

# コアンダ効果により誘起される非粘性渦崩壊流れの解析

筑波大学システム情報系 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH\*)

\* Corresponding author: kyotoh@kz.tsukuba.ac.jp

2017年10月12日

## 概要

旋回流ジェットは、スワール数が大きくなると、噴き出し口に付着し、放射方向に噴射する。高速ビデオで渦核を撮影すると、噴出口で渦核が歳差運動し、単一渦核がスパイラル状に渦崩壊している様子が観察される。歳差運動の旋回周波数は、渦核外縁の流体粒子の旋回周波数の  $1/10$  程度である。我々は、この渦核の歳差運動の原因を分析し、旋回周波数を理論的に予測し、旋回流中心に形成される気柱の運動によって放射される音波を再現することを最終的な目標として研究を進めている。

そこで、渦核の歳差運動の解析を行うための前段階として、Bragg-Hawthorne (B-H) 方程式から軸対象渦崩壊流れの解を求め、次いでオイラーの運動方程式から擾乱の支配方程式を導き、非一様流の安定解析により、この旋回周波数の予測を行うことを試みた。ところが、研究の過程で、線形安定性に関わる固有値が、二、三次元問題では極めて複雑で数値的に求めた固有値が真値であることを検証することが、困難であることが示唆された。そこで、まず主流について、軸対称渦崩壊後の簡易な解を導き、できる限り解析的に固有値問題を取り扱うこととした。

## 1 Introduction

### 1.1 研究背景

#### 1.1.1 渦崩壊

Benjamin は渦崩壊は超臨界から亜臨界に至る流れであり、跳水と同様にエネルギー損失を伴うとした [4]。一方、Keller J. J. ら [22, 23] は、Bragg and Hawthorne 方程式 (B-H 方程式) に基づいた解析により、エネルギー損失の無い渦崩壊が可能であることを示し、渦崩壊後は dead water 領域が形成されるとして渦崩壊のモデル化を行った。

また、流下方向に一樣なスワールジェットの移流・絶対不安定性に関する研究 [19] により、渦崩壊現象が絶対不安定性に依るとすると、その発生位置、発生周波数などが説明できることが示された。具体的には、軸方向一様流を持つランキン渦に対しては、解析的に固有値方程式が導かれ、軸方向流が後流型の場合に Kelvin-Helmholtz 固有値のヘリカルモードが絶対不安定となりこと [31]、および、Bachelor の q-vortex (外部流の無い後流) でもヘリカルモードが最も不安定となることが、数値解析により示された [10, 37]。また、軸対象モードの渦崩壊では、流れが超臨界から亜臨界に遷移すること [4]、ヘリカルモードの渦崩壊は絶対不安定性によって引き起こされ、その振動数は理論から予測される centre mode [26] の振動数に近い値となることが示された [38]。

さらに、上流端にスワールジェットが存在し、下流に向かって移流する場合の3次元の数値解析により、レイノルズ数およびスワール数が大きいときに、ヘリカルモードもしくはダブルヘリカルモードの渦崩壊が現れること [16]、また、軸方向流れがジェット型のときは軸対称モード、後流型のときはヘリカルモードが成長することが示された。したがって、軸方向流が噴流型のスワールジェットでは、先ず軸対称モードの

渦崩壊が発生し、それによって後流型の軸方向流となり、次いでヘリカルモードの渦崩壊に至ると推測される。

一方で、非一様流（二次元および三次元）の安定解析では、固有値が固有関数に敏感に応答することが知られており [42, 16], 方程式から得られる解析的關係式により計算精度を検証することが重要である [18, 33].

## 1.2 研究目的及び方法

本研究で対象とする微細気泡発生ノズルは、旋回流が強く流れの全域が亜臨界の場合にも渦崩壊が発生するように設計されており、Benjamin の渦崩壊の定義は当てはまらない。また、本ノズルでは、ノズル出口の曲率をコアンダ効果が発現するように設計されており、いわゆる「コアンダ効果により誘起された渦崩壊」であり、境界形状が渦崩壊を誘引する。したがって、これまでの研究のように流下方向に一樣な流れの安定解析では説明することはできない。

本研究によれば、流入部の軸流が一樣であっても軸対称渦崩壊の解は存在する。一方で、一樣流の安定性理論によれば、軸流の流速分布が Kelvin-Helmholtz の不安定性を持ち、且つ、逆流が存在すれば、渦崩壊に至る [39]。そこで、本研究では、流入部の軸流が、一樣流、逆流のない噴流型、逆流のない後流型のそれぞれの場合に軸対称渦崩壊の解が得られるか否か、また軸対称渦崩壊の解を基本流としたときにスパイラルモードの不安定固有値が存在するかについて議論する。

