

プラズマにおける二流体不安定性と非線形構造

九大総理工 田中雅慶 (Masayoshi Tanaka)

§1. はじめに

プラズマにおける不安定性の発展と非線形構造の発生¹⁻⁵を調べている。分散効果と非線形効果のつりあいによってソリトンが形成されることはよく知られているが、この研究では不安定系に固有な機構による非線形構造の発生を調べるのが目的である。ここで考える不安定性は電子二流体不安定性と言われるもので、プラズマ中の電子がイオンに対して相対的に速度 V で流れている場合に起こるものである。通常、電子の固有振動 ω_{pe} はイオンの固有振動 ω_{pi} に比べてけた違いに大きいためお互いの相互作用は無視できるが、電子が流れていると、イオンはドップラーシフトした電子の周波数 $\omega_{pe} - kV$ を見る事になり相互作用が可能となる。電子流体は波動を励起した方がエネルギー的に低くなれるので、電子の運動に起因する高周波モードは $\omega_{pe} - kV$ でイオン流体をドライブして低エネルギー化し、低周波モード（イオン）はそのエネルギーを食って不安定化する。一般に電子に限らずプラズマ中に流れがあると、その中の波動は不安定化し streaming instability と呼ばれる。電子二流体不安定性は電子が流れている場合の streaming instability である。

非線形効果としては高周波モードによるポンデロモーティブ力を考える。高周波電場

の振幅を $\hat{E}$ ，周波数を ω_0 とすると，

$$F = -\frac{e^2}{4m\omega_0^2} \partial_x |\hat{E}^2| \quad (1)$$

で与えられる．ここで m は電子の質量， e は電荷である．電子は高周波電場の影響によってジグザグ運動を繰り返すが，電場の振幅が空間的に変化している場合には行きと帰りの移動距離が完全に相殺せず，高周波の周期で平均すると電場の強い方から弱い方へゆっくりと押し出されていくことになる．この効果がポンデロモーティブ効果で，電場の圧力勾配（ $\partial_x E_0^2$ ）によって電子がけちらされる現象である．これは高周波モードによる低周波の非線形効果で，また質量の逆数に比例するため重たいイオンについては考えなくともよい．

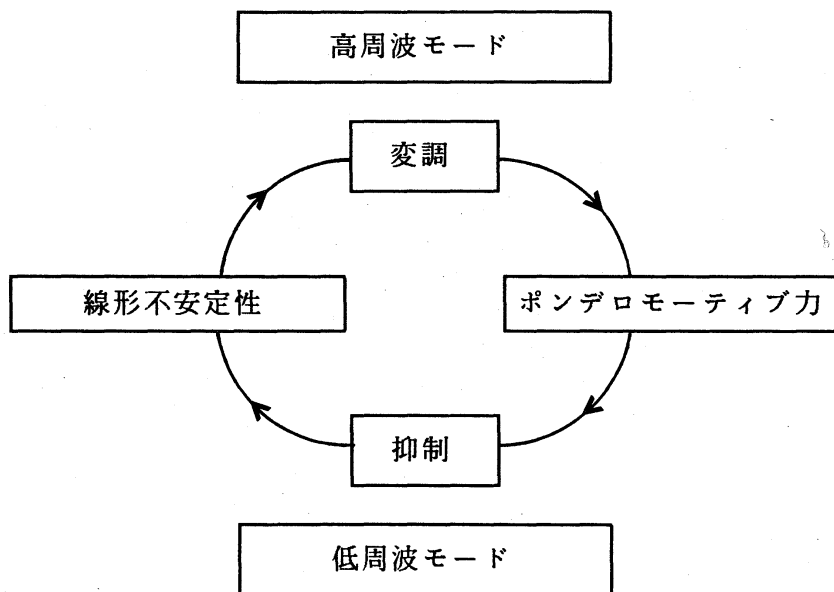


図1. 非線形構造発生シナリオ

いま電子二流体不安定性において系に低周波の摂動が加えられたとする．これは線形に不安定なため成長して密度変化を生じるようになる．この密度変化を通じて高周波モー

ドの振幅に変調が加えられ、 $\partial_x E_0^2$ が生じるようになると、ポンデロモーティブ力が発生する。この効果は低周波モードに作用するが、不安定性を抑制するように働けば線形不安定モードの成長を止めて、ある構造ができそうである。即ち上図に示すようなシナリオで非線形構造の発生が起こる可能性がある。

