

ある種のアフィン面のトポロジーについて

東大 教養 藤田 隆夫

(This article is essentially an abstract of my forthcoming paper "On the topology of non-complete algebraic surfaces".)

対数的小平次元の理論によれば, コンパクトなものに関する古典的な場合と同様に, 代数曲面 (本稿では特に断らない限り複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義されたアフィン曲面とする) は $\bar{\kappa}$ の値により 4 種に分類される:

$\bar{\kappa} = -\infty$: このような曲面に対しては宮西-杉江の ruling 定理 (cf. [MS] & [F1]) が構造研究の手がかりとなる。コンパクトな場合の Castelnuovo の結果に相当する。

$\bar{\kappa} = 0$ 及び $\bar{\kappa} = 1$: これについては $\mathbb{Q}$ -係数因子の Zariski 分解の理論を用いて川又 [Kw] により飯高 fibration の構造に関するくわしい結果が得られている。

$\bar{\kappa} = 2$: 対数的標準多元環が有限生成, というたぐいの

ことはコンパクトの場合同様にできる (cf. [Kw.]) が、くわしい構造ということになるとお手上げ。

ここでは、 $\bar{\kappa} \leq 1$ の曲面に関する上述の理論を応用して、それらの位相的性質 (例えばベッチ数 b_2 , 基本群 π_1 , など) を調べてみることにする。ただし研究の現状は一般理論の構築というのとはちがっており、いくつかのトピックが散発的に (だがお互いに関連しつつ) 出現してきている、と形容するのが妥当であろう。

§1.

$\bar{\kappa} = -\infty$ の場合の理論の応用として次の問題を考える。

問. $f: A^2 \rightarrow S$ を dominant な morphism とする。このとき S はどのような曲面であり得るか?

我々は S が smooth で affine の場合を調べる。

まず、次の lemma より $\pi_1(S)$ は有限群。

Lemma. $\varphi: M \rightarrow N$ が dominant morphism なら、 $\pi_1(M)$ の像は $\pi_1(N)$ 内に於て finite index.

上の補題の証明はやさしい。

次に、代数的小平次元の理論 (cf. [I] etc.) によつて $\bar{\kappa}(S) \leq \bar{\kappa}(A^2) = -\infty$ だから、次の定理が適用できる。

定理 (cf. [MS]). S が smooth affine 曲面で $\bar{\kappa} = -\infty$

ならば, $\bar{S}$ のあるコンパクト化 $\bar{S}$ と, $\bar{S}$ からある曲線 C 上への morphism φ で, φ を $\bar{S}$ に制限したときの一般ファイバーが A^1 であるようなものが存在する。

F を φ の一般ファイバー, $D = \bar{S} - S$ (これは $\bar{S}$ 上の因子) としたとき, 上の条件は $F \cong \mathbb{P}^1$ & $FD = 1$ といふのと同値になる。

そこで, 上のような fibration を持つ曲面の基本群がどうなるかを考えることにしよう。

定義。 C 上の各点 x に対し, x の上のファイバー $X = \varphi^{-1}(x)$ の重複度 μ_x を次のように定義する。まず, C 上の Cartier 因子としての x の引きもどしとしての X を素因子の和に分解し, $X = \sum_i \mu_i Y_i + \sum_j \mu_j Z_j$, ここで $Y_i \not\subset D$, $Z_j \subset D$, と書く。そして $\mu_x = \text{g.c.d.}(\mu_i)$ とする。つまり, φ の $\bar{S}$ への制限 φ_0 の x 上のファイバーの各素因子の係数の最大公約数が μ_x である。もし $X \subset D$ ならば, $\mu_x = \infty$ と規約する。

φ のファイバー F で $F \cong \mathbb{P}^1$, $FD = 1$ となるようなものは有限個しかない。それらを $X_1, \dots, X_r$ とし, S_0 を $S = \bigcup_{p=1}^r X_p$, $C_0 = \varphi(S_0)$ とする。 ~~S_0~~ S_0 は明らかに C_0 上の A^1 -バンドルで, $\pi_1(C_0) \cong \pi_1(S_0)$ と自然に同一視できる。点 $x_p = \varphi(X_p)$ のまわりを一周する loop

が表わす $\pi_1(C_0) \cong \pi_1(S_0)$ の元を δ_p とする。 $\pi_1(C)$ は $\pi_1(C_0)$ を関係 $\delta_1 = \dots = \delta_r = 1$ で割った剰余群である。特に C が rational なる, $\pi_1(C_0)$ は δ_p 達で生成され, それらの間の関係は (適当な標準化の後に) $\delta_1 \dots \delta_r = 1$ で与えられる。

S_0 は S の Zariski open subset であるから, $\pi_1(S)$ は同様に $\pi_1(S_0)$ の剰余群として与えられる。

今 φ のファイバー X の一つの素因子 Y を S から取り除いた曲面を S' とすると, $\pi_1(S)$ は $\pi_1(S')$ の剰余群であって, その核は Y のまわりをまわる loop に当たる $\pi_1(S')$ の元で生成される。これは $\pi_1(S_0) \cong \pi_1(C_0)$ の元 δ^{μ_i} の像に他ならない。但し μ_i は X における Y の重複度。

こうして X_p の各素因子 Y_i に対し $\delta_p^{\mu_i} = 1$ なる関係が $\pi_1(S)$ では生ずるから, $\pi_1(S_0) \rightarrow \pi_1(S)$ の核は関係式 ~~$\delta_1^{\mu_1} = \dots = \delta_r^{\mu_r} = 1$~~ $\delta_1^{\mu_1} = \dots = \delta_r^{\mu_r} = 1$ で与えられる。ただし, $\mu_p = \mu_{x_p}$, $x_p = \varphi(X_p)$ for $p=1, \dots, r$ である。また $\mu_p = \infty$ のときは $\delta_p^{\mu_p} = 1$ は何の関係をも意味しない。

我々が考えているように A^2 で dominate されている場合には S は rational であり, 従って $C \cong \mathbb{P}^1$ である。そこで $\pi_1(S)$ は有限個の元 $\delta_1, \dots, \delta_r$ で生成され, それらの関係は $\delta_1 \dots \delta_r = \delta_1^{\mu_1} = \dots = \delta_r^{\mu_r} = 1$ によって与えられる。こ

で $\mathcal{S}_p$ は φ の特異ファイバー達に対応し, μ_p は χ の重複度 (3ページの def. の意味) に対応する。結果的に $\mu_p = 1$ となる特異ファイバーは無視してよいことになるから, 以下 $\mu_p \geq 2$ と仮定しよう。

上のような群が有限になる場合はよく知られていて次の通りである。

- 1) $r \leq 1$. このとき $\pi_1(S) = \{1\}$.
- 2) $r = 2$ & $(\mu_1, \mu_2) \neq (\infty, \infty)$. このとき $\pi_1(S)$ は cyclic.
- 3) $r = 3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 2, m)$, $m < \infty$. このとき π_1 は m 次の dihedral 群.
- 4) $r = 3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 3, 3)$. π_1 は 4 次交代群.
- 5) $r = 3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 3, 4)$. 4 次対称群 S_4 .
- 6) $r = 3$ & $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 3, 5)$. 5 次交代群 A_5 .

上記 6 つのケースはすべて現実に起こり得る。その理由を略述しよう。他も同様だから 5) の場合に即し記す。

まず, $\varphi_S: S \rightarrow C$ のすべてのファイバーが (重複度を無視すれば) A' になるような曲面を選ぶ。この条件下で重複度 μ のファイバーを構成するには, 一般ファイバー $\textcircled{0}$ を順次 blow-up することにより



なる型のファイバーを構成し, (-1) 以外の成分を S から除けばよい。ただしここで (-2) は自己交点数 μ の $\bar{S}$ 上の $\mathbb{P}^1$ を表わす。

次に有限分岐被覆 $p: \hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 = C$ で $\text{Gal}(\hat{C}/C) \cong S_4$, p の分岐跡は 3 点 x_1, x_2, x_3 , x の上での分岐 order はそれぞれ 2, 3, 4 とするものとする。 $\tilde{S}$ を p による S の引きもどしの normalization とする。このとき x 上の $\tilde{S}$ のファイバーは μ 個の A^1 (重複度 ~~は~~ 1) の disjoint union になる。但し μ は S の x 上のファイバーの重複度で x は x_1, x_2, x_3 のいずれか。これより $\tilde{S}$ の Zariski open subset で $\hat{C}$ 上の A^1 バンドルになるものがある。一方 Hurwitz の公式により $\hat{C}$ の種数が 0 であることが示される。以上をあわせ $\tilde{S}$ は A^2 を開部分集合として持つことがわかる。

かくて $A^2 \subset \tilde{S} \rightarrow S$ が目的の morphism を与える。

注. この問題は全く別の観点から [M] によっても既に取り扱われている。結果もよく似ている。

§2.

$\bar{\kappa} \geq 0$ の場合の研究の出発点として Zariski 分解の理論

を復習する。

定理. E を完備曲面 $\bar{S}$ 上の ($\mathbb{Q}$ -係数) effective divisor とする。そのとき次の条件をみたす有理係数有効因子 N がただ一つ存在する。

i) $H = E - N$ は半正值, 即ち $\bar{S}$ 上の任意の曲線 C に対して $HC \geq 0$.

ii) $X_1, X_2, \dots, X_r$ を N の素因子とすると, それらの交点数行列 $(X_i X_j)$ は負定値。

iii) $HX_j = 0$ for $j = 1, \dots, r$.

定義. H と N は E で定まるから, それぞれ E^+, E^- と書く。
 $E = E^+ + E^-$ を E の Zariski 分解と呼ぶ。

開曲面の分類理論に次の川又の結果 (cf. [Kw]) は重要。

定理. $\bar{S}$ を完備曲面, D を $\bar{S}$ 上の有効因子, D の特異点は node しかない, とし, $S = \bar{S} - D$ とおく。 K を $\bar{S}$ の標準バンドルとする。 $\kappa(S) \geq 0$ なる $K + D$ は $\mathbb{Q}$ -係数 effective divisor で表わせるが, その Zariski 分解については

$$1) \kappa(S) = 0 \iff (K + D)^+ = 0 .$$

$$2) \kappa(S) = 1 \iff (K + D)^+ \neq 0 \text{ \& } (K + D)^{+2} = 0$$

$$3) \kappa(S) = 2 \iff ((K + D)^+)^2 > 0 .$$

注意. $K + D$ の Zariski 分解のあり方は一般には結構複雑になり得る。だが, 以下の2条件 (一種の minimality) が成立

つ時は, $(K+D)^{-}$ を D の dual graph から具体的に計算することができる。

イ) $\bar{S}$ 上の例外曲線 Y (即ち $Y^2 = -1$, $Y \cong \mathbb{P}^1$) で $Y \not\subset D$ なるものについては $Y \cdot D \geq 2$.

ロ) $\bar{S}$ 上の例外曲線 Y で $Y \subset D$ とするものに対しては $Y(D-Y) \geq 3$.

ただし詳細は [F 2] 参照。

$\text{Pic}(\bar{S})$ を D の素因子達で生成される群でわった剰余群を $\text{Pic}(S)$ とおく。実際これは S の完備化のとり方によらない不変量であることが容易に確かめられる。 S が affine で $\text{Spec } A$ なる形の時, $\text{Pic}(S) = 0$ と A が UFD なこととは同値。また, S が rational で $b_2(S) = 0$ ならば $\text{Pic}(S)$ が torsion 群となることも簡単にわかる。

ここでは $\text{Pic}(S)$ が torsion 群 (従って有限群) となる場合を調べてみよう。

定理. $\pi(S) = 1$ ならば $\text{Pic}(S) \neq 0$.

証明のあらすじ。上述の 2 条件 イ), ロ) を満たす場合に帰着させる。この極小の場合には, $K+D$ の Zariski 分解の有様と川又による飯高 fibration の構造理論とをあわせ考えることによって矛盾が出る ($\text{Pic}(S) = 0$ とすると)。詳細略。

注意. $\bar{\kappa} = 1$ でも $Pic(S)$ が有限群となる場合はたくさんある (無限個で簡単には数えられない)。

定理. $\bar{\kappa} = 0$ で $(\bar{S}, D)$ が上述の条件 1), 0) をみたすとする。さらに $Pic(S)$ が有限群と仮定。このとき $(\bar{S}, D)$ は次のどれかのタイプ: $(*)$, $O(1, 1, 1)$, $O(4, 1)$, $O(k+4, -k)$, $H[-1, 0, -1]$, $H[k, -k]$, $Y\{3, 3, 3\}$, $Y\{2, 4, 4\}$, $Y\{2, 3, 6\}$ 。これらのくわしい構造は次の通り。

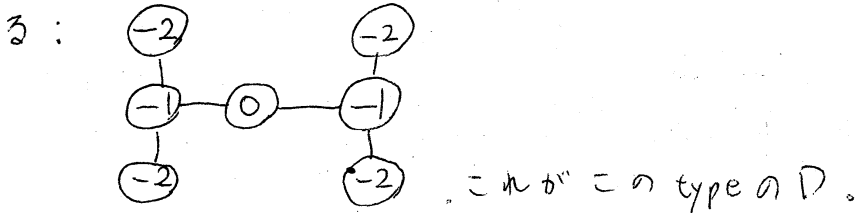
$(*)$ $\bar{S} \cong \mathbb{P}^2$, D は非特異 3 次曲線。

$O(1, 1, 1)$: $\bar{S} \cong \mathbb{P}^2$, D は 3 本の直線, $S \cong A_1^* \times A_1^*$ 。

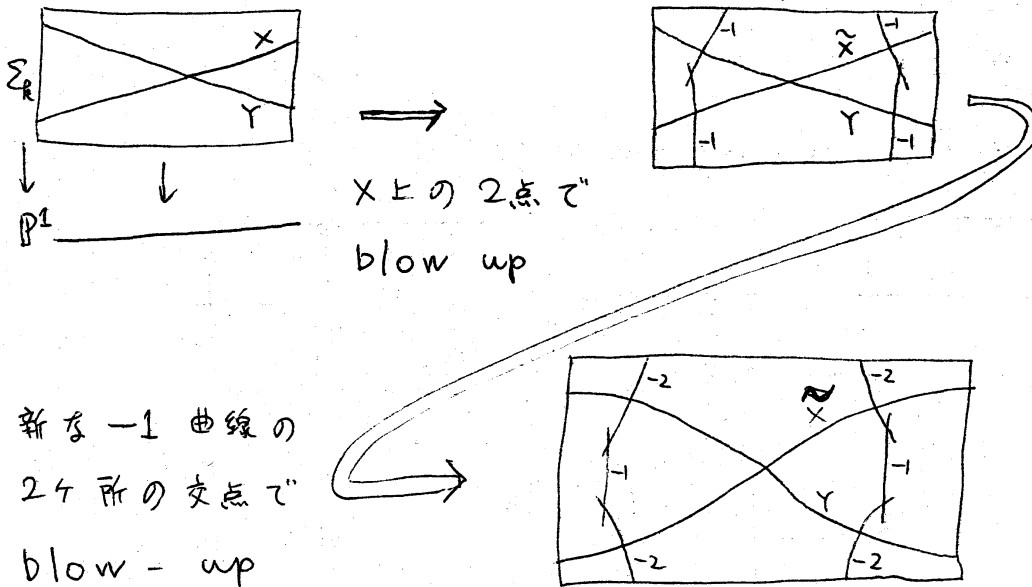
$O(4, 1)$: $\bar{S} \cong \mathbb{P}^2$, $D = C + \ell$, C は非特異 2 次曲線, ℓ は line。

$O(k+4, -k)_{k \geq -1}$: $\bar{S} \cong \Sigma_k \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0))$, $D = Y_1 + Y_2$, Y_1 は $\bar{S}$ 上の $Y_1^2 = -k$ なる唯一の curve, Y_2 は $|Y_1 + (k+2)F|$ の smooth member, ただし F は $\Sigma_k \rightarrow \mathbb{P}^1$ のファイバー。(従って Y_1 も Y_2 も $\Sigma_k \rightarrow \mathbb{P}^1$ の section であって, $Y_1 \cdot Y_2 = 2$ となる)。

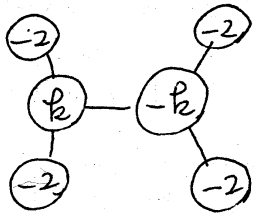
$H[-1, 0, -1]$: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上に bidegree $(2, 1)$ の curve C をとる。第 2 射影を C に制限すると 2 次の分岐被覆となり, 2 点で分岐する。これらの点の上で 2 回ずつ blow-up を行なうと, C の proper transform 及び第 2 射影の 2 つのファイバーの proper transforms として次のような dual graph ができ



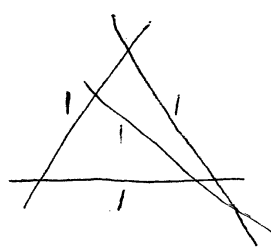
$H[k, -k], k > 0$: Σ_k から出発して次のようにしてこの型は構成される。 Y を $Y^2 = -k$ なる $\Sigma_k \rightarrow \mathbb{P}^1$ の section とし、別に $|Y + (k+1)F|$ の member たる curve X をとる。 X は $XY = 1$ をみたす $\Sigma_k \rightarrow \mathbb{P}^1$ の section になっている。



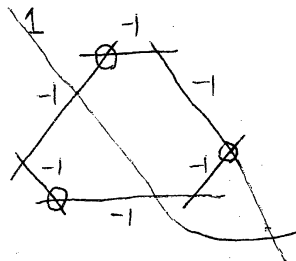
最後の2つの -1 曲線を省いて、 D としては dual graph となるものとする。 $(k), (-k)$ はそれぞれ X 及び Y の proper transform を表わす (もちろん $X^2 = k$)。



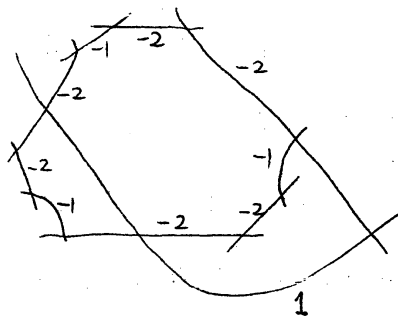
$Y\{3, 3, 3\}$: 上と同様にして構成法を図解しよう。
出発は $\mathbb{P}^2$ 上の4本の lines からである。



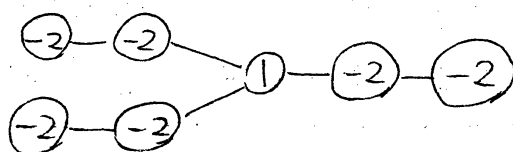
3 交点
blow-up



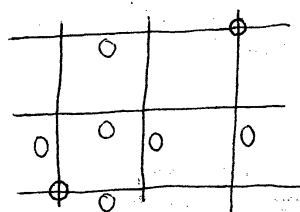
左図 ○印の
3 点 blow up



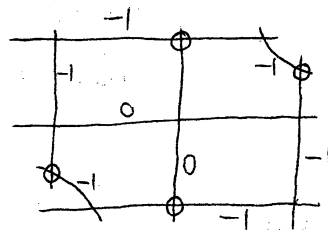
-1 曲線を除き D を得る。dual graph は下の通り。



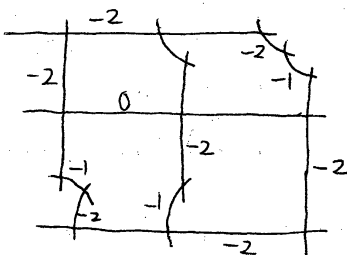
$\Upsilon\{2, 4, 4\}$: $P' \times P'$ の, 2つの射影のそれぞれ3本ずつのファイバーから出発する。



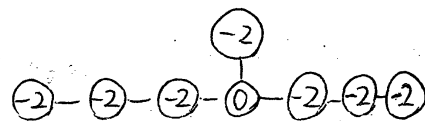
左図 ○印の
2 点 blow up



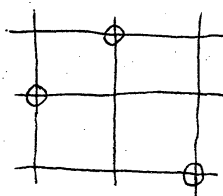
右上図 ○印の
4 点 blow up



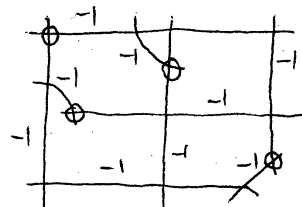
-1 曲線を除き D を得る。dual graph は

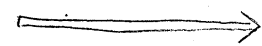


$\Upsilon\{2, 3, 6\}$: 上と同じ $P' \times P'$ 上の田の字形の図形から出発する。



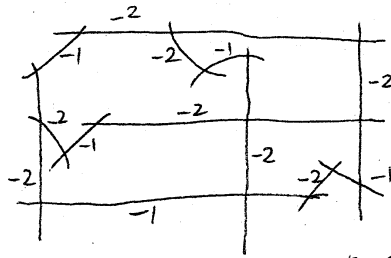
左 ○印の
3 点 blow up





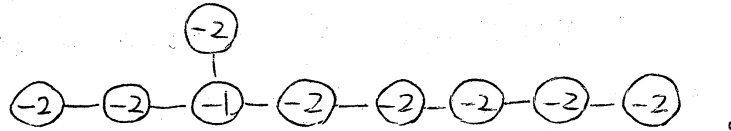
右上図○印の

4点 blow up。



最後に現れた4つの -1 curves を除いて D を得る。その

dual graph は



注意. 極小条件 ι, ρ が満たされないときは, ある種の標準的操作によってモデルを取り代えて (S のものもいくつか変わる) 極小な場合に帰着できる。こうして例えば次が得られる。

系. $\bar{\kappa}(S) = 0$ で $P_{\text{ic}}(S) = 0$ とすると S は O 型。従って特に $b_1(S) > 0$ 。

§3. 応用

定理 (上田・鈴木 [U] & [Su]). $\mathbb{C}^2$ や $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^+$ のコンパクト化はスタンダードなものと双有理同値。

略証. $(\bar{S}, D)$ を S のコンパクト化で $S \cong \mathbb{C}^2$ (双正則) とする。 $b_1(S) = b_2(S) = 0 = H^2(S; \mathbb{Z})$ だから, S は affine であることは容易にわかる。酒井の定理 (cf. [Sa]) によって $\bar{\kappa}(S) = 2$ ではあり得ない (注: 一般には $\bar{\kappa}$ は S のコン

コンパクト化による。非代数的な場合も含めるとコンパクト化は互いに双有理同値に限らない。)。また前々の結果によって $\bar{\pi} = 0$ or 1 であり得ない。よって $\bar{\pi} = -\infty$ 。そこで宮西-杉江の ruling 定理が適用でき、容易に結論に至る。

注。同様の論法は $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の rational compactification にも適用できる。なお上田 [U], 鈴木 [Su] における証明方法は Ramanujan のものに似ておりここで示したものとほぼ全く異なる (結果はもっとくわしい)。

A^2 の場合と同様に、様々な型の曲面に次の cancellation 定理が成立する。

定理. $S \times V \cong X \times V$ となる代数多様体 V, X があれば $S \cong X$ 。

例 1. $S = A^2$. 証明: A^2 は次の cancellation 不変量 $\bar{\pi}, b_1, b_2, b_3, H^2(S; \mathbb{Z})$ によって特徴づけられる。

例 2. S が Y 型の曲面のとき。証明: Y 型曲面は, $\bar{\pi} = 0, b_1 = b_2 = 0, b_3 = 0$, 及び $H^2(S; \mathbb{Z})$ により特徴づけられる。

同様の方法により、他にもこの性質を持つ代数曲面 S がたくさんみつかるとあろう。

参考文献

- [F1] T. Fujita; On Zariski problem, Proc. Japan Acad. 55 (1979), 106-110.
- [F2] T. Fujita; On the topology of non-complete algebraic surfaces, preprint.
- [I] S. Iitaka; On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, Complex Analysis & Algebraic Geometry, pp. 175-189, Iwanami, 1977.
- [Kw] Y. Kawamata; On the classification -----, pp. 215-232, Lecture Notes in Math. 732, Springer, 1979.
- [M] M. Miyanishi; Theory of non-complete alg. surfaces Lecture Notes in Math. 857, Springer
- [MS] M. Miyanishi & T. Sugie; Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 11-42
- [Sa] F. Sakai; Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex Analysis & Algebraic Geometry, p.p. 239-257 Iwanami, 1977
- [Su] M. Suzuki; Compactifications of $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ and $(\mathbb{C}^*)^2$, Tohoku Math. J. 31 (1979) 453-468
- [U] T. Ueda; ibid., same Journal, same volume, 81-90.
- [Z] O. Zariski; Ann. of Math. 76 (1962) 560-615 //