本研究では、Keller J. J. ら [22, 23] の渦崩壊の理論に沿って、渦核に jet もしくは wake を有する Rankine 渦の軸対称定常渦崩壊の解を求める。渦核に jet が存在する場合には、スワール・パラメータがノズル形状に依存するある臨界値以上の時に、軸対称定常渦崩壊の解が存在することが解析的に示される。ただ、jet を有する集中した渦核が淀み点通過後に渦輪状に変形し放出される解は、物理的に不安定であるように思われる。

そこで、流れの線形安定解析により、この軸対称渦崩壊の解の大域的な線形安定性を調べる。ところが、大域的安定性問題では、流入流出部の境界条件を厳密に与えることが難しいこと、及び、離散化による固有値が膨大な数だけ出現するため、真の固有値を求めることが困難となる。特に、本研究対象では、軸対称渦崩壊後の流れ場の安定性を調べる必要があり、これまでの研究とは異なり、流れは漸変流ではなく急変流となるため、さらに安定解析は困難となる。

本研究では、軸流が不連続となる場合の定常解の定式化、及び、安定解析を解析的に行うための定常流の簡易な解を導き、擾乱方程式を解析的に解く方法について紹介する。

## 2 軸対称渦崩壊流れの基礎方程式

旋回型微細気泡発生ノズルでは、スワール数もしくは Squire 数がノズル内の全域（縮流部を含む）で十分大きく、亜臨界状態であっても渦崩壊が発生する。この意味で、旋回型微細気泡発生用ノズルにおける渦崩壊は、Keller J. J. ら [22, 23] が提案したモデルで説明することができる。また、微細気泡発生効率、ノズル出口のテーパ角が大きい、換言すると、旋回流ジェットの屈曲角が大きいほど微細気泡発生効率が高上がることがわかっている。

一樣な主流の場合には、固定座標系から観察した軸方向流に後流が存在するときに絶対不安定となり、軸流の不連続による Kelvin-Helmholtz モードが絶対不安定性を導くことが示されている。一方で、テーパ部を有する場合には、軸対称渦崩壊の解が存在する (Keller)。以上のことから、本研究で対象とする流れは、流入部で不連続な軸流を持つ Rankine 渦である。まず、軸流が不連続な場合にも軸対称渦崩壊の解が存在することを数値的に検証し、続いてこの軸対象渦崩壊の解のヘリカルモードによる大域的安定性を調べる。

## 2.1 B-H 方程式

Keller J. J. らにしたがって、支配方程式は、非粘性軸対称定常流の渦度保存則 (B-H 方程式)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = F, \quad F \equiv r^2 \frac{dH}{d\Psi} - C \frac{dC}{d\Psi} \quad (1)$$

を用いる (Bragg and Hawthorne (1950)). ただし,

$$ru = C(\Psi), \quad v = -\frac{\partial \Psi}{r \partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{r \partial r}. \quad (2)$$

ここで,  $\Psi$  は流れ関数,  $z$  は軸対称軸,  $r$  は  $z$  軸に直交する半径方向距離,  $u, v, w$  はそれぞれ  $z$  軸周り,  $r$  方向,  $z$  方向の流速,  $H(\Psi)$  はベルヌーイ定数,  $C(\Psi)$  および  $H(\Psi)$  は流線上で一定であり, 境界を通過する流線については境界条件から決定される.

## 2.2 軸流が渦核内外で不連続となる場合の定式化

流入部の境界条件として, 渦核内及び外部で一様な軸方向流を持つ Rankine 渦

$$\begin{aligned} w &= W_1, \quad u = r\Omega \quad \text{for } 0 \leq r \leq r_c \\ w &= W_2, \quad u = r_c^2 \Omega / r \quad \text{for } r_c < r \leq r_f \end{aligned} \quad (3)$$

を与える. このとき流れ関数は,

$$\Psi = \begin{cases} r^2 W_1 / 2 & 0 \leq r \leq r_c \\ r^2 W_2 / 2 + r_c^2 (W_1 - W_2) / 2 & r_c < r \leq r_f \end{cases} \quad (4)$$

となる. また, ベルヌーイ定数  $H$ , 循環  $ru = C$  及び B-H 方程式の外力項  $F$  は, 以下の通りである.