研究は現在継続中であるが、ここでは基礎方程式とそれに対する1-ソリトン解、周期解を報告する。

§2. 基礎方程式

流体近似でプラズマを記述する。電子に対する連続の式と運動方程式はそれぞれ

$$\partial_t N_e + \partial_x (N_e V_e) = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t V_e + V_e \partial_x V_e = -(e/m)E + F/m \quad (3)$$

のように書ける。 N_e , V_e , m , E はそれぞれ電子密度, 速度, 質量, および電場を表し, F は(1)式で与えられるポンデロモーティブ力である。ここでは, 電子の熱速度は流れの速度に比べて十分小さいとして(3)式の中で圧力勾配による力を無視している。同様にイオンに対しても, 連続の式と運動方程式はそれぞれ

$$\partial_t N_i + \partial_x (N_i V_i) = 0 \quad (4)$$

$$\partial_t V_i + V_i \partial_x V_i = (e/M)E \quad (5)$$

のように書ける。ここで N_i , V_i , M はそれぞれイオン密度, 速度, 質量を表している。電界 E は縦波を考えているのでポアッソンの式によって電子密度およびイオン密度に関係づけられる,

$$\partial_x E = 4\pi e(N_i - N_e) \quad (6)$$

(1) - (6) 式によって方程式は閉じる。今それぞれの物理量を平衡値 (0 印), 低周波の変動 (無印) と高周波の変動 (~ 印) に分け,

$$N_e = n_0 + n_e + \tilde{n}_e, \quad V_e = V + v_e + \tilde{v}_e$$

$$N_i = n_0 + n_i, \quad V_i = v_i$$

$$E = E + \tilde{E}$$

さらに高周波電場 $\tilde{E}$ に対して線形分散を満たす項とゆっくりした振幅変化の項 ($\hat{E}$)

$$\tilde{E} = \hat{E}(x, t) \exp i[k_0 x - \omega_0 t] \quad (7)$$

$$(\omega_0 - k_0 V)^2 = \omega_{pe}^2 \quad (8)$$

を導入して (2) - (6) 式から $\tilde{E}$ と n_e に対する式を書きす表と,

$$-2i(\partial_x + V\partial_x)\hat{E} + V^2\partial_{xx}\hat{E} = -n_e\hat{E} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{C_s^2}\partial_{tt} + 2V\partial_x\partial_t + V^2\partial_{xx} + V^4\partial_{4x}\right)n_e = -\frac{3}{2}V^2\partial_{xx}(n_e)^2 + \frac{1}{\omega_0^2}\partial_{xx}|\hat{E}|^2 \quad (10)$$

を得る。ここでそれぞれの物理量は通常の規格化がなされている。 C_s は規格化されたイオン音波速度で (m/M) に等しい。図 2 に (8) および (10) 式で与えられる線形分散を示す。高周波モードは ω_{pe} (図中 y 軸上 1.0) から傾き V で出ていく直線で、電子の固有振動がビームによって運ばれるために現れるモードである。低周波モードに関しては、(10) 式の線形部分 (左辺) から線形分散

$$\omega = \frac{m}{M}kV \pm i\sqrt{\frac{m}{M}}kV\sqrt{1 - k^2V^2} \quad (11)$$

が得られる。これより波数 k が臨界波数 $k_c = 1/V$ より小さい時には不安定であることがわかる。また、ポンドロモーティブ力 (右辺第二項) は系の安定化に働く。

