

# ‘あさがお型’の特異値集合からの 4次元閉多様体の復元

小林 真人, 秋田大・教育・数学

Mahito Kobayashi, Department of Math., Akita Univ.

## 1 問題の設定

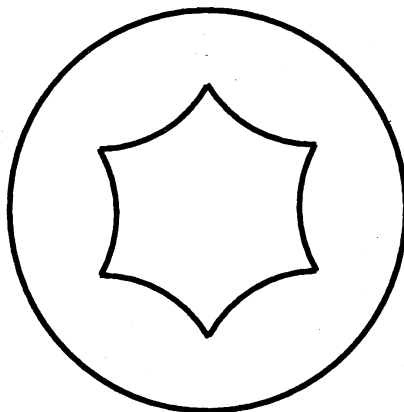


Figure 1:  $D_n(n=6)$

記号:  $D_n$  で Fig.1 の様な  $n$  個の尖点を持つ  $\mathbf{R}^2$  の 1 次元部分集合を表す.

この集合を  $n$ -カスプの ‘あさがお型’ 集合と呼ぶ. 以降  $M$  は 向きとの与えられた滑らかな 4 次元閉多様体,  $f: M \rightarrow \mathbf{R}^2$  は安定写像で, 特異値集合  $C(f)$  が  $D_n$  に regularly homotopic かつ, 