$$\begin{aligned} H_{\text{rot}} &= \frac{W_1^2}{2} + \frac{2\Omega^2}{W_1} \Psi + \frac{p_0}{\rho}, \quad C_{\text{rot}} = \frac{2\Omega\Psi}{W_1}, \quad F_{\text{rot}} = \frac{2\Omega^2}{W_1} \left( r^2 - \frac{2\Psi}{W_1} \right), \quad \text{for } 0 \leq r \leq r_c \\ H_{\text{irrot}} &= \frac{W_2^2}{2} + r_c^2 \Omega^2 + \frac{p_0}{\rho}, \quad C_{\text{irrot}} = r_c^2 \Omega, \quad F_{\text{irrot}} = 0, \quad \text{for } r_c < r \leq r_f \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, 下付き添え字の 'rot' 及び 'irrot' はそれぞれ渦あり, 渦なし流れにおける値を表す. 本研究では, 流入部の流線が流れの全域を通過する場合, すなわち  $W_1, W_2 > 0$  となる場合について解析を行う.  $W_1$  もしくは  $W_2$  が負となる場合には, 流出部もしくは流れの領域内で境界条件を与える必要があり, 解を一意的に決定することが難しい.

次に, 解析を進める上で, 記号の煩雑さを避けるために以下の無次元化を行う.

$$\begin{aligned} \Psi / \Psi_f &\rightarrow \Psi, \quad r / r_f \rightarrow r, \quad z / r_f \rightarrow z, \quad (u, v, w) / U \rightarrow (u, v, w) \\ U &\equiv \frac{\Psi_f}{r_f^2}, \quad P \equiv \rho U^2, \quad \Psi_f = \frac{r_f^2}{2} W_2 + \frac{r_c^2}{2} (W_1 - W_2) \\ S_{qf} &= r_f \Omega / W_1, \quad S_{qc} = r_c \Omega / W_1, \quad w_2 = W_2 / W_1. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,  $P$  は圧力の代表値である. 上記の無次元化に際して, 煩雑さを避けるために, 以下, 無次元化前後で同じ記号を用いる. このとき, B-H 方程式は,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi &= F, \\ F_{\text{rot}} &= 4S_{qf}^2 \left( \frac{r^2}{\zeta} - \Psi \right) \quad \text{for } 0 \leq r \leq r_c, \quad F_{\text{irrot}} = 0 \quad \text{for } r_c < r \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ここで、

$$\zeta = w_2 + r_c^2(1 - w_2) \quad (8)$$

である。また、無次元の流れ関数は、

$$\Psi_{rot} = \frac{r^2}{w_2 + r_c^2(1 - w_2)} \quad \text{for } 0 \leq r \leq r_c, \quad \Psi_{irrot} = \frac{w_2 r^2 + r_c^2(1 - w_2)}{w_2 + r_c^2(1 - w_2)} \quad \text{for } r_c < r \leq 1 \quad (9)$$

となる。

### 2.2.1 流速の不連続面における境界条件

ここでは、京藤によって定式化された固体境界を有する渦崩壊流れ [47] の解析を軸流に不連続性を有する場合に拡張する。

変数  $s, \Phi, \lambda$  に対して、不連続な軸方向流を持つ Rankine 渦の不連続面における境界条件を求める。界面の境界条件は、界面法線方向流速、すなわち流れ関数の連続性、及び圧力の連続条件である。圧力の連続条件はベルヌーイの定理 (5) から

$$\frac{H_{rot}(r_c) - H_{irrot}(r_c)}{U^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{W_1}{U} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{W_2}{U} \right)^2 = \frac{u_{\Phi rot}(s_c, \Phi)^2}{2} - \frac{u_{\Phi irrot}(s_c, \Phi)^2}{2} \quad (10)$$

となる。一方、 $\Phi$  方向の流速  $u_\Phi$  は、

$$u_\Phi = (v, w) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right) / \left| \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right) \right| = \frac{s \lambda}{r h_\Phi} \quad (11)$$

$$h_s = \frac{2}{\lambda} h_\Phi, \quad h_s \equiv \sqrt{\left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2}, \quad h_\Phi \equiv \sqrt{\left( \frac{\partial r}{\partial \Phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right)^2},$$

で与えられる。式 (12) より、速度  $u_\Phi$  は  $s = s_c$  で不連続であることから、 $\lambda$  及び  $r, z$  の  $s$  微分は不連続となる。また、周方向流速  $u_\theta$  は循環の保存則から

$$u_{\theta rot} = \frac{2S_{qf} s^2}{r}, \quad u_{\theta irrot} = \frac{2S_{qf} r_c^2}{\zeta r} \quad (12)$$

となる。ここで、周方向流速は  $s = s_c$  で連続、 $s_c = r_c / \sqrt{\zeta}$  であることに注意する。上式 (10) を式 (12) に代入し整理すると、界面における  $\lambda$  の jump condition:

$$\lambda_{irrot}(s_c, \Phi)^2 - \lambda_{rot}(s_c, \Phi)^2 = \left\{ \frac{r(s_c, \Phi) h_\Phi(s_c, \Phi)}{s_c} \right\}^2 \left\{ \left( \frac{2w_2}{\zeta} \right)^2 - \left( \frac{2}{\zeta} \right)^2 \right\} \quad (13)$$