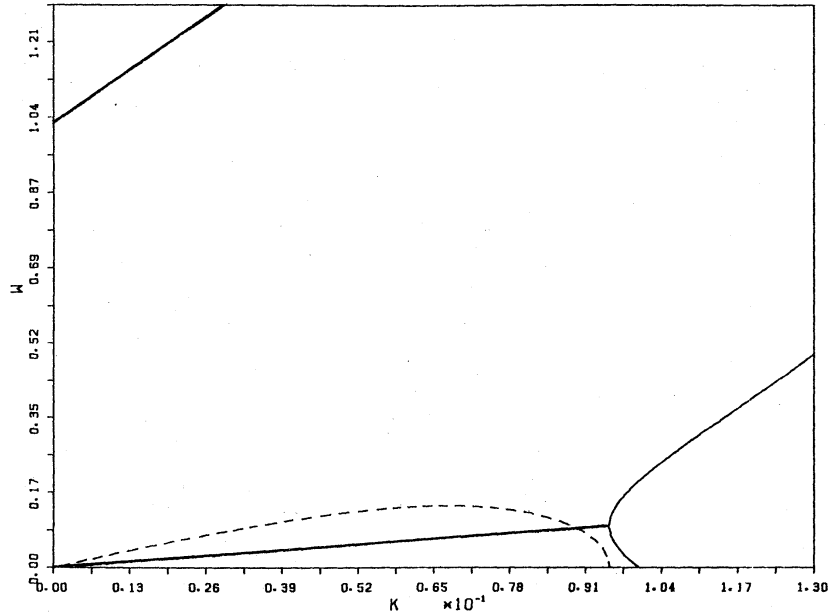


図2 線形分散 ($V = 10$, $M/m = 10$, 破線は成長率)

§3. 孤立波解

簡単のために以後方程式の係数を $1/C_s^2 = 10$, $V = 1$, $\omega_0 = 1$ と仮定する. この方程式の解析解を得るために広田の直接法⁶を用いる. 従属変数変換

$$\hat{E} = g/f, \quad n_e = 2(\log f)_{xx} \quad (12)$$

と以下に定義される双線形演算子

$$D_x^m D_t^n g \cdot f = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n g(x, t) \cdot f(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}$$

を導入すると, 方程式 (9) (10) は双線形形式に書ける.

$$[-2i(D_t + D_x) + D_x^2]g \cdot f = 0 \quad (13)$$

$$[10D_t^2 + 2D_x D_t + D_x^2 + D_x^4 + C]f \cdot f = gg^* \quad (14)$$

ここで C は積分定数である。ソリトン解は積分定数 $C = 0$, $g f$ として指数関数を取ることににより求められる。

$$g = \exp(\eta), \quad f = 1 + a \exp(\eta + \eta^*), \quad C = 0 \quad (15)$$

$$\eta = px + qt + \eta_0, \quad p = K + ik, \quad q = -\Omega - i\omega \quad (16)$$

$$p^2 - 2i(p + q) = 0, \quad a = \frac{1}{8(10\Omega^2 - 2K\Omega + K^2 + 4K^4)} \quad (17)$$

と取ることにより

$$\hat{E} = (a/2)\sqrt{a}\operatorname{sech} \exp(Kx - \Omega t + \alpha) \exp i(kx - \omega t) \quad (18)$$

$$n_e = 2K^2 \operatorname{sech}^2(Kx - \Omega t + \alpha) \quad (19)$$

で与えられる。ソリトンの'dispersion'は(17)の第1式で与えられる。図3に1-ソリトン解を示す。上が高周波電場で下が低周波密度変動である。

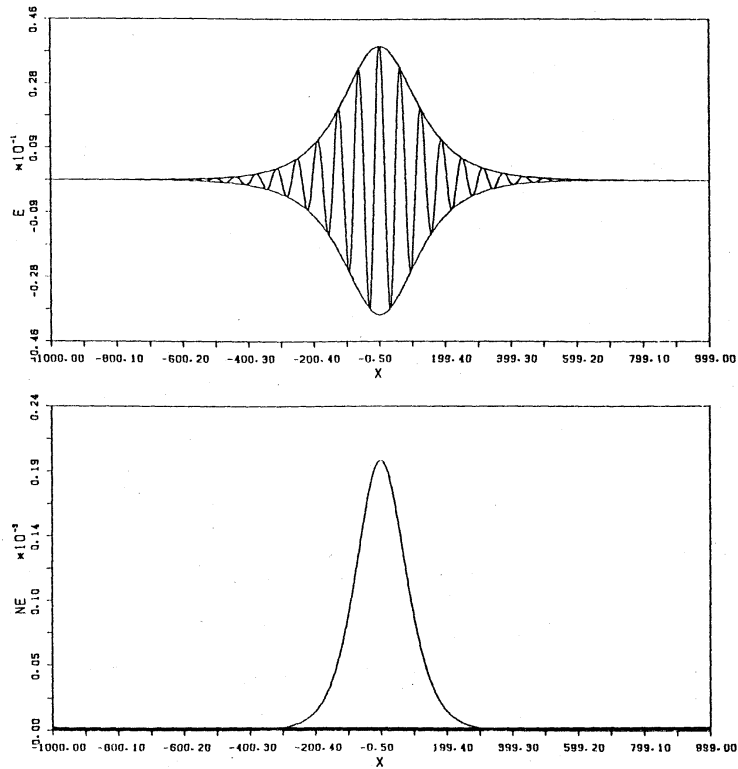


図3 1-ソリトン解 ($K = 0.01, k = 0.1$)

§4. 周期解

(13)(14) 式は $C \neq 0$ の時に周期解^{7,8}を持つ

$$\hat{E} = g/f = b \frac{\theta_3(\eta|\tau)}{\theta_0(\eta|\tau)} \exp i(px + qt + \eta_0) \quad (20)$$

$$n_e = 2(\log f)_{xx} = 2(\log \theta_0)_{xx} \quad (21)$$

を導入する。ここで、 b は未定の定数で、 θ_0, θ_3 は Jacobi の楕円 θ 関数である。

$$\theta_0(\eta|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[2\pi i n \left(\eta - \frac{1}{2} \right) + \pi i \tau n^2 \right] \quad (22)$$

$$\theta_3(\eta|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[2\pi i n \eta + \pi i \tau n^2 \right] \quad (23)$$

$$\eta = Px + Qt + \eta_0 \quad (24)$$

双線形形式は

$$F_1(D_x, D_t)g \cdot f = 0 \quad (25)$$

$$F_2(D_x, D_t)f \cdot f - g \cdot g^* = 0 \quad (26)$$

となる。ここで、

$$F_1(D_x, D_t) = D_x^2 - 2i(D_x + D_t) \quad (27)$$

$$F_2(D_x, D_t) = 10D_t^2 + 2D_x D_t + D_x^2 + D_x^4 + C \quad (28)$$

である。(20)(21)式を(25)に代入すると

$$F_1(D_x, D_t)g \cdot f = b \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{F}_1(m) \exp(2\pi i m \eta) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(m) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1[2\pi i(2n-m)P + ip, \dots] \\ & \times \exp[\pi i(n-m) + \pi i\tau(n^2 + (m-n)^2)] \end{aligned} \quad (30)$$

となる。(29)式は $\hat{F}_1(0) = 0$, $\hat{F}_1(1) = 0$ であれば満たされる事が証明されており、それぞれ

$$q = -p + \frac{p^2}{2} + 4\pi^2 P^2 \frac{A_2(\tau)}{A_0(\tau)} \quad (31)$$

$$Q = P(p-1) \quad (32)$$

を与える。これは周期解の'dispersion'を与える。ここで $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ は

$$A_l(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n)^l \hat{q}^{2n^2} \quad \hat{q} = \exp(i\pi\tau) \quad (33)$$

である。(26) 式から同様に $\hat{F}_2(0) + b^2 = 0$, $\hat{F}_2(1) + b^2 = 0$ が得られ, C を消すことで b が決まる

$$b^2 = 4\pi^2(10Q^2 + 2PQ + P^2) \frac{C_0(\tau)D_2(\tau) - C_2(\tau)D_0(\tau)}{2C_0(\tau)D_0(\tau)} + 16\pi^4 P^4 \frac{C_0(\tau)D_4(\tau) - C_4(\tau)D_0(\tau)}{2C_0(\tau)D_0(\tau)} \quad (34)$$

ここで $C_{0,2,4}(\tau)$, $D_{0,2,4}(\tau)$ は

$$C_l(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n)^l \hat{q}^{2n^2}, \quad D_l(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n-1)^l \hat{q}^{n^2+(n-1)^2} \quad (35)$$

である. $K(k)$ を第一種完全楕円積分, k を母数として新しい変数 P' , Q'

$$P = \frac{P'}{2K(k)}, \quad Q = \frac{Q'}{2K(k)} \quad (36)$$

を導入すると最終的に

$$\begin{aligned} \hat{E} &= b \frac{\theta_3(\frac{\eta'}{2K(k)})}{\theta_0(\frac{\eta}{2K(k)})} \exp i(px + qt + \eta_0) \\ &= \frac{b}{\sqrt{k'}} dn(P'x + Q't | k) \exp i(px + qt + \eta_0) \end{aligned} \quad (37)$$

$$n_e = 2 \left[\log \theta_0 \left(\frac{\eta'}{2K(k)} \right) \right]_{xx} = 2P'^2 \left[dn^2(P'x + Q't | k) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (38)$$

$$\tau = i \frac{K(k')}{K(k)}, \quad \hat{q} = \exp[-\pi \frac{K(k')}{K(k)}], \quad k' = \sqrt{1-k^2} \quad (39)$$

となる. ここで dn は Jacobi の楕円関数, $E(k)$ は第二種完全楕円積分である.

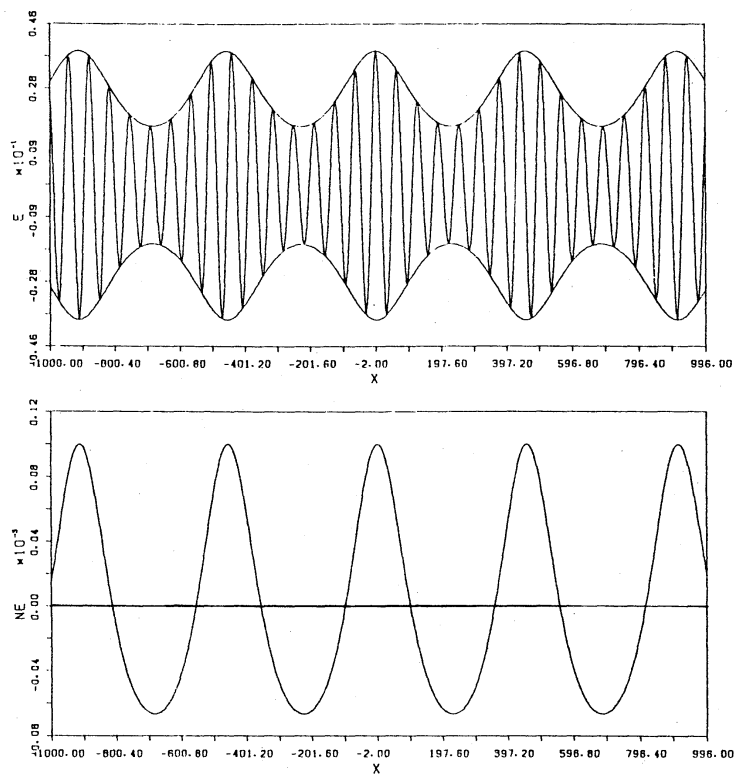


図 4-1 周期解 ($k = 0.9, P' = 0.01, p' = 0.1$)

