha} \|x_\alpha - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するという条件と同値である ([1] 参照). Banach 空間 E が Kadec-Klee 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ かつ $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ をみたすならば $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となることをいう.

Remark 2.1. Fréchet 微分可能なノルムをもつ回帰的な Banach 空間の共役空間は Kadec-Klee 条件をみたす ([8, 21] などを参照). また, Fréchet 微分可能なノルムももたないし, Opial 条件もみたさない一様凸な Banach 空間であるが, 共役空間が Kadec-Klee 条件をみたす一様凸な Banach 空間が存在する ([8, 18] 参照).

以後, S は単位元をもつ commutative semigroup とする. $(S, \leq)$ は binary relation が次のように定義されているとき directed system になる. 以後, この論文では S にこの binary relation が入っているものとする: $a \leq b$ であることの必要十分条件は $a + c = b$ をみたす $c \in S$ が存在することである.

C から C への写像の族 $S = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i), (ii) をみたすとき, $S = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup であるという.

- (i) $T(s+t) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;
- (ii) $\|T(s)x - T(s)y\| \leq \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in S$ に対して成立する.

$F(S)$ は $S = \{T(s) : s \in S\}$ の共通不動点, すなわち $F(S) = \bigcap_{s \in S} F(T(s))$ を表す.

以後, $B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, そのノルムは supremum-norm とする. また, X は $B(S)$ の部分空間を表す. $\mu \in X^*$ に対して, $\mu(f)$ は μ の $f \in X$ での値を表すが, $\mu(f)$ は $\mu_t(f(t))$ とかくこともある. X が 1 を含むとき, X 上の線形汎関数 μ が $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば X 上の mean という. 任意の $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $r_s f \in B(S)$ を

$$(r_s f)(t) = f(ts), \quad t \in S$$

で定義する. また r_s^* で r_s の共役作用素を表す. X は r_s -invariant であるとする, つまり $r_s(X) \subset X$ がすべての $s \in S$ に対して成り立つとする. このとき, 任意の $s \in S$ と $f \in X$ に対して $\mu(r_s f) = \mu(f)$ が成立するならば, X 上の mean μ は invariant という. $s \in S$ に対して, point evaluation δ_s を $\delta_s(f) = f(s)$ をすべての $f \in B(S)$ に対して成立させるものと定義する. point evaluations の凸結合を S 上の finite mean という. S 上の finite mean は $B(S)$ の部分空間で 1 を含む任意の部分空間 X 上の mean でもある.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $S = \{T(t) : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T(t)x : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する. X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. このとき, X 上の任意の mean μ に対して $\langle T_\mu x, y \rangle = \mu_s \langle T(s)x, y \rangle$ が任意の $y \in E^*$ に対して成立する $T_\mu : C \rightarrow C$ が考えられる ([20, 12]). また, T_μ は C から C への nonexpansive mapping になることや $x \in F(S)$ に対して $T_\mu x = x$ が成立することも知られている.

3. 補題

この節では主結果の非線形エルゴード定理の証明に使われる補題を記述する. 次の補題は Hirano, Kido and Takahashi [11] によって証明された.

Lemma 3.1. C を一様凸な Banach 空間 E の空でない有界閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. このとき, S の任意の finite

mean μ と $\varepsilon > 0$ に対してある $w_0 = w_0(\mu, \varepsilon) \in S$ が存在して,

$$\left\| \int T(h+s+w)x d\mu(s) - T(h) \left(\int T(s+w)x d\mu(s) \right) \right\| < \varepsilon$$

がすべての $h \in S, w \geq w_0$ について成立する.

Lemma 3.1 を用いることで, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理の証明で重要な役割を担う補題 [1, Lemma 3.2], [10, Lemma 2.5], [17, Lemma 3.2] および狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸集合における非線形エルゴード定理の証明で重要な役割を担う補題 [2, Lemma 3.1], [3, Lemma 3.3], [4, Lemma 3.3] と同様の証明方法で次の補題を証明できる.

Lemma 3.2. C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{\lambda_\beta : \beta \in J\}$ を S 上の finite means の net で

$$\lim_{\alpha} \|\mu_\alpha - r_t^* \mu_\alpha\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\beta} \|\lambda_\beta - r_t^* \lambda_\beta\| = 0 \quad (t \in S)$$

をみたすとする. このとき, S のある net $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{q_\beta : \beta \in J\}$ が存在して

$$\lim_{\alpha} \left\| a \int T(t+p_\alpha)x d\mu_\alpha(t) + (1-a)w_1 - w_2 \right\| = \lim_{\beta} \left\| a \int T(q_\beta+t)x d\lambda_\beta(t) + (1-a)w_1 - w_2 \right\|$$

が全ての $w_1, w_2 \in F(S)$ と $a \in [0, 1]$ に対して成立する.

Remark 3.3. Lemma 3.2 において $p_{\alpha'} \geq p_\alpha, q_{\beta'} \geq q_\beta$ をみたす S の nets $\{p_{\alpha'}\}, \{q_{\beta'}\}$ をとる. このとき,

$$\lim_{\alpha} \left\| a \int T(t+p_{\alpha'})x d\mu_\alpha(t) + (1-a)w_1 - w_2 \right\| = \lim_{\beta} \left\| a \int T(q_{\beta'}+t)x d\lambda_\beta(t) + (1-a)w_1 - w_2 \right\|$$

が全ての $w_1, w_2 \in F(S)$ と $a \in [0, 1]$ に対して成立する.

つぎの補題は Hirano, Kido and Takahahi [12] によって示された.

Lemma 3.4. C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{\lambda_\beta : \beta \in J\}$ を S 上の finite means の net で

$$\lim_{\alpha} \|\mu_\alpha - r_t^* \mu_\alpha\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\beta} \|\lambda_\beta - r_t^* \lambda_\beta\| = 0 \quad (t \in S)$$

をみたすとする. x を C の元とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $t \in S$ に対してある $\alpha_0(\varepsilon, t) \in I$ が存在し,

$$\left\| \int T(s+p)x d\mu_\alpha(s) - T(t) \left(\int T(s+p)x d\mu_\alpha(s) \right) \right\| < \varepsilon$$

がすべての $\alpha \geq \alpha_0(\varepsilon, t)$ と $p \in S$ について成立する.

Banach 空間 E の $\text{net}\{z_\alpha\}$ の weak ω -limit set を

$$\omega_w(\{z_\alpha\}) = \{z \in C : \text{w-lim}_{\beta} z_{\alpha_\beta} = z\}.$$

で定義する.

Remark 3.5. $E, C, S = \{T(t) : t \in S\}, X, \{\mu_\alpha\}$ は Lemma 3.4 と同様とする. $\{p_\alpha\}$ は S の net とする. このとき, Lemma 3.4 より, $\omega_w(\{T_{\mu_\alpha}x\}) \subset F(S), \omega_w\left(\left\{\int T(t+p_\alpha)x d\mu_\alpha\right\}\right) \subset F(S)$ が成立する.

次の補題は、本質的には Falset, Kaczor, Kuczumow and Reich [9] で示されている ([13, 14] も参照).

Lemma 3.6. E は一様凸でその共役空間 E^* が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間とする. $\{z_\alpha\}$ は E の有界な net で任意の $w_1, w_2 \in \omega_w(\{z_\alpha\})$ と $a \in [0, 1]$ に対して

$$\lim_{\alpha} \|az_\alpha + (1-a)w_1 - w_2\|$$

が存在するならば, $\omega_w(\{z_\alpha\})$ は 1 点からなる, つまり, z_α は C の元に弱収束する.

4. 非線形エルゴード定理

この節では、一様凸でその共役空間が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間における非線形エルゴード定理について記す. Lemmas 3.2, 3.4, 3.6 と Remarks 3.3, 3.5 を用いて次の補題を証明できる. この補題は主定理 (Theorem 4.2) の証明で本質となっている.

Lemma 4.1. E は一様凸でその共役空間 E^* が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ は

$$\lim_{\alpha} \|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| = 0 \quad (*)$$

が任意の $s \in S$ について成立する S 上の finite mean の net とする. x を C の元とする. $\int T(h+t)x d\mu_\alpha(t)$ は $S = \{T(t) : t \in S\}$ の共通不動点 y_0 に $h \in S$ に関して一様に弱収束する. さらに, y_0 は $(*)$ をみたす finite mean の net $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ に依存しないし, また X 上の任意の invariant mean μ に対して $y_0 = T_\mu x = \int T(t)x d\mu(t)$ が成立する.

X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であるとする. このとき, X 上の線形汎関数 $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ が次の性質をみたすとき strongly regular であるという ([12] 参照).

- (a) $\sup_{\alpha} \|\mu_{\alpha}\| < +\infty$;
- (b) $\lim_{\alpha} \mu_{\alpha}(1) = 1$;
- (c) $\lim_{\alpha} \|\mu_{\alpha} - r_s^* \mu_{\alpha}\| = 0, s \in S$.

Lemma 4.1 を用いて, [1, 4] と同様の証明で次の非線形エルゴード定理を得る ([13, 14] 参照).

Theorem 4.2. E は一様凸でその共役空間 E^* が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. $\{\lambda_{\alpha} : \alpha \in I\}$ は X 上の線形汎関数の strongly regular net とする. このとき, $\int T(h+t)x d\lambda_{\alpha}(t)$ は $S = \{T(t) : t \in S\}$ の共通不動点 y_0 に $h \in S$ に関して一様に弱収束する. y_0 は X 上の線形汎関数の strongly regular net $\{\lambda_{\alpha} : \alpha \in I\}$ に依存しないし, また X 上の任意の invariant mean μ に対して $y_0 = T_{\mu}x = \int T(t)x d\mu(t)$ が成立する. さらに, 任意の $x \in C$ に対し, $Qx = \lim_{\alpha} \int T(t)x d\lambda_{\alpha}(t)$ とおくと, この Q は C 上から $F(S)$ の上への nonexpansive mapping になり, $QT(t) = T(t)Q = Q$ がすべての $t \in S$ に対して成立し, かつ $Qx \in \overline{\text{co}}\{T(s)x : s \in S\}$ がすべての $x \in X$ に対して成立する.

Remark 4.3. 主定理 (Theorem 4.2) の証明で本質となる Lemma 4.1 の証明は, Lemmas 3.2, 3.4 を使い, [1, 4] と同様の証明である. 従って, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理と主定理 (Theorem 4.2) の証明は同様の証明となる.

次の結果が Theorem 4.2 の系として得られる.

Theorem 4.4. E, C, X と $S = \{T(t) : t \in S\}$ は Theorem 4.2 と同様とし, x を C の元とする. このとき, $\{T(t)x : t \in S\}$ が強収束するための必要十分条件は任意の $s \in S$ に対して

$$T(s+t)x - T(t)x \rightarrow 0$$

が成立することである. このとき, $\{T(t)x : t \in S\}$ の極限点は $\{T(t) : t \in S\}$ の共通不動点になる.

Remark 2.1 から, 次の結果が定理 4.2 の系になる.

Theorem 4.5. ([12]) E は Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s -invariant であり, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. $\{\lambda_{\alpha} : \alpha \in I\}$ は X 上の線形汎関数の strongly regular net とする. このとき, $\int T(h+t)x d\lambda_{\alpha}(t)$ は $S = \{T(t) : t \in S\}$ の共通不動点 y_0 に $h \in S$ に関して一様に弱収束する. y_0 は X 上の線形汎関数の strongly regular net $\{\lambda_{\alpha} : \alpha \in I\}$ に依存しないし, また X 上の任意の invariant mean μ に対して $y_0 = T_{\mu}x = \int T(t)x d\mu(t)$

が成立する. さらに, 任意の $x \in C$ に対し, $Qx = \lim_{\alpha} \int T(t)x d\lambda_{\alpha}(t)$ とおくと, この Q は C 上から $F(S)$ の上への nonexpansive mapping になり, $QT(t) = T(t)Q = Q$ がすべての $t \in S$ に対して成立し, かつ $Qx \in \overline{\text{co}}\{T(s)x : s \in S\}$ がすべての $x \in X$ に対して成立する.

Remark 4.6. Remark 4.3 から, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理と Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理が統一的な考えで示せるということも意味している.

5. 応用

Theorem 4.2 の系として得られる非線形強エルゴード定理を記す ([12, 21] など参照).

Theorem 5.1. E, C は Theorem 4.2 と同様とする. T は C からそれ自身への nonexpansive mapping で $F(T)$ は空でないとする. x は C の元とする. このとき, $(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} T^{i+k}x$ は T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

Theorem 5.2. E, C, T は Theorem 5.1 と同様とする. x は C の元とする. このとき, $(1-s) \sum_{i=0}^{\infty} s^i T^{i+k}x$ は $s \uparrow 1$ のとき, T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

$Q = \{q_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ は次の条件をみたす matrix とする:

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < \infty$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$.

このとき Q は strongly regular matrix という ([16]). もし Q が strongly regular matrix であれば, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のときに $|q_{n,m}| \rightarrow 0$ が成立する ([12] も参照).

Theorem 5.3. E, C, T は Theorem 5.1 と同様とする. $Q = \{q_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ は strongly regular matrix とする. x は C の元とする. このとき, $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} T^{m+k}x$ は T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

Theorem 5.4. E, C は Theorem 5.1 と同様とする. T と U は C からそれ自身への nonexpansive mapping で $UT = TU$ であり, $F(U) \cap F(T)$ が空でないとする. x は C の元とする. このとき, $(1/n^2) \sum_{i,j=0}^{n-1} U^{i+k} T^{j+h}x$ は T と U の共通不動点に $k, h \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を C から C への写像の族とする. このとき, S が次の条件をみたすならば C 上の one-parameter nonexpansive semigroup という:

- (i) 任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)$ は nonexpansive である;

- (ii) $T(0) = I$;
- (iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ が任意の $t, s \in \mathbb{R}^+$ に対して成立する;
- (iv) 任意の $x \in C$ に対して $t \mapsto T(t)x$ は連続である.

Theorem 5.5. E, C は Theorem 5.1 と同様とする. $S = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parameter nonexpansive semigroup で $F(S)$ が空でないとする. x は C の元とする. このとき $(1/s) \int_0^s T(t+k)x dt$ は S の共通不動点に $k \in \mathbb{R}^+$ に関して一様に弱収束する.

Theorem 5.6. $E, C, S = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は Theorem 5.5 と同様とする. x は C の元とする. このとき $r \int_0^\infty e^{-rt} T(t+k)x dt$ は $r \downarrow 0$ のとき, S の共通不動点に $k \in \mathbb{R}^+$ に関して一様に弱収束する.

$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}$ への関数 Q が次の条件をみたすとする:

- (a) $\sup_{s \in \mathbb{R}^+} \int_0^\infty |Q(s, t)| dt < \infty$;
- (b) $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty Q(s, t) dt = 1$;
- (c) $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty |Q(s, t+h) - Q(s, t)| dt = 0, h \in \mathbb{R}^+$

このとき Q は strongly regular kernel という.

Theorem 5.7. $E, C, S = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は Theorem 5.5 と同様とする. $Q: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ は strongly regular kernel とする. x は C の元とする. このとき $\int_0^\infty Q(s, t) T(t+h)x dt$ は $s \rightarrow \infty$ のとき, S の共通不動点に $h \in \mathbb{R}^+$ に関して一様に弱収束する.

REFERENCES

- [1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.
- [2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japon. **52** (2000), 183–195.
- [3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains*, Fixed Point Theory and Applications **3**, Nova Science Publishers, (2002), 15–31.
- [4] S. Atsushiba, A.T. Lau and W. Takahashi, *Nonlinear strong ergodic theorems for commutative nonexpansive semigroups on strictly convex Banach spaces*, J. Nonlinear and Convex Anal. **1** (2000), 213–231.
- [5] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), 75–78.
- [6] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107–116.
- [7] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math. **1** (1957), 509–544.
- [8] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [9] J. G. Falset, W. Kaczor, T. Kuczumow, S. Reich, *Weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups*, Nonlinear Anal. **43** (2001), 377–401.

- [10] N. Hirano, *Nonlinear ergodic theorems and weak convergence theorems*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 35–46.
- [11] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 229–249.
- [12] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), 1269–1281.
- [13] W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, *A mean ergodic theorem for nonlinear semigroups which are asymptotically nonexpansive in the intermediate sense*, J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), 1–27.
- [14] W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, *A mean ergodic theorem for mappings which are asymptotically nonexpansive in the intermediate sense*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 2731–2742.
- [15] A.T.Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 62–75.
- [16] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.
- [17] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **6** (1982), 349–365.
- [18] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. math. Soc. **73** (1967), 591–597.
- [19] S. Reich, *A note on the mean ergodic theorem for nonlinear semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 547–551.
- [20] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.
- [21] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, FUKASAKU,
 MINUMA-KU, SAITAMA-CITY, SAITAMA 337-8570, JAPAN
E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp