数理解析研究所講究録
第892巻 1995年 85-104

熱対流乱流におけるエントロピーカスケードの2次元wavelet解析

京大理 藤定義 (Sadayoshi Toh)
京大理 飯間信 (Makoto Iima)
京大理 鈴木絵里 (Eri Suzuki)

1 はじめに

1.1 熱対流乱流

発達した熱対流乱流は、80年代後半にシカゴ大グループによって詳しく調べられ"Hard乱流" と名付けられた[1, 2, 3]。その特徴は、実験容器（箱）中央での温度揺らぎが指数分布に従い、その振動数パワースペクトルに$\omega^{-7/5}$のベキ則域が存在することにある。また、ナッセルト数などの物理量のレイリー数に対するスケーリングがそれまで観測されていた乱流（"Soft乱流"）と異なり、レイリー数を上げていくと相転移的な遷移が見られた。さらに、Hard乱流では、容器の大きさの循環流が安定に存在することが見いだされた。

我々は、2次元箱の中の対流を直接シミュレーションすることにより、箱の中央部分が周りの流れ–循環流、境界層–と比較的独立であることを確かめた[4]。また中央部分は平均すると勾配がなく中立成層している。この意味で、中央部分の乱流は周りの流れから温度揺らぎの供給を受けて維持されている。この中央部分の発達した乱流は、エネルギーではなくエントロピー（3節参照）のカスケードにより特徴づけられる[5]。一方、運動エネルギーは、平均すると大きなスケールへ逆輸送されることが確かめられた。この逆輸送が、安定な循環流の維持に何らかの役割を果たしていると我々は考えている。

本報告では、エントロピーやエネルギーの輸送過程を解明するための第一歩として、waveletを用いて分解したスケール間の相互作用を統計的な立場で調べる。以下で述べるように、waveletを用いる上での様々な基本的な問題があり、waveletを用いる利点である空間構造、空間分布には直接立ち入らない。

1.2 基礎方程式

本報告では、2次元ブシネ近似方程式を基礎方程式として用いる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p + \alpha g\vartheta \boldsymbol{e}_y + \nu\triangle^n \boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}_{rag} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\vartheta = \kappa\triangle^n\vartheta + F_{orcing} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{3}$$

ここで、αは体積膨張率、gは重力加速度、$\boldsymbol{e}_y$はy軸方向の単位ベクトルで重力はy軸下向きであるとする。適当なスケール変換によりαgを1に置くことが出来る。また、νは動粘性係数、κは熱拡散係数である。本来、拡散項は2階の空間微分(Laplacian,$n=1$)で表されるが、ここでは2n階の空間微分（n次のLaplacian）で表される超粘性(hyper-viscosity)

を用いる。中立成層を仮定するので、この系は自励的には維持されない。我々は、外力を温度の発展方程式にのみ加えることに乱流揺らぎの維持を図る。また大きなスケールでのエネルギーの吸引項（ドラッグ）は系の統計的定常性を保つために用いた。付加的な両項は、大きなスケールでのみ有効であるようにしており、具体的な形は3章で述べる。いずれにせよ両項は慣性領域の特性には影響を与えない。さらに、一様性を仮定し周期境界条件を課す。先に述べたように中立成層（平均温度場の勾配がない）を仮定しているので、普通の意味のRayleigh数は定義できないことに注意してほしい。

1.3 空間次元と保存量

熱対流乱流は、3次元ナヴィエ・ストークス乱流と異なり2次元と3次元で同様の乱流特性を持つ可能性がある。その一つの理由として非粘性極限の保存量が両次元で同じであることがあげられる。1.2節で与えたブシネ近似方程式は2次元と3次元で同型をしており、非粘性, 外力なしの場合次のようなエントロピーと全エネルギーの二つの保存量を持っている。[6]

$$S = \frac{1}{2}\int \vartheta^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

$$E_t = \int \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \alpha g y \vartheta \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

厳密に言うと温度の任意関数が両次元で保存される。そもそもϑ^2をエントロピーと呼ぶ理由は、局所的エントロピーを温度ϑで展開したとき、平均すると一次の項が消え2次の項から始まると仮定することにある。従って、ϑ^2がエントロピーに比例し、物理的に意味のある量と考えることが出来る。実際、L'vovは次節で述べるエントロピーカスケードを仮定することにより、Bolgiano-Obukhov(B-O)スケーリングを導いた。この意味においてϑ^2を特別な保存量とみなすのである。

我々のこれまでの計算によると、2次元ブシネ近似方程式に従う乱流は超粘性($n = 8$)を用いた場合、慣性領域でB-Oスケーリングに比べエントロピースペクトルは1割ほど緩やかなベキを持ち、エネルギースペクトルはやはり1割ほど急なベキを持つことがわかっている。この様なB-Oスケーリングとのずれが2次元性によるのか、超粘性によるのかは不明である。いずれにせよ基本となるスケーリングは次元によらずB-Oスケーリングになることに注意してほしい。ここでは報告しないが、普通の粘性項を用いると異なる粘性値に対するスペクトルがB-Oスケーリングでよく重なることが示せる。このことからも2次元系を扱うことの妥当性がわかるであろう。

1.4 Bolgiano-Obukhovのスケーリング

Kolmogorovの現象論に基づく次元解析を熱対流乱流に適応する。ただしエネルギーではなくエントロピーがカスケードされるとする[6, 7, 8]。エントロピー散逸率ε_ϑを用いると、エントロピーとエネルギー両スペクトル及び特性時間は慣性領域で

$$S(k) \sim \varepsilon_\vartheta^{4/5}(\alpha g)^{-2/5}k^{-7/5}, \tag{6}$$

$$E(k) \sim \varepsilon_\vartheta^{3/5}(\alpha g)^{4/5}k^{-11/5}, \tag{7}$$

$$\tau(k) \sim \varepsilon_\vartheta^{-1/5}(\alpha g)^{-2/5}k^{-2/5}, \tag{8}$$

と表される。

時間に依存した散逸率$\varepsilon_\vartheta(t)$は次のように置ける。

$$\varepsilon_\vartheta(t) = -\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\kappa\mathcal{R}(t), \tag{9}$$

$$\mathcal{R}(t) \equiv \int_0^\infty k^2 S(k)dk. \tag{10}$$

もし、3次元ナヴィエ・ストークス乱流との類推が成り立ち、非粘性極限においてもκとϵ_ϑが独立であるならば、$\mathcal{R}$は発散しなければならない。これは、「3次元軸対称旋回 (swirl) 流の局所的近似が2次元ブシネ近似方程式と同じ形をしており、その非粘性極限で観測される有限時間発散が3次元オイラー方程式の特異解の存在を示している」とする最近のPumirとSiggiaの結果と関連して興味深い[9]。ただし、この特異解の正当性を疑う報告が多くあること記しておく[10]。詳細は2次元非粘性ブシネ近似方程式の特異解の存在可能性を扱った本講究録の鈴木と藤の報告を参照してほしい。

2 Waveletと輸送関数

2.1 2次元正規直交waveletの定義

waveletは、スケールと位置を同時に表現できる基底で、連続と正規直交の2種類がある。ここでは、逆変換が可能であり、また特定のスケールと位置で指定されるモードのエントロピーやエネルギーを定義するために正規直交系を用いる。waveletの具体形には種々の選択が可能であるが、山田と大木谷によって用いられたMayerのwaveletを用いる[11]。彼らは1次元waveletを使ったがここでは空間2次元に拡張する[12, 13]。

$$\Psi_{\boldsymbol{j}}^{q,m}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 2^m\psi(2^m x - j_1)\psi(2^m y - j_2) & (q=1), \\ 2^m\phi(2^m x - j_1)\psi(2^m y - j_2) & (q=2), \\ 2^m\psi(2^m x - j_1)\phi(2^m y - j_2) & (q=3). \end{cases} \tag{11}$$

ここで$\boldsymbol{j} = (j_1, j_2)$ (j_1、j_2は整数)、$\psi(x)$はMayerのanalizing wavelet、$\phi(x)$はMayerのsmoothing functionである。これらの詳細については、山田と大木谷の論文か、本講究録の飯間と藤の報告を参照されたい。指標qは、波数空間での各wavelet基底の受け持ち領域を表しており$q=1$の基底は$k_x \sim k_y$、$q=2$は$k_x \sim 0$、$q=3$は$k_y \sim 0$の各領域ををそれぞれ張っている。また、この2次元waveletは、$\int \Psi_{\boldsymbol{j}}^{q,m}(\boldsymbol{x})\Psi_{\boldsymbol{j}'}^{q',m'}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \delta_{q,q'}\delta_{m,m'}\delta_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}'}$

の直交関係を満たしている。これらの基底を用いると、温度場と速度場は次のように表現される。

$$\vartheta(\boldsymbol{x},t) = \sum_m \sum_{\boldsymbol{j},q} \Theta_{\boldsymbol{j}}^{q,m}(t)\Psi_{\boldsymbol{j}}^{q,m}(\boldsymbol{x}). \tag{12}$$

$$u_l(\boldsymbol{x},t) = \sum_m \sum_{\boldsymbol{j},q} U_{l,\boldsymbol{j}}^{q,m}(t)\Psi_{\boldsymbol{j}}^{q,m}(\boldsymbol{x}), \qquad l=1,2. \tag{13}$$

m番目のスケールに含まれるエントロピーとエネルギーを次のように定義する。

$$S_{\boldsymbol{j}}^m(t) \equiv \frac{1}{2}\sum_q (\Theta_{\boldsymbol{j}}^{q,m}(t))^2, \qquad E_{\boldsymbol{j}}^m(t) \equiv \frac{1}{2}\sum_{l,q} (U_{l,\boldsymbol{j}}^{q,m}(t))^2. \tag{14}$$

さらに、$\boldsymbol{j}$に関する縮約を取り空間点に関する情報を持たない量を次のように定義する。

$$S^m(t) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}} S_{\boldsymbol{j}}^m(t), \qquad E^m(t) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}} E_{\boldsymbol{j}}^m(t). \tag{15}$$

2.2 2次元正規直交 wavelet による打ち切り近似

前節で導入した2次元正規直交 wavelet に対して、数値計算データの解析に都合がいいように、周期境界条件を課した上で打ち切り近似を行う。ここでは簡単のために、周期はx及びy方向それぞれ1と置く。これらの近似を行うと、フーリエ係数から wavelet 係数への wavelet 変換が離散ＦＦＴを用いて表現でき、数値的に高速化が図れる。さらに、逆 wavelet 変換も同様に定義できる。

ここでフーリエ係数を用いた表式を導出したが、打ち切り近似に対しては注意が必要である。フーリエ基底と wavelet 基底は異なる正規直交関数系に属するので、物理空間の格子点上で定義された離散的な量を表現するのに必要なそれぞれで張られる部分空間は一致しない。具体的に言うと、スケールmとm＋1に対応する wavelet 空間のそれぞれの部分空間は、波数空間では重なりがある。例えば、$N^2=(2^M)^2$の2次元格子点上のデータはN^2個のフーリエモードで表されるが、wavelet 係数は$(2^{M+1})^2$個必要となる。勿論これらのすべての wavelet 係数が独立ではないが、正しく表現するために必要であり、特に逆変換を利用するときには重要である。

周期境界条件を課すことにより、各スケールでの位置を表すパラメター$\boldsymbol{j}$はそのスケールを表すパラメターmを用いると、x、y方向それぞれ2^mの有限個となる。この意味で、$\boldsymbol{j}^m$と明示的に表記すべきであるが、以下では混乱がない限り明示しない。定義により、あるスケールmの格子点$\boldsymbol{j}$は絶対的な意味を持つが、この点の空間情報は、この点を中心とした半径$2^{-(1+m)}$程度の空間広がりを持つ変動の情報であることに注意してほしい。

2.3 wavelet を用いたエネルギー及びエントロピーの発展方程式の表現

wavelet によって分解したエントロピーとエネルギーの発展方程式は以下のように書ける。ただし、指標qに関しては縮約を取っている。また、新しい指標$\boldsymbol{p} \equiv (m, j_1, j_2)$を導

入し残りの指標を代表させる。この指標にさらに添字 a,b,c をつけてモードを区別する。たとえば、$\boldsymbol{j}_a \equiv (j_{a,1}, j_{a,2})$ のようにに用いるので空間成分を表す添字と混同しないようにしてほしい。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S^{m_a}_{\boldsymbol{j}_a} = \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c) + \mathcal{D}_S(\boldsymbol{p}_a) + \mathcal{F}(\boldsymbol{p}_a) \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E^{m_a}_{\boldsymbol{j}_a} = \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_E(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c) + \mathcal{D}_E(\boldsymbol{p}_a) + \mathcal{L}(\boldsymbol{p}_a) \tag{17}$$

輸送項 $\mathcal{T}_S, \mathcal{T}_E$は次のように定義される。ただし、ここでも指標 qに関する縮約を明示せずに行っている。

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c) &= \Theta^{\boldsymbol{p}_a} \int \boldsymbol{u}\cdot\nabla\vartheta\Psi^{\boldsymbol{p}_a}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \Theta^{\boldsymbol{p}_a} U_l^{\boldsymbol{p}_b} \Theta^{\boldsymbol{p}_c} \int \Psi^{\boldsymbol{p}_a}\Psi^{\boldsymbol{p}_b} \frac{\partial \Psi^{\boldsymbol{p}_c}}{\partial x_l}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_E(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c) &= U_{l_a}^{\boldsymbol{p}_a} \int (\nabla p + \boldsymbol{u}\cdot\nabla u_{l_a})\Psi^{\boldsymbol{p}_a}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} U_{l_a}^{\boldsymbol{p}_a} U_{l_b}^{\boldsymbol{p}_b} U_{l_c}^{\boldsymbol{p}_c} \int \Psi^{\boldsymbol{p}_a} L_{l_a,l_c}(\Psi^{\boldsymbol{p}_b}\partial x_{l_b}\Psi^{\boldsymbol{p}_c})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{19}$$

ここで演算子 $L_{l_a,l_c} \equiv (-\partial x_{l_a}\triangle^{-1}\partial x_{l_c} + \delta_{l_a,l_c})$ は、エネルギー輸送項の圧力項と移流項にそれぞれ由来する項をまとめて表すために導入した。ただし、$\triangle^{-1}$は、形式的な表現でLaplacian の逆演算子を表している。線形項 $\mathcal{D}_S$、$\mathcal{D}_E$、$\mathcal{F}$ は、慣性領域では無視できるので具体形は示さない。浮力に関連した線形項は、$\mathcal{L}(\boldsymbol{p}_a) \equiv -U_2^{\boldsymbol{p}_a}\Theta^{\boldsymbol{p}_a}$と表される。統計的定常な慣性領域では、$< \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c) >= - < \mathcal{L}(\boldsymbol{p}_a) >$が成り立ち、浮力を通して各スケールでエネルギーの授受があることがわかる。結果から言うと、慣性領域では運動エネルギーの供給がこの項を通して行われることがわかる。

波数空間での三角相互作用と違い、二つのモードを決めても残りの一つは一意的に決まらず、原理的にはすべてのモードが可能である。移流項型の非線形項に由来する輸送項は、反対称化することで任意の三つのモードの相互作用に対してエントロピーやエネルギーの詳細釣り合いが成り立つように出来る。しかしながら、圧力項に由来する輸送項はこのような反対称化は難しい。

2.4 各種輸送関数の定義と性質

以下の議論のために各種の縮約を取った輸送関数を定義する。それぞれの意味等は各節で順次説明する。

$$\mathcal{T}_S^{m_a}(\boldsymbol{j}_a) \equiv \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c), \qquad \mathcal{T}_E^{m_a}(\boldsymbol{j}_a) \equiv \sum_{\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a,\boldsymbol{p}_b,\boldsymbol{p}_c) \tag{20}$$

$$\widehat{\mathcal{T}_S}(\boldsymbol{p}_a, m_b, m_c) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}_b, \boldsymbol{j}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a, \boldsymbol{p}_b, \boldsymbol{p}_c), \qquad \widehat{\mathcal{T}_E}(\boldsymbol{p}_a, m_b, m_c) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}_b, \boldsymbol{j}_c} \mathcal{T}_S(\boldsymbol{p}_a, \boldsymbol{p}_b, \boldsymbol{p}_c) \tag{21}$$

$$\overline{\mathcal{T}_S}(m_a, m_b, m_c) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}_a} \widehat{\mathcal{T}_S}(\boldsymbol{p}_a, m_b, m_c), \qquad \overline{\mathcal{T}_E}(m_a, m_b, m_c) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}_a} \widehat{\mathcal{T}_S}(\boldsymbol{p}_a, m_b, m_c) \tag{22}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}_S}(m_a, m_c) \equiv \sum_{m_b} \overline{\mathcal{T}_S}(m_a, m_b, m_c), \qquad \widetilde{\mathcal{T}_E}(m_a, m_c) \equiv \sum_{m_b} \overline{\mathcal{T}_E}(m_a, m_b, m_c) \tag{23}$$

ここで特定のスケールmに含まれるモードのみから成る温度場及び速度場を以下のように定義する。

$$\vartheta^m(\boldsymbol{x}, t) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}} \Theta^{\boldsymbol{p}}(t) \Psi^{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}), \qquad u_l^m(\boldsymbol{x}, t) \equiv \sum_{\boldsymbol{j}} U_l^{\boldsymbol{p}}(t) \Psi^{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \quad l = 1, 2. \tag{24}$$

$\widetilde{\mathcal{T}_S}(m_a, m_c) = \int \vartheta^{m_a}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \vartheta^{m_c}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$は特別な対称性を持っている。非圧縮条件、$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を用いると、以下の関係が証明できる。

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}_S}(m_a, m_c) + \widetilde{\mathcal{T}_S}(m_c, m_a) &= \int \vartheta^{m_a}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \vartheta^{m_c}) + \vartheta^{m_c}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \vartheta^{m_a}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \vartheta^{m_a} \vartheta^{m_c}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

これより、$\widetilde{\mathcal{T}_S}(m_a, m_c) = -\widetilde{\mathcal{T}_S}(m_c, m_a)$ がいえる。また、$m_a = m_c$ のとき$\widetilde{\mathcal{T}_S}(m_a, m_a) = 0$ となる。この輸送関数以外に対しては、厳密な意味での対称性はない。4章で示すように数値計算の結果によると$\overline{\mathcal{T}_S}(m_a, m_b, m_c) \cong -\overline{\mathcal{T}_S}(m_c, m_b, m_a)$ が成り立っている。これは、$\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{m_b} \cong 0$ であることによると思われる。

一方、エネルギーの輸送関数は、$\widehat{\mathcal{T}_E}$に対してすら対称性がはっきりといえない。これは、圧力項に由来する輸送項の性質がよくないためであり、wavelet が微分に対して固有関数になっていないことがその原因である。

2.5 Wavelet を用いる場合の問題点

wavelet がスケールの情報と共に空間情報をも持っていることから、フーリエ解析等では見落とされたり問題にされなかったことが本質的になる。すなわち、wavelet の利点の中にそれ固有の問題が潜んでいる。

スケールの立場から見るとエントロピーやエネルギーの流れは、あるスケールをよぎる場合の他に、そのスケール内での流れも考えられる。wavelet 空間では、後者のスケール内の流れはエントロピーやエネルギーの固まりが空間移動する事に対応している。輸送関数を観察すると進行方向前方に正、後方に負の領域が見えるであろう。つまり、wavelet で分解した輸送関数の変動を調べるだけでは、カスケード等のスケール間の輸送を理解することは出来ないことを意味する。また、wavelet 基底自身が持つ空間情報の不確かさに由来する見かけの時間変動や空間変動が生じる。実際の現象は、これらの基本的な現象が複雑に組合わさっていると想像できる。従って、スケール間の真のエネルギー輸送を取り出すためには慎重な考察、取り扱いが必要になる。しかしながら、複雑な乱流系でこのよ

うな精度の良い手法は確立されていない。基礎的な研究は、Burgers 流に対して飯間と藤によって行われている。本講究録にある報告を参照されたい。

波数空間においては、各フーリエモードに対するエネルギー方程式の圧力項に由来する輸送項は消えてしまう。これは、$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}=0$ が成り立つからである。すなわち、波数空間では速度の各フーリエモードが圧縮条件を満たしていることによる。一方、wavelet 空間では、このようなモードレベルでの非圧縮条件は成立しない。物理的には、非圧縮条件が無限遠方からの情報が瞬時に伝わることを許しており、実空間において有限の広がりしか持たない wavelet 基底は、圧力を通して原理的にはすべてのモードが相互作用してしまうことに相当する。この意味において、無限の広がりを持つフーリエ基底に対しモードごとに非圧縮条件が成り立つのはもっともらしい。以上のように、スケールと共に空間情報まで合わせ持つ wavelet を用いて輸送過程を考察する場合、圧力項の役割を考慮する必要があることが理解できよう。

2 次元乱流におけるエンストロフィーや熱対流乱流におけるエントロピーのカスケードに対しては、この様な圧力項の考慮は必要ない。そもそも渦度方程式や温度の方程式には圧力項が含まれないからである。一方、3 次元乱流のエネルギーカスケードや熱対流乱流のエネルギー輸送を扱う場合には本質的となる。本報告では、空間情報には詳しく立ち入らず、この節で述べた問題は今後の課題としておく。

3 計算結果

3.1 数値計算手法と計算の詳細

2 次元ブシネ近似方程式を直接解く数値スキームとして、空間成分に対して擬スペクトル法、時間発展に 4 次のルンゲ・クッタ法を用いた。エイリアジング誤差を取り除くために 1/2-phase shift 法を用いたので、有効モード数は $(8/9)N^2$ になる。本報告では慣性領域を広く取るために、$n=8$ の超粘性を採用した。粘性係数は $\nu=\kappa=5\times10^{-31}$、モード数 $N=256$、各空間方向の周期は共に 2π を用いた。時間刻みは $dt=2\times10^{-3}$ で長時間経った後の状態を初期条件とし、６０単位時間内の等間隔の６０サンプルを輸送関数を計算するのに用いた。時系列データは $5dt$ 毎に記録している。温度場に対する外力は、$F_{orcing}=\cos(2x)\cos(2y)$ とした。ドラッグ項は以下のように波数空間で定義した。

$$\boldsymbol{D}_{rag}=\begin{cases}0.5\triangle^{-1}\boldsymbol{u} & 0<|\boldsymbol{k}|\leq 3,\\ 0 & |\boldsymbol{k}|>3.\end{cases} \tag{26}$$

wavelet 変換は、簡単のために周期を 1 にしている。従って、データベース化した上記シュミレーションデータを適当にスケール変換して用いる必要がある。この変換には自由度があるので、浮力項の係数を 1 に保つよう制限を付ける。各変数、係数は以下のように変換される。

$$t=(2\pi)^{-1}\tilde{t},\qquad \boldsymbol{x}=(2\pi)^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}},\qquad \vartheta=2\pi\tilde{\vartheta},\qquad \boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{u}},\qquad \omega=2\pi\tilde{\omega}. \tag{27}$$

$$\nu=(2\pi)^{1-2n}\tilde{\nu},\quad \kappa=(2\pi)^{1-2n}\tilde{\kappa}.\quad F_{orcing}=(2\pi)^2\tilde{F}_{orcing},\quad D_{rag}=(2\pi)^2\widetilde{D}_{rag}. \tag{28}$$

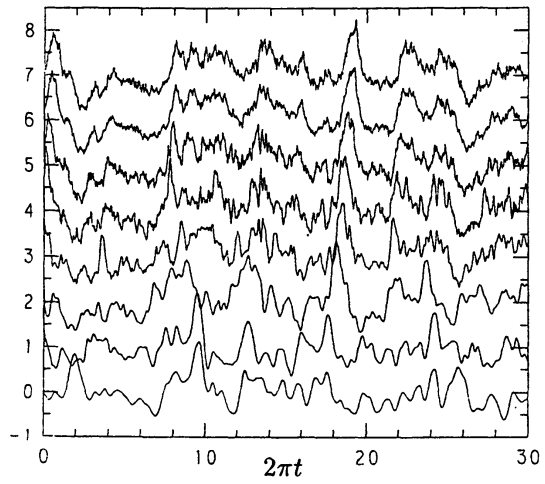

図1：エントロピー S^mの時系列の一部、$m = 0,\ldots,7$。それぞれmの値だけy軸上方にずらしてあり、標準偏差の3倍で規格化されている。

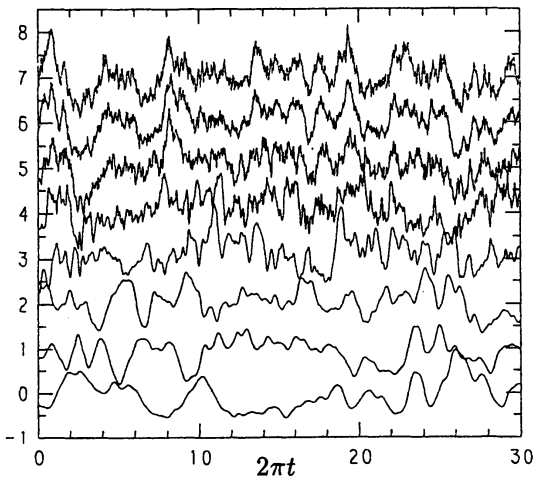

図2：エネルギー E^mの時系列の一部、$m = 0,\ldots,7$。それぞれmの値だけy軸上方にずらしてあり、標準偏差の3倍で規格化されている。

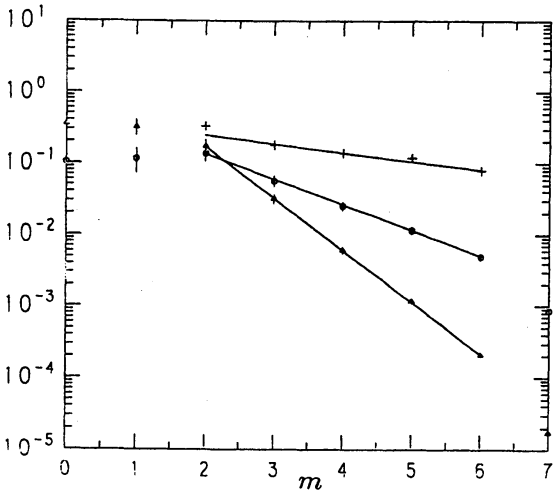

図3：wavelet スペクトル $S^m/(2^m 2\pi)(\triangle)$、$2\pi E^m/2^m(\mathrm{o})$ とエントロピー相関時間 $2\pi\tau_m(+)$

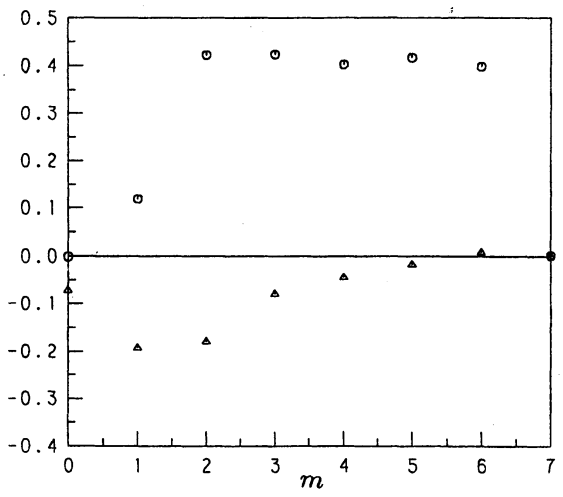

図4：wavelet フラックススペクトル $\Pi_S^m/(2\pi)^3(\mathrm{o}), 5\Pi_E^m/(2\pi)(\triangle)$

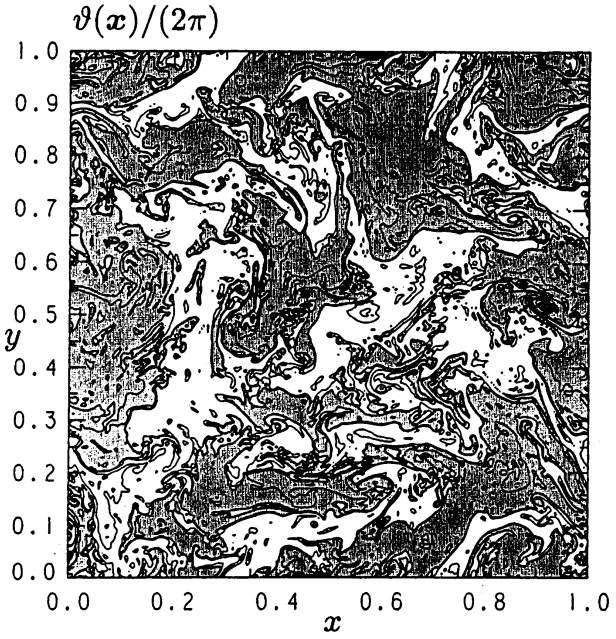

図５：温度場のスナップショットの等高線図。最大値と最小値の間の１０等分の等高線を描いた。正の領域は陰で示した。

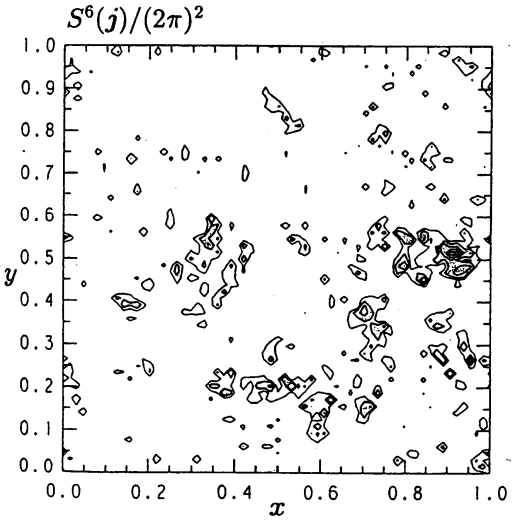

図６：wavelet で分解したエントロピー場のスナップショット．図５と同時刻、$m = 6$。等高線は最大値の、5, 10, 20, 80% の値に対して描いた。10% 以上の領域は陰で示した。

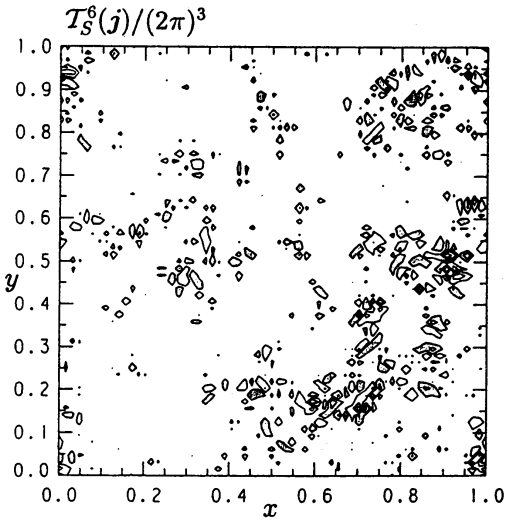

図７：wavelet で分解した温度のトランスファー項$\sum_{m_b,m_c} \widehat{T_S}((m_a, j_{a,1}, j_{a,2}), m_b, m_c)$ のスナップショット．図５と同時刻、$m_a = 6$。最大値の $\pm 5, 20, 40, 80\%$の値の等高線を描いた。正で 5% 以上の領域は陰で示した。

ここで、チルダは変換前の変数、係数を表す。

図1、2にスケールに分割されたエントロピーとエネルギーの時間変化の一部を示した。それぞれ標準偏差の3倍で規格化してある。時系列の時間平均を取ったものがスペクトルに相当する (図3)。詳細は次節で議論する。図4にエントロピーとエネルギーのフラックス関数を示した。フラックスは以下のように定義した。

$$\Pi_S^m = -\sum_{m_a=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{j}_a}\mathcal{T}_S^{m_a}(\boldsymbol{j}_a), \quad \Pi_E^m = -\sum_{m_a=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{j}_a}\mathcal{T}_E^{m_a}(\boldsymbol{j}_a). \tag{29}$$

フラックスは60のスナップショットの平均なので変動は小さくない。しかし、波数空間で定義し$5dt$毎の時系列を用いて平均したフラックスと定量的にもさほど違わない。エネルギーフラックスは散逸領域を除き負で、平均すると大きなスケールへ輸送されていることを示している。また、慣性領域でも一定ではない。これは、浮力によりポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換され各スケールで供給されるためである。

図5に、温度場のスナップショットを示した。温度場が引き延ばされ細かい変動が生成されている様子が見える。図6、7に図5と同時刻のwaveletで分解したスケール$m=6$エントロピー場と輸送関数を示した。分布が間欠的であり、エントロピーの大きいところで輸送関数も強くなっている。

3.2 スペクトルと相関時間

エントロピーとエネルギースペクトルは、それぞれ$< S^m/2^m >, < E^m/2^m >$とおける。ここで<>は長時間平均を表す。図3に両スペクトルを示した。最小二乗法により求めたベキはそれぞれ1.2と2.4でB-Oスケーリングに比べ1割ほど違っている。ここではこの違いについては言及しない。ここで相関関数を以下のように定義する。これらの相関関数は、考えている二つの変数が完全に相関を持てば1、無相関ならば0をそれぞれ与える。

$$F_{SS}^m(\tau) = \frac{< (S_m(t)- < S_m >)(S_{m+1}(t+\tau)- < S_{m+1} >) >}{< (S_m(t)- < S_m >)^2 >^{1/2} < (S_{m+1}(t)- < S_{m+1} >)^2 >^{1/2}} \tag{30}$$

$$F_{EE}^m(\tau) = \frac{< (E_m(t)- < E_m >)(E_{m+1}(t+\tau)- < E_{m+1} >) >}{< (E_m(t)- < E_m >)^2 >^{1/2} < (E_{m+1}(t)- < E_{m+1} >)^2 >^{1/2}} \tag{31}$$

$$F_{SE}^m(\tau) = \frac{< (E_m(t)- < E_m >)(S_m(t+\tau)- < S_m >) >}{< (E_m(t)- < E_m >)^2 >^{1/2} < (S_m(t)- < S_m >)^2 >^{1/2}} \tag{32}$$

F_{SS}^m, F_{EE}^mは、エントロピーとエネルギーそれぞれ同一量のmと$m+1$スケール間の遅延時間τに関する相関関数である。またF_{SE}^mは同一スケールのエネルギーとエントロピーの間の遅延時間τに関する相関関数である。

図9に$F_{SS}^m(\tau)$を示した。$m=0,1$を除き$\tau=0$の近傍正の側に鋭いピークを持つている。このピークを与える遅延時刻を特性時間τ_mと定義する。特性時間τ_mは正であることから、エントロピーはmからm+1のスケールへ、すなわち大きなスケールから小さなス

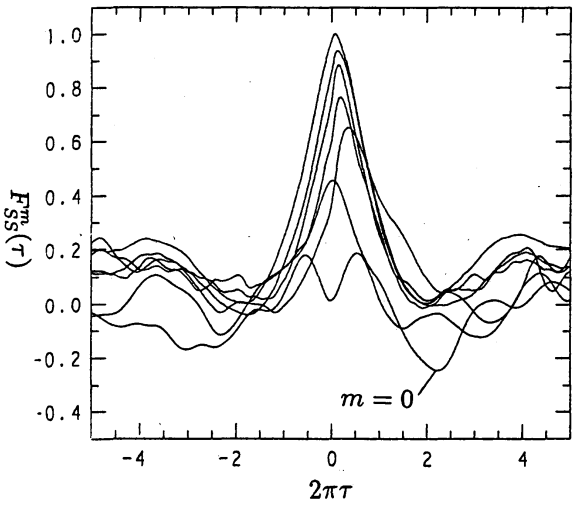

図８：スケールｍとｍ＋１のエントロピー間の遅延時間に関する相関関数 $F^m_{SS}(\tau)$、$m=0,\cdots,6$。

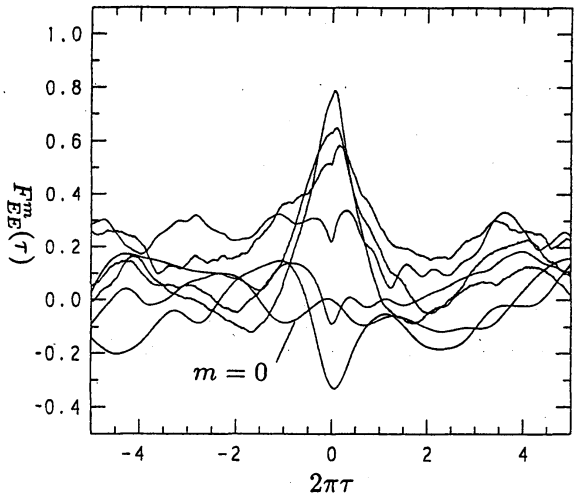

図９：スケールｍとｍ＋１のエネルギー間の遅延時間に関する相関関数 $F^m_{EE}(\tau)$、$m=0,\cdots,6$。

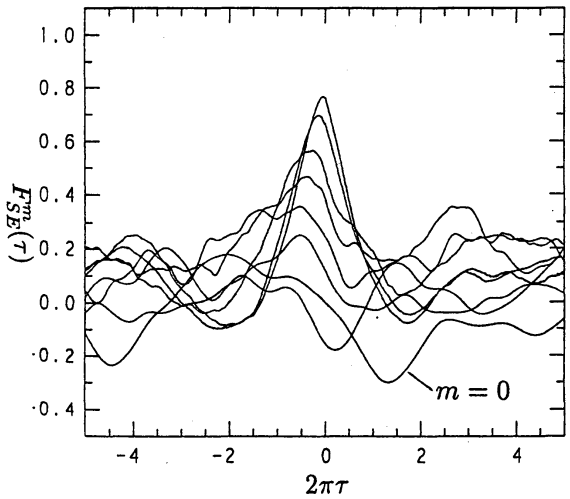

図１０：同一スケールｍのエントロピーとエネルギー間の遅延時間に関する相関関数 $F^m_{ES}(\tau)$、$m=0,\cdots,7$。

ケールへ運ばれることを示している。図3からわかるように、この特性時間は$\sim k^{-2/5}$とフィットでき、B-Oスケーリングで予想された特性時間と同じベキ則を与える。非粘性の極限において、もしここで得た特性時間に関するベキ則が成り立つとすると、無限に小さいスケールへエントロピーが運ばれるのに必要な時間T_∞は、

$$T_\infty = \sum_m^\infty \tau_m \propto \sum_{m=m_0}^\infty k_m^{-2/5} = \frac{(4\pi)^{-2m_0/5}}{1-(4\pi)^{-2/5}} < \infty \tag{33}$$

の様に有限時間になる。ただし、m_0はベキ則が成り立つ最大のスケールを表す。このことから、エントロピーカスケードには何らかの素過程が存在することが示唆される。

次に、エネルギーの相関関数F_{EE}^mを考察する。図10を見ると、エントロピーに比べピークが広がっており、負の遅延時間の方の裾が緩く伸びていることがわかる。さらに、$\tau=0$をはさんで正負両側にピークがあることがわかる。これらのことから、エネルギーはエントロピーとは異なりその流れに特定の方向を持たないことを示している。ただし、流れは無秩序ではなく、むしろ小さいスケールへの流れと大きなスケールへの流れが交互に起こっているように推測できる。また、裾の傾きが負の側で緩いことから、大きなスケールへの流れの方が相関が弱いことを示しており、両過程の質的違いが予想される。実際、図2をみると、それぞれの過程を表すと思われるエネルギー変動のピークの系列が判別できる。フラックススペクトルからわかるように（図4)、平均するとエネルギーは小さなスケールから大きなスケールへと運ばれている。しかし、ここで明らかになったように動的には流れの向きは変動しており、理論的取り扱いにおいては注意が必要であろう。

図11には同一スケールのエネルギーとエントロピー間の相関関数F_{ES}^mを示した。強くはないが、ピークが識別できそれぞれ負の遅延時間にある。これより、エントロピー変動がエネルギー変動に先行することがわかる。エネルギーは、各スケールで浮力によりポテンシャルエネルギーから運動エネルギーに変換され供給されていることを考慮すると、この相関関係はもっともらしい。大きなスケールほど遅延時間が長いのは、エネルギーの変換により時間がかかることを示している。

3.3 エントロピーとエネルギーのスケール間流れ

この節では、エントロピーやエネルギーのスケール間輸送を調べる。図8に$\overline{T_S}$をm_bとm_cの関数として示した。指標m_aの値は各図の中の○で示した。ここで、m_a、m_cはそれぞれ受け取る側（増減の両方が可能である)、与える側の温度場のスケールで、m_bは移流項の速度場のスケールである。ナヴィエ・ストークス乱流の場合のエネルギー輸送関数のような対称化は行っていない。また、波数の三角相互作用と異なり任意の3つのモードが相互作用するので、m_cとm_bは独立である。

すべてのスケールm_aに対し、$m_c = m_a + 1$を満たすモードにエントロピーが与えられ、$m_c = m_a - 1$のモードから供給されているように見える。しかしながら、速度のスケールは$m_b \leq m_a$の領域で広がりを持つ。直接的な関係はないが、このm_bとm_cの間の質的な違いが非局所的相互作用 (non-local interaction) に対応しているように思われる。熱対流乱流の場合、比較すべき波数空間での輸送の研究がないので、5節で2次元乱流のエンストロフィーカスケードに対して同様な解析を行い、波数空間の解析との比較を試みる。

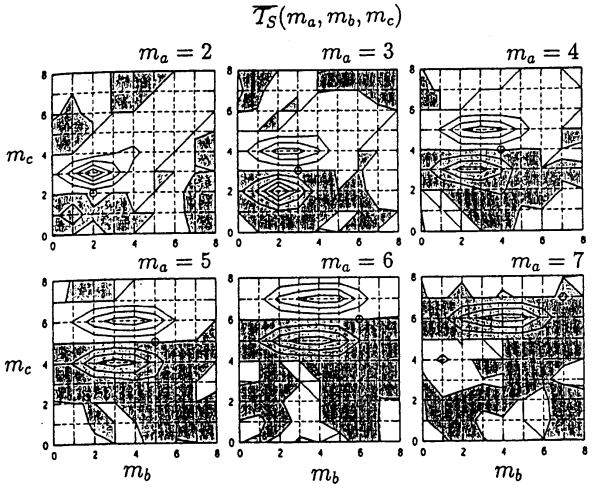

図１１：$\overline{T_S}(m_a, m_b, m_c)/(2\pi)^3$、各図の横座標は$m_b$、縦座標は$m_c$をあらわす。$m_a$の値は各図の中のoで示している。陰をつけた領域は正の値を表す。相対的な大きさを見るために便宜上等高線を用いたが、意味のある値は破線の交点上だけである。実線は$\overline{T_S} = 0$を示す。等高線の間隔は0.1である。

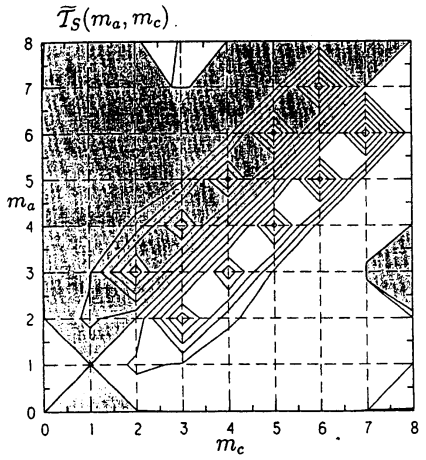

図１２：$\widetilde{T_S}(m_a, m_c)/(2\pi)^3$、横座標は$m_c$、縦座標は$m_a$、等高線の間隔は0.1、正の領域を陰で示した。

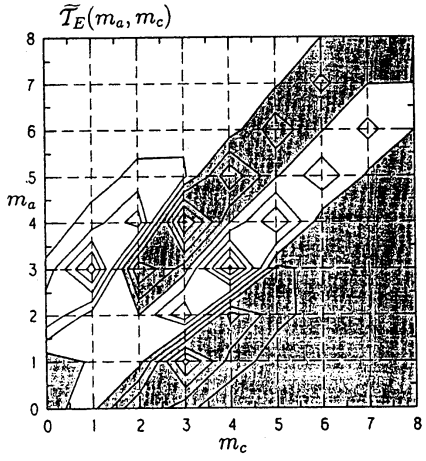

図１４：$\widetilde{T_E}(m_a, m_c)/2\pi$、横座標は$m_c$、縦座標は$m_a$

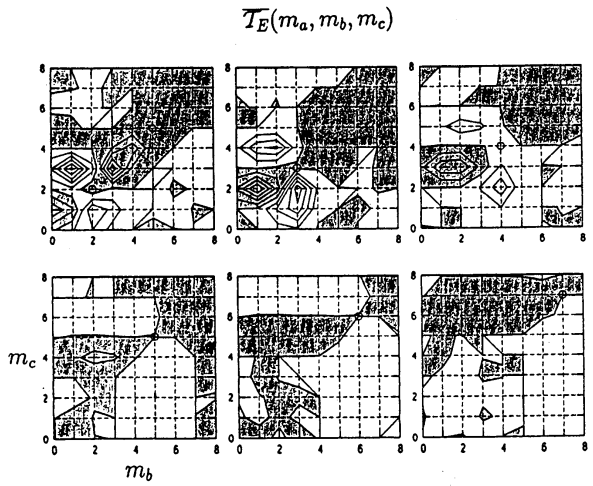

図１３：$\overline{T_E}(m_a, m_b, m_c)/2\pi$、図１１と同様。

2章でも述べたように、輸送関数$\overline{T_S}(m_a, m_b, m_c)$の$m_a$と$m_c$に関する厳密な反対称性（詳細釣り合い）は証明できない。しかし、図8を見る限り数値的には成立しているようである。逆に言えば、この性質のために上記のようなスケール間のエントロピーの保存的なやり取りという描像が有効になる。更に、$m_a = m_c$のときには$\overline{T_S} = 0$となり、これは同スケール間のエントロピーのやり取りは保存するというもっともらしい結果を与えている。このスケール間の輸送に関しては、次節で詳しく取り扱う。

エントロピーのやり取りをしている温度場のスケールに比べ、関与する速度のスケール（m_b）が大きくまた広がりを持つ。このことから、カスケード過程では、考えている温度場がそれより大きなスケールの速度場によって引き延ばされ、より小さいスケールの温度場に変形されていると想像できる。このダイナミカルな描像は、前節の結果とも矛盾しない。温度場の各スケール間のエントロピーのやり取りの様子は、図12に示した速度のスケールを縮約した輸送関数$\widetilde{T_S}$を見るとよくわかる。ほぼ、$m_a = m_c + 1$を満たすスケール間で正、$m_a = m_c - 1$で負、つまり隣の小さなスケールからエントロピーをもらい、隣の大きなスケールに与えるというカスケードらしい結果を与えている。

次にエネルギーの輸送を解析する。運動エネルギーは、エントロピーと異なり非粘性での保存量ではなく、またカスケード的に輸送されるわけではないことに注意してほしい。図13に$\overline{T_E}$を示した。図8と比べると、反対称性が弱く破れていることがわかる。また、$m_c = m_a$の上下にそれぞれ正負の両領域が存在することから、エネルギーの流れが必ずしも定まっておらず両方向すなわち、大きいスケールから小さいスケールへとその逆があることを示している。順方向（大から小）の流れは、$m_c = m_a$の上側が負、下側が正で$m_b < m_a$を満たしており$m_c = m_a \pm 1$で大きいことからカスケードに類似の過程であると推測できる。しかし、運ばれるエネルギーは保存せず減少している。一方、逆方向（小から大）の流れは複雑で、$m_b > m_a$を満たす小さなスケールの速度場が関与していることがわかる。更に$m_c > m_a + 1$や$m_c < m_a - 1$を満たすスケールともエネルギーのやり取りを行っており、この意味で強い非局所的な相互作用があると言えよう。順逆それぞれの方向の流れの機構が異なることは、前節の相関関数の考察からも推測されており辻褄が合っている。この両過程の詳細を調べることは興味深いであろう。

図14に輸送関数$\widetilde{T_E}$を示した。先に述べたように、順逆両方向のエネルギーの流れがあることが読みとれる。順方向の流れは、カスケードのように隣り合うスケール間で受け渡しが行われている。各スケールで浮力によりポテンシャルエネルギーから変換された運動エネルギーが供給されるために、エネルギーの流れは保存していない。逆方向の流れは、大きなスケールで強い。またエネルギーのやり取りは、広範囲のスケール間で行われている。実際$m_a > m_c + 1$を満たすスケール間のやり取りは負であり、図12に示した$\widetilde{T_S}$と対照的である。図では、$\widetilde{T_E}$は$m_a = m_c + 1$ではほぼ正であるように見える。しかし、図13からわかるように、正負両符号の流れが存在し総和が正になっていることに注意してほしい。これは逆方向の輸送が非局所性の強い過程であることを示している。輸送関数$\widetilde{T_E}$の反対称性は弱く破れている。これは、圧力に因る輸送の影響である。大きなスケールでの破れが強いことから、なにがしかの秩序構造の相互作用と関連があるのかもしれない。いずれにせよ、圧力の輸送過程への寄与は明らかでなく、その解明は今後の課題である。

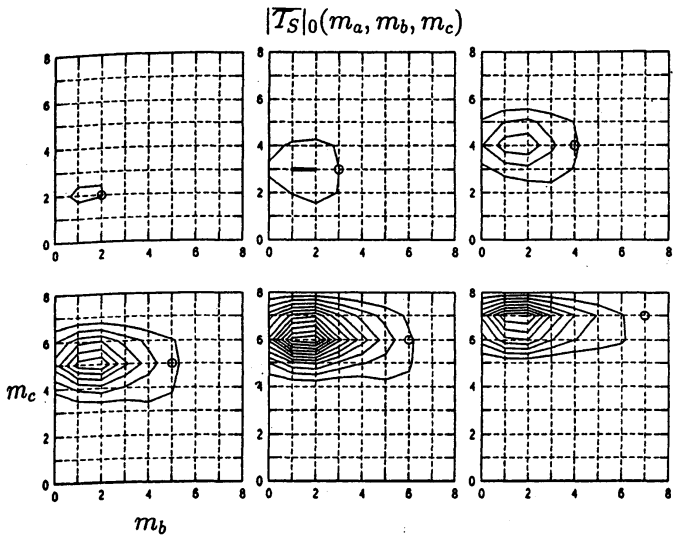

図１５：$|\overline{T_S}|_0(m_a, m_b, m_c)/(2\pi)^3$、各図の横座標は$m_b$、縦座標は$m_c$をあらわす。$m_a$の値は各図の中の○で示している。相対的な大きさを見るために便宜上等高線を用いたが、意味のある値は破線の交点上だけである。等高線の間隔は0.5。

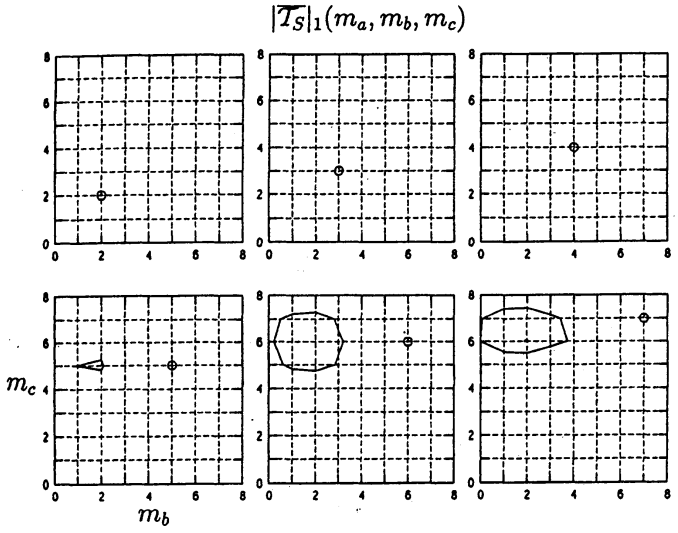

図１６：$|\overline{T_S}|_1(m_a, m_b, m_c)/(2\pi)^3$、図１５と同様。

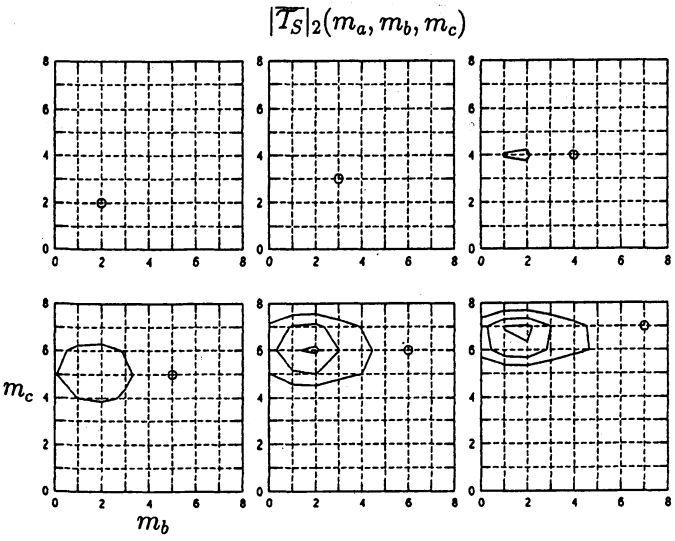

図１７：$|\overline{T_S}|_2(m_a, m_b, m_c)/(2\pi)^3$、図１５と同様。

3.4 sweeping 効果について

この節では、あるスケール m_aの輸送関数 $T_S^{m_a}(\boldsymbol{j}_a), T_E^{m_a}(\boldsymbol{j}_a)$ の空間分布（$\boldsymbol{j}_a$に関する変動）について調べる。Meneveau はこれらに相当する量を定義し、各$\boldsymbol{j}_a$ の点での揺らぎが大きいことからエネルギー輸送が時間・空間ともに局所的に符号が変わりうると結論づけた [12, 13]。すなわち、エネルギーの流れが局所的に大きいスケールに向かうことがあるとした。この結論は、2章で述べたようにエネルギーの流れが大きく分けてスケール間とスケール内の2種類あることを考慮していないことによる誤解である。すでに述べたように、このスケール内の流れの一例として sweeping がある（図6、7参照）。この節では、sweeping をより定量的に評価することを試みる。

sweeping によるスケール内輸送の特徴は、局在したエントロピーあるいはエネルギーの並進運動に起因するもので、その進行方向にエントロピーあるいはエネルギーが輸送される。従って、進行方向の前方、後方で輸送関数はそれぞれ正、負の値をとる。さらに、これらの観測は wavelet で分解されたあるスケールmで行われているので、局在の広がりは $l_m \sim 2^{-m}$程度で、輸送関数に現れる正負の位置は高々この長さ程度しか離れていないはずである。このことを、定量的に確認するために空間位置$\boldsymbol{j}_a$に関する縮約を取るときに、以下のような絶対値を用いた3種類の輸送関数を定義する。

$$|\overline{T_S}|_n(m_a, m_b, m_c) \equiv \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{\boldsymbol{j}_a} \sum_{s_1, s_2 = -n}^{n} |\widehat{T_S}((m_a, j_{a,1}+s_1, j_{a,2}+s_2), m_b, m_c)|, \quad (n = 0, 1, 2). \tag{34}$$

ここで指標 n は絶対値を取る前に行う平均操作の違いを表し、$n = 0$ はなにもせず絶対値を取り、$n = 1, 2$ は$\boldsymbol{j}_a$を中心とする $(2n+1) \times (2n+1)$ の格子点上のそれぞれ9点、25点の平均値の絶対値を取ることを意味する。

図15に $|\overline{T_S}|_0$を示した。図8と比較すると、輸送関数$\overline{T_S}$は、$m_a = m_c$上で個々の変動は極めて強いが総和がほぼゼロになることが読みとれる。また、図16から、これらの強い変動はそれぞれ隣接する変動と相殺することがわかる。更に、図17によると、平均する領域を広げると値が増すことから、強い変動のペアが比較的接近していることが推測できる。指標 m_bは速度成分のスケールを表しており、また輸送関数 $|\overline{T_S}|_n$ が $m_b = 2$ 付近で最大値をとることから、大きなスケールの速度成分による sweeping とみなせる。

波数空間の三角相互作用の場合、ナヴィエ・ストークス乱流では対称化された輸送関数 $T(k|p, q)$ の $p \sim 0$ か $q \sim 0$ 付近に非常に強い隣接した正負の領域があることが知られている [14, 15]。この領域に含まれる波数ベクトルの作る三角形が極めて歪んでいるため、非局所相互作用と呼ばれている。Waleffe は、この正負のペアに注目して、漸近的な状況で物理空間での描像に置き換えこのペアが大きなスケールの流れによる sweeping 効果を表しており、実質的なエネルギー輸送には寄与しないことを示した。

我々がこの節で示した sweeping は、Waleffe の描像の一般化に相当する。考えているスケールより大きなスケールの速度場は、局所的に sweeping を起こしうることが理解できる。いずれにせよ、大きなスケールほど大きな sweeping を起こす。ここでは示さないが、

エネルギーの輸送関数にも同様のsweepingが存在することが示せる。波数空間では、この様なsweepingを理解するのは難しい。一方、物理空間の情報を含むwavelet空間では、この節の始めで説明したようにほぼ自明の現象であろう。この節で取り扱った、非常に近接した正負の変動のすべてがsweepingに相当するわけではない。ある瞬間の場をwaveletで分解したとき、基底自身の持つ変動に由来する見かけの変動も存在しうる。この様な、見かけの成分を区別し取り除く必要があるが、ここでは言及するに留める。Burgers流の場合に詳細に調べた飯間と藤の報告を参照してほしい。ここでは、スケール内輸送の機構としてsweepingに着目したが、一般にスケール内輸送はカスケード等のスケール間輸送と結びついた複雑な過程であろう。あるスケール内でのエントロピーやエネルギーの非均一分布は、間欠性と関連していると思われる。この様な間欠的な分布は、スケール内輸送の原因の一つである。これに伴う物理空間での現象あるいはそのダイナミクスを明らかにするためにも、waveletを用いた解析は有効であろう。

3.5 2次元乱流（エンストロフィーカスケード）との比較

この節では2次元乱流と比較することで、熱対流乱流における輸送過程の理解を深めることを試みる。渦度に対する以下の方程式のシミュレーションを行い、waveletを用いた解析を行った。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \omega = \nu \triangle^n \omega + F_{orcing} + D_{rag}. \tag{35}$$

渦度場のwavelet係数を$\Omega_j^{q,m}$と定義する。各輸送関数は、エントロピー輸送関数の定義式（18）で$\Theta_j^{q,m}$を$\Omega_j^{q,m}$に置き換えることで得られる。添字Qにより、エンストロフィーの輸送関数であることを明示する。用いたパラメターは、$\nu = \kappa = 5 \times 10^{-30}$、$N = 256$、$dt = 2 \times 10^{-3}$、８０単位時間内の等間隔の８０サンプルを輸送関数の計算に用いた。温度場に対する外力は、$F_{orcing} = 0.5\cos(2x)\cos(2y)$とした。ドラッグ項は2次元ブシネ近似方程式の場合と同じである。

図18に$\overline{T_Q}(m_a, m_b, m_c)$を示した。一見して、$\overline{T_S}$（図8）より$\overline{T_E}$（図13）に似ている。とりわけ$m_a = 2, 3$の図は、前々節の考察より逆向きの輸送があることを示している。エンストロフィーカスケードに伴う輸送は、$m_c = m_a - 1$に負$m_c = m_a + 1$に正の領域がそれぞれあることでその可能性が読みとれる。しかし、エントロピーのカスケードとは異なり、関与する速度のスケールは$m_b = 2$に固定されている。このスケールは外力を含んでおり、この意味でエネルギー保有領域に相当する。波数空間でのこれまでの輸送の研究から、2次元乱流には「強い非局所的相互作用が存在する」ことが知られているが、我々の結果はこれと整合的であろう。エンストロフィーカスケードが、渦領域を引き延ばすことあるいは巻き込むことにより引き起こされるとすると、カスケードに関与する速度のスケールが変わらないことは、これらの過程が大きなスケールの速度場によって駆動されていることを示しておりもっともらしい。図8のエントロピーカスケードの場合、関与する速度のスケールはm_aと共に相対的に小さくなっており、この意味で局所的であると言えよう。

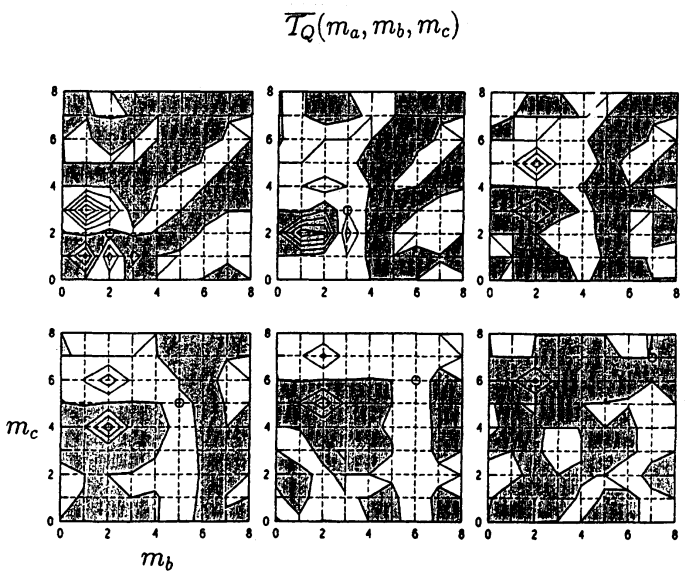

図１８：$\overline{\mathcal{T}_Q}(m_a, m_b, m_c)/(2\pi)^3$、図１１と同様。

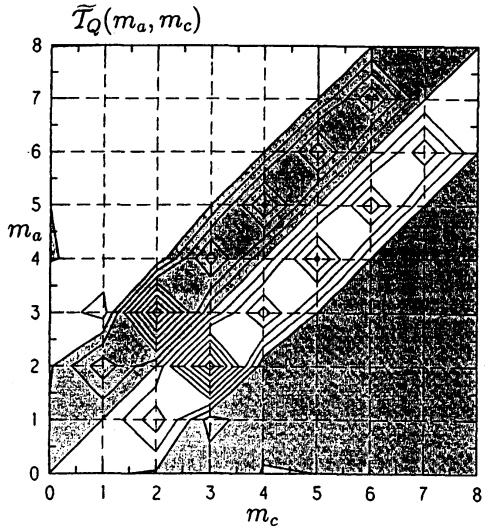

図１９：$\widetilde{\mathcal{T}_Q}(m_a, m_c)/(2\pi)^3$、横座標は m_c、縦座標は m_a

図19に、輸送関数$\widetilde{T_Q}$を示した。エンストロフィーは、隣り合うスケール間で受け渡しされておりこの意味でカスケード的である。一方、$m_a > m_c + 1$では負になっており図14に似ている。これは、弱いながらエンストロフィーの逆輸送があることを示している。

4 結論

本報告では、熱対流乱流が観測される箱の中心部のモデルとして、2次元ブシネ近似方程式を扱った。シミュレーションで得たデータをエントロピーやエネルギーの輸送過程に着目し、wavelet基底を用いて解析を行った。

スケール毎に分解したエントロピーやエネルギーの時系列に対して相関関数を定義し調べ、エントロピーは小さなスケールにB-Oスケーリングから得た特性時間と同じ時間スケールで伝わることがわかった。更に、もし非粘性極限でもこの特性時間に従うなら、有限時間で無限小スケールにエントロピーが運ばれうることが示唆された。一方、エネルギーに対しては、エントロピーのようなはっきりした特性時間は定義できない。むしろ、小さいスケールへの輸送と大きいスケールへの輸送が共存している様に見える。つまり、時刻によって流れの向きが変わるようである。平均的にはエントロピーの情報がエネルギーに伝わっていることが示された。これは、浮力を通してポテンシャルエネルギーが運動エネルギーに変換され、このエネルギーの流入が速度場を維持している状況を反映している。

様々な輸送関数をwavelet空間で表現し、スケール間、スケール内の輸送を調べた。2次元乱流のエンストロフィーカスケード過程との比較も行った。エントロピーは、カスケードに相当する隣接するスケール間の輸送により小さいスケールに運ばれることが確かめられた。この過程で関与する速度のスケールは、考えている温度場のスケールに比べ幾分大きい。この意味では、非局所的な相互作用といえるであろう。更に、スケール内の輸送も確認されたが、その大半がsweepingに因ることが推測できる結果を得た。また、このsweepingを起こす速度場は、スケール間輸送に関与する速度場に比べ大きなスケールから成る。スケール間輸送に比べ、局所的変動はけた違いに大きいことがわかった。従って、輸送関数を用いたカスケード等の解析を行う場合、慎重な考察が必要であろう。

エネルギーは、順逆両方向のスケール間輸送を行うことがわかった。逆輸送（小⇒大）は、広範囲のスケール間の相互作用によることが示された。一方、順輸送（大⇒小）は、カスケードに似た隣接するスケール間での授受によることがわかった。ただし、フラックスは一定ではない。このような、順逆両方向の輸送の機構の違いは興味深い。特に、逆輸送はHard乱流における大きなスケールのセル流の維持機構の候補と考えているので、広範囲のスケールの相互作用が重要ならば、多くのスケールの位相がそろう可能性がありもっともらしい。エネルギーの輸送には圧力の役割が無視できないこと確かめられた。これは、waveletが空間情報を合わせ持つことに起因しており、異なる空間点間の相互作用を考える場合に重要となるであろう。

エンストロフィーのカスケード過程は、極めて非局所的であることが知られている。waveletを用いた輸送関数の解析においても、関与する速度場のスケールがほとんどエ

ネルギー保有領域のスケールであり、この意味でも非局所的であろう。エントロピーのsweepingに関与する速度場のスケールもほぼ同スケールであることを考慮すると、エンストロフィーカスケードは、大きなスケールの速度場による渦度場の引き延ばしや巻き込みによると推測できる。エントロピーカスケードでは、関与する速度場は考えている温度場のスケールより大きくまた広がっているが、その最大の寄与を与えるスケールは温度場のスケールと共に小さくなっており、対照的である。この意味では、局所的といえるであろう。

本報告では定量的な定義もせずに局所性を論じた。ここでは、離散的なスケール間の相互作用を考えており、波数空間の三角相互作用のとの定量的な比較が出来ていないので、今のところ曖昧な表現しかできない。また、空間情報を積極的に用いてもいない。これは、waveletを使う上でのいくつかの問題点が解決されていないためでもある。今後は、これらの曖昧で未解決な問題の解決を目標としたい。

参考文献

[1] E. D. Siggia, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 137 (1994)

[2] B. Castaing *et al.*, *J. Fluid Mech.* **204**, 1 (1989).

[3] X. Z. Wu, L. Kaddanoff, A. Libchaber and M. Sano *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2140 (1990).

[4] S. Toh and E. Suzuki, *Unstable and Turbulent Motion of Fluid* , (World Scientific, 1993) 272.

[5] S. Toh and E. Suzuki, preprint

[6] V. S. L'vov, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 687 (1991).

[7] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Vol. 2*, (MIT Press, Cambridge, 1975) 387.

[8] I. Procaccia and R. Zeitak, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2128 (1989).

[9] A. Pumir and E. D. Siggia, *Phys. Rev. Lett.* **68**,1511 (1992).

[10] E. Weinan and C. W. Shu, *Phys. Fluids A* **6**,49 (1994).

[11] M. Yamada and K. Ohkitani, *Fluid Dyn. Res.* **8**, 101 (1991).

[12] C. Meneveau, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1450 (1991).

[13] C. Meneveau, *J. Fluid Mech.* **232**, 469 (1991).

[14] F. Waleffe, *Phys. Fluids A* **4**,350 (1992).

[15] K. Ohkitani and S. Kida, *Phys. Fluids A* **4**,794 (1992).