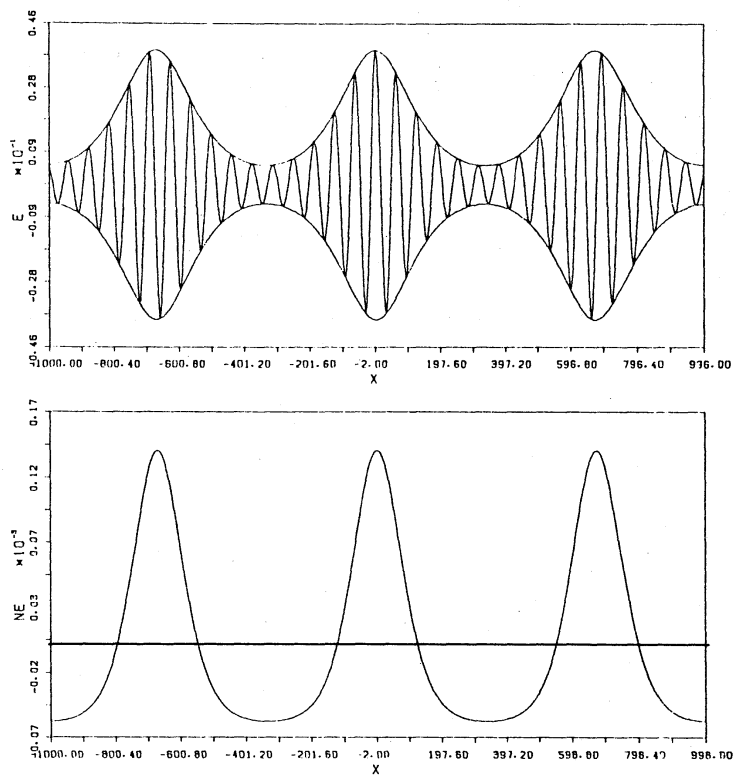


図 4-2 周期解 ($k = 0.99, P' = 0.01, p' = 0.1$)

母数 $k \rightarrow 1$ のとき $dn \rightarrow \text{sech}$, $E(k)/K(k) \rightarrow 0$ に注意すると, この解は $k \rightarrow 1$ のと

き先に求めた孤立波解に移行する（このとき，'dispersion' (31), (32) 式は (17) 第一式と等価になる）。図4に周期解 (37) (38) を示す。上に示すのが高周波電場で下が低周波密度変動である。

先に述べた1-ソリトン解は線形近似に近い $n_e \approx 0$ (パルスの裾野) 部分では $\partial_x \hat{E} \approx 0$ となっているためポンデロモーティブ力による安定化効果はない。したがって，この構造は摂動に対して不安定であろうと予想される。一方，図4に示された周期解は $n_e \approx 0$ 付近で $\partial_x \hat{E} \neq 0$ となっているため本来線形不安定であった部分は安定化されている。したがって，初期擾乱の非線形発展の結果ある構造が発生するとすれば，このような周期的なパルス構造が生まれるのではないかと考えられる。

(38) 式はまた，公式

$$dn^2 u - \frac{E(k)}{K(k)} = \left(\frac{\pi}{2K'} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \frac{\pi K}{K'} \left(\frac{u}{2K} - n \right) - \frac{\pi}{2KK'} \quad (40)$$

により sech^2 の和に分解できることを考慮すると，ここに示したパルス列はソリトンが周期的に並んだソリトン格子⁹とも考えられる。不安定系の非線形発展で実際にソリトン格子が生成されるかどうかは非常に興味のあるところであるが，それを調べるためには微小擾乱に対する初期値問題を扱う必要がある。現在 (9), (10) 式の数値実験を行う準備を進めている。

参考文献

1. N. Yajima and M. Tanaka: Prog. Theor. Phys. Suppl. No.94 (1988) 138
2. M. Tanaka and T. Yajima: *Solitons in Unstable Media*, to appear in *Optical Solitons* (Springer-Verlag)
3. M. Kono: Phys. Fluids **29** (1986) 1268
4. M. Kono and E. Miyashita: Phys. Fluids **31** (1988) 326
5. M. Kono and M. Kawakita: Phys. Fluids **B 2** (1990) 1084
6. R. Hirota: *Direct Methods in Soliton Theory, in Solitons, Topics in Current Physics*, ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey (Springer-Verlag, 1980) Vol. 17
7. A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **47** (1979) 1701
8. A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980) 1365
9. T. Kawahara and S. Toh: Phys. Fluids **31** (1988) 2013