が得られる。ここで、 $r$  及び  $h_\Phi$  は  $s = s_c$  において連続である。さらに、式 (??) は、 $r, z$  の  $s$  微分に関する関係式

$$\lambda_{rot}(s_c, \Phi) \frac{\partial z_{rot}}{\partial s}(s_c, \Phi) = \lambda_{irrot}(s_c, \Phi) \frac{\partial z_{irrot}}{\partial s}(s_c, \Phi) \quad (14)$$

$$\lambda_{rot}(s_c, \Phi) \frac{\partial r_{rot}}{\partial s}(s_c, \Phi) = \lambda_{irrot}(s_c, \Phi) \frac{\partial r_{irrot}}{\partial s}(s_c, \Phi) \quad (15)$$

を与える。以上、不連続面において  $\lambda, r, z$  に対する 3 つの境界条件は、(13), (14) 及び (15) となる。

## 2.3 定常流の簡単な解

本研究の目的は、hollow core vortex の線形安定性を調べることであるが、二次元流の場合には離散化による意味のない固有値が多数現れること、また開境界における境界条件の与え方など不明な点が多い。そこで、基本流として一様管路の hollow core vortex を特徴付けるもっとも簡易な解を導き、その安定解析を可能な限り解析的に扱うことにする。したがって、ここでは軸流は断面内で一様であるとする。

### 2.3.1 Hollow core vortex の漸近解

本節では、流れの全域で一様流を持つ Rankine 渦 ( $W_1 = W_2 \equiv W$ ) の渦崩壊を対象とする。基礎方程式は、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + k^2(\Psi - y) = 0, \quad k = 2S_{qf}, \quad y \equiv \frac{r^2}{2} \quad (16)$$

である。上式は  $k = 0$  とおくと、渦なし流れの基礎方程式となる。

一様な管路における Rankine 渦の渦崩壊時の淀み点周りの漸近解は、

$$\Psi_{rot} = y\{y - Y_a(z)\}^2 f(y, z) \quad (17)$$

となる。ここで、 $y = Y_a(z)$  は cavity 表面を表す。上式中  $y$  は渦崩壊前の  $z$  軸上の軸対称流れ、 $(y - Y_a)^2$  は渦崩壊後の cavity 境界で流速が 0 となる条件を表す。また、 $f(y, z)$  は  $y = Y_a$  で解析的な関数であり、微分方程式から決定される。第一近似では、

$$f(z, y) \approx \frac{k^2}{2Y_a + (dY_a/dz)^2} \equiv B_0(z) \quad (18)$$

となる。

また、渦なし流れ領域では、長波近似によると、第一近似では、

$$\Psi_{irrot} = \frac{1}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right) w_0(z) \quad (19)$$

となる。ここで、 $w_0(z)$  は壁面  $y = 1/2$  における  $z$  方向の流速である。

以上の未知関数  $Y_a(z)$ ,  $w_0(z)$  は、渦核と渦なし部の境界  $y = Y_c(z)$  における法線方向流速および圧力の連続条件

$$\psi_{irrot}(z, Y_c) = \Psi(z, Y_c), \quad \frac{\partial \Psi_{irrot}}{\partial y}(z, Y_c) = \frac{\partial \Psi_{rot}}{\partial y}(z, Y_c), \quad \psi_{irrot}(z, Y_c) = \Psi_c \quad (20)$$

から決定される。上式は、未知関数  $Y_a(z)$ ,  $w_0(z)$ ,  $Y_c(z)$  に対する 3 本の微分方程式を与える。

Fig.1 に  $kr_c = 1.5$  のときの式 (20) の数値解を示す。図中  $R_a$  は cavity の半径であり、 $R_a = \sqrt{2Y_a}$  で定義されている。一方で、 $Y_a$  は cavity の  $z$  の定義域で解析関数であり、上流側で負となっている。したがって、この解析モデルでは、従属変数として  $R_a$  ではなく  $Y_a$  を用いることが、淀み点の特異性を回避し解析的な解を得る上で重要であることがわかる。

以上の最低次の近似式の解は、渦核半径  $r_c$  とスワールパラメータに関するパラメータ  $k$  が独立に決定される。一方で、管径が一定の流れに対する運動量保存則に従えば、渦崩壊後に  $z$  に依存しない解に移移する場合には、運動量  $-p + \rho v_z^2$  の断面積分値が保存されるため、 $r_c$  に依存して  $k$  が決定される (flow force が不変)。最低時の近似解が運動量保存則に適合しない理由は、基礎式 (16) が  $z$  の 2 階微分を含むが、最低次の近似式では 2 階微分を考慮しなかったためと考えられる。

2 階微分を考慮した場合の B-K 方程式の近似解は、次式を境界条件 (20) に代入することで与えられる。

$$f(z, y) \approx \frac{k^2}{2Y_a + (dY_a/dz)^2} + \frac{k^2(y - Y_a)[-12Y_a - 10(dY_a/dz)^2 + \{2Y_a - 3(dY_a/dz)^2\}d^2Y_a/dz^2]}{6\{2Y_a + (dY_a/dz)^2\}^3},$$

$$\Psi_{irrot} \approx \frac{1}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right) w_0(z) + \frac{1}{6} \left(y - \frac{3}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right)^3 \frac{d^2 w_0}{dz^2}. \quad (21)$$

$z \rightarrow \pm\infty$  で一様解が存在する条件から  $r_c$  と  $k$  の関係が導かれると考えられる。本研究では、軸対称渦崩壊の解の安定性を調べるために、できる限り簡易で基本流の特性を有する解を求めることを目的としているため、これ以上の議論は行わないこととする。

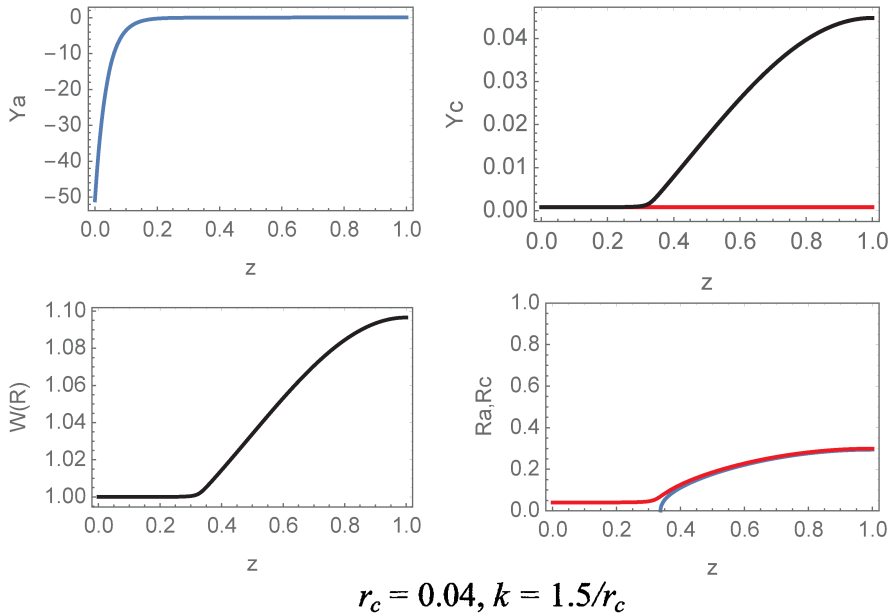


図 1: Solution of the simplified equations (20).

### 3 流れの安定性

式 (17) を主流とした解を円筒座標系のオイラーの運動方程式に代入し、擾乱の運動方程式を求める。

#### 3.1 支配方程式及び境界条件

定常流の安定性を調べるため、解を定常解と変動成分の線形和で表わす。

$$u_r = u_{r0} + \epsilon \hat{A}_r \exp(i\theta - i\omega t), \quad (22)$$

$$u_z = u_{z0} + \epsilon \hat{A}_z \exp(i\theta - i\omega t), \quad (23)$$

$$u_\theta = u_{\theta0} + \epsilon \hat{A}_\theta \exp(i\theta - i\omega t), \quad (24)$$

$$p = p_0 + \epsilon \hat{A}_p \exp(i\theta - i\omega t). \quad (25)$$

ここで、 $\epsilon$  は摂動パラメータ、 $m$  は周方向波数、 $\omega$  は角周波数である。主流は、式 (17) から、

$$\begin{aligned} u_{\theta0} &= \frac{C_{ir}}{r}, \quad u_{r0} = -\frac{\partial \Psi_{rot}}{r \partial z}, \quad u_{z0} = \frac{\partial \Psi_{rot}}{r \partial r}, \\ p_0 &= \frac{k^2}{2} \Psi_{rot} - \frac{1}{2} (u_{r0}^2 + u_{z0}^2 + u_{\theta0}^2). \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、 $C_{ir} = k \Psi_{rot}$  である。

式 (22)–(25) をオイラーの運動方程式に代入し  $\epsilon$  の 1 次の項を取り出すことで、変動成分の支配方程式が得られる。変動成分に対する連続式およびオイラーの運動方程式を、それぞれ第 1 行および第 2 行以下に配

置し、行列表記すると

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} + \mathbf{M}_z \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \mathbf{M} \mathbf{q} &= 0. \\ \mathbf{q} &\equiv {}^t(\hat{A}_p, \hat{A}_r, \hat{A}_z, \hat{A}_\theta) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、未知関数  $\mathbf{q}$  は、 $r$ - $z$  座標系における摂動流速の振幅、 ${}^t$  は行列の転置を意味する。

### 3.2 擾乱方程式の薄膜近似

渦核半径が管径に比べて小さい場合、渦核内部の解に薄膜近似を適用することができる。ここで、擾乱の対称性より

$$\hat{A}_r = A_r(y, z), \quad \hat{A}_z = r A_z(y, z), \quad \hat{A}_\theta = \hat{A}_\theta(y, z), \quad \hat{A}_p = r A_p(y, z) \quad (28)$$

とおくことができる。渦核内の解に対しては、上式を擾乱方程式に代入し、変数  $y$  に関して、渦崩壊前の解に対しては  $y$  の冪級数、渦崩壊後の解では  $y - Y_a$  の冪で級数展開する。多少計算ののち、それぞれの領域における級数を決定する漸化式が得られ、これらが矛盾なく逐次決定できることを示すことができる。一方で、渦無し部の解は擾乱の波長が短い場合は長波近似は収束性に問題があるが、ラプラス方程式を満たし一般解が得られるため、精度を上げることは可能である。

渦崩壊後の解の初項は、運動方程式にしたがって

$$\begin{aligned} A_{p0} - \omega A_{\theta 0} &= 0, \\ 2Y_a A'_{p0} + Y'_a A_{p0} + \{-i\omega Y'_a + 2B_0 Y_a(2Y_a + Y_a'^2)\} A_{r0} + \{-2i\omega Y_a - 2B_0 Y_a Y'_a(2Y_a + Y_a'^2)\} A_{z0} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

を満足する。ここで、 $'$  は  $z$  に関する微分を表す。高次の逐次近似解を求めても、2つの未知関数により解が決定される。したがって、4つの未知関数に対して、残りの2つの方程式は、 $y = Y_a$  における力学的条件（圧力の連続条件）及び  $y = Y_c$  における運動学的条件から得られる。また、逐次近似の  $n$  次の解は、 $(n-1)$  次の解によって代数的に決定できることが示される。

$$\begin{aligned} A_{pn} + F_{pn-1} &= 0, \\ -\omega A_{\theta n} + A_{pn} + F_{\theta n-1} &= 0, \\ A_{rn} - Y'_a A_{zn} + F_{rn-1} &= 0, \\ \{-i\omega Y'_a - 2B_0 Y_a(2Y_a + Y_a'^2)\} A_{rn} + \{-2i\omega Y_a - 2B_0 Y_a Y'_a(2Y_a + Y_a'^2)\} A_{zn} \\ &\quad + (Y'_a + 2nY'_a) A_{pn} + 2Y_a A'_{pn} + F_{zn-1} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $F_{rn-1}$ ,  $F_{zn-1}$ ,  $F_{\theta n-1}$ ,  $F_{pn-1}$  は、 $(n-1)$  次までの解によって表される。

同様に、渦崩壊前の解の初項は、

$$\begin{aligned} A_{r0} + i A_{\theta 0} &= 0, \\ A'_{p0} + B_0 Y_{a0}^2 A'_{z0} - 4B_0 Y_a A_{r0} + \frac{1}{2} \{-2i\omega - Y_a^2 B'_0 + B_0 Y_a(ikY_a - 2Y'_a)\} A_{z0} &= 0, \\ B_0 Y_a^2 A'_{r0} + A_{p0} - k B_0 Y_a^2 A_{\theta 0} + \frac{1}{2} \{-2i\omega - Y_a^2 B'_0 + B_0 Y_a(ikY_a - 2Y'_a)\} A_{r0} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

となる。また、逐次近似方程式 ( $n \geq 1$ ) は、以下のように2本の微分方程式と2本の代数方程式から決定さ

せる.

$$\begin{aligned}
 & B_0 Y_a^2 A'_{rn} + \frac{1}{2} \{ -2i\omega - (1+2n)Y_a^2 B'_0 + B_0 Y_a (ikY_a - 2(1+2n)Y'_a) \} A_{rn} + F_{r\,n-1} = 0, \\
 & B_0 Y_a^2 A'_{zn} + \frac{1}{2} \{ -2i\omega + (1-2n)Y_a^2 B'_0 + B_0 Y_a (ikY_a + 2(1-2n)Y'_a) \} A_{zn} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \{ -2k\omega + ik(3+2n)Y_a^2 B'_0 + B_0 Y_a (-8 + k^2 Y_a + 2ik(3+2n)Y'_a) \} A_{rn} + F_{z\,n-1} = 0, \\
 & A_{\theta n} - i(1+2n)A_{rn} + F_{\theta\,n-1} = 0, \\
 & A_{pn} - i k B_0 Y_a^2 A_{rn} + F_{p\,n-1} = 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

渦崩壊前の解の境界条件は,  $y = Y_c$  における力学的条件 (圧力の連続条件) であり, これらから解が決定される. 運動学的条件からは界面の変位が得られる. 擾乱方程式の解の精度を向上させるためには, 級数解を適当なオーダーで切断してこれらの境界条件に代入すれば良い.

最後に, 淀み点  $y = 0, z = 0$  周りの二重級数解を求め, この解の収束域で渦崩壊前後の解を接続することで固有値方程式を導く必要がある.

## 4 まとめ

マイクロバブル発生ノズルで生成される渦崩壊流れの解析を目的にテーバー上に拡大する管路における流れの解析を行ってきたが, 線形安定解析の固有値を数値的に計算する際の精度に問題があることが判明した. そこで, 渦崩壊流れの特徴を有する簡易な解析解を導き, 解析的に擾乱方程式を解くことを試み, 渦核内の擾乱方程式の漸近解を得た. 今後は, 渦崩壊前後の解を渦崩壊の淀み点で接合し, 固有値方程式を導く予定である.

また, 漸変流では, ヘリカルモードの不安定性に軸流の不連続性から生じる Kelvin-Helmholtz の不安定性が必要であるという結果があるが, 淀み点を有する渦崩壊流れに対して同様のことが成立するかどうかについても検討する必要がある.

## 参考文献

- [1] Alekseenko, Kuibin, Okulov & Shtork, Helical vortices in swirl flow, J. Fluid Mech., v. 382, pp. 195-243, 1999.
- [2] Alekseenko, S. V., Kuibin, P. A., Okulov, V. L. & Shtork, S. I.: Vortex Precession in a Gas-Liquid Flow, Heat Transfer Research, 41 (4) (2010) 465- 477.
- [3] Batchelor, G. K.: Axial flow in trailing line vortices, J. Fluid Mech., 20(1964) 645-658.
- [4] Benjamin, T. B., Theory of the vortex breakdown phenomenon, J. Fluid Mech., vol. 14, pp. 593-629, 1962.
- [5] Bers, A.: Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective. In Handbook of Plasma Physics (ed. Rosenbluth, M. & Sagdeev, R.), (1983) 451-517. North-Holland.
- [6] Buntine, J. D. & Saffman, P. G.: Inviscid swirling flows and vortex breakdown, Proc. R. Soc. Lond. A, 449 (1995) 139-153.

- [7] Casanova, J. O. & Feria, R. F.: Three-dimensional transitions in a swirling jet impinging against a solid wall at moderate Reynolds numbers, *Physics of Fluids* 21, 034107 (2009).
- [8] Cassidy, J. J. & Falvey, H. T.: Observations of unsteady flow arising after vortex breakdown, *J. Fluid Mech.*, 41 (1970) 727-736.
- [9] Chanaud, R. C.: Observations of oscillatory motion in certain swirling flows, *J. Fluid Mech.*, 21 (1) (1965)
- [10] Delbende, I., Chomaz, J. M. & Huerre, P.: Absolute/ convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response, *J. Fluid Mech.*, 355 (1998) 229-254.
- [11] Dizes, S. L., Monkewitz, P. A. & Huerre, P.: Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows, *Phys. Fluids*, 7 (6) (1995) 1337-1347.
- [12] Escudier, M. P., Bornstein, J. & Maxworthy, T.: The dynamics of confined vortices, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 382 (1982) 335-360.
- [13] Escudier, M.: Vortex breakdown: Observations and Explanations, *Prog. Aerospace Sci.*, 25 (1988) 189-229.
- [14] Fabre, D. & Jacquin, L.: Viscous instabilities in trailing vortices at large swirl numbers, *J. Fluid Mech.*, 500 (2004) 239-262.
- [15] Fernandes, E. C., Heitor, M. V. & Shtork, S. I.: An analysis of unsteady highly turbulent swirling flow in a model vortex combustor, *Experiments in Fluids*, 40 (2006) 177-187.
- [16] Gallaire, F., Ruith, M., Meiburg, E., Chomaz, J. M. & Huerre, P.: Spiral vortex breakdown as a global mode, *J. Fluid Mech.*, 549 (2006) 71-80.
- [17] Hall, M. G.: Vortex breakdown, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4 (1972) 195-218.
- [18] Hill, D. C.: Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 292 (1995) 183-204.
- [19] Huerre, P. and Monkewitz, P. A.: Local and global instabilities in spatially developing flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22(1990) 473-537.
- [20] Kogawa, H., Naoe, T., Kyotoh, H., Haga, K., Kinoshita, H. & Futakawa, M.: Development of microbubble generator for suppression of pressure waves in mercury target of spallation source, *Journal of Nuclear Science and Technology*, 52(12) (2015) 1461-1469.
- [21] Keller, J. J. & Escudier, M. P.: Theory and observations of waves on hollow-core vortices, *J. Fluid Mech.*, 99 (3) (1980) 495-511.
- [22] Keller, J. J., Egli, W. & Exley, J.: Force- and loss-free transitions between flow states, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 36 (1985) 854-889.
- [23] Keller, J. J., Egli, W. & Althaus, R.: Vortex breakdown as a fundamental element of vortex dynamics, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 39 (1988) 404-440.

- [24] Kuigin & Okulov, Phys. Fluids, v. 10, n. 3, pp. 607-614,1998.
- [25] Kurosaka, M.: Acoustic streaming in swirling flow and the Ranque-Hilsch /vortex-tube/ effect, J. Fluid Mech., 124(1982) 139-172.
- [26] Le Dize's, S. & Fabre, D. : Large-Reynolds-number asymptotic analysis of viscous centre modes in vortices, J. Fluid Mech. 585(2007), 153 - 180.
- [27] Leibovich, S.: The structure of vortex breakdown, Ann. Rev. Fluid Mech., 10 (1978) 221-246.
- [28] Lessen, M., Deshpande, N. V. & Ohanes, B. H.: Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core, J. Fluid Mech., 60 (3) (1973) 459-466.
- [29] Lessen, M., Singh, P. J. & Paillet, F.: The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory, J. Fluid Mech., 63 (1974) 753-763.
- [30] Litvinov, I. V., Shtork, S. I., Kuibin, P. A., Alekseenko, S. V. & Hanjalic, K.: Experimental study and analytical reconstruction of precessing vortex in a tangential swirler, International Journal of Heat and Fluid Flow, 42 (2013) 251-264.
- [31] Loiseleux, T., Chomaz, J. M. & Huerre, P.: The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow, Phys. Fluids, 10 (1998) 1120-1134.
- [32] Lucca-Negro, O. & O' Doherty, T.: Vortex breakdown: a review, Progress in Energy and Combustion Science, 27 (2001) 431-481.
- [33] Luchini, P. & Bottaro, A.: Adjoint equations in stability analysis, Annu. Rev. Fluid Mech., 46 (2014) 493-517.
- [34] Mayer, E. W. & Powell, K. G.: Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex, J. Fluid Mech., 245 (1992) 91-114.
- [35] Michelson, I.: Theory of vortex whistle, the Journal of Acoustical Society of America, 27(5) (1955) 930-931.
- [36] Stewartson, K. & Brown, S. N.: Near-neutral centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex, J. Fluid Mech., 156 (1985) 387-399.
- [37] Olendraru, C., Sellier, A., Rossi, M. & Huerre, P.: Inviscid instability of the Batchelor vortex: Absolute-convective transition and spatial branches, Phys. Fluids, 11 (1999) 1805-1820.
- [38] Parras, L. & Feria, R. F.: Spatial stability and the onset of absolute instability of Batchelor' s vortex for high swirl numbers, J. Fluid Mech., 583 (2007) 27-43.
- [39] Qadri, U. A. , Mistry, D.& Juniper, M. P.: Structural sensitivity of spairal vortex breakdown, J. Fluid Mech., 720 (2013) 558-581.
- [40] Ruith, M. R., Chen, P., Meiburg, E. & Maxworthy, T.: Three-dimensional vortex breakdown in swirling jets and wakes: direct numerical simulation, J. Fluid Mech., 486 (2003) 331-378.

- [41] Syred, N.: A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems, *Progress in Energy and Combustion Science*, 32 (2006) 93-161.
- [42] Theofilis, V.: Global linear instability, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 43 (2011) 319-352.
- [43] Wang, S. & Rusak, Z.: The dynamics of a swirling flow in a pipe and transition to axisymmetric vortex breakdown, *J. Fluid Mech.*, 340 (1997) 177-223.
- [44] 大成博文:マイクロバブル発生装置の開発と技術的確立, *ながれ* 25(2006)191-195.
- [45] 山田, 坂入, 金子, 京藤, 空気吸込み渦の崩壊に伴う微細気泡の生成, *日本流体力学会年会*, AM05-24-002, 2005.
- [46] 京藤, 塩田, コアンダ効果により誘起される渦崩壊と渦笛, *日本流体力学会年会*, AM14-001, 2014.
- [47] 京藤, 固体境界を有する渦崩壊流れの大域的安定性について, *非線形波動現象の数理とその応用*, RIMA 共同研究報告集 (2017)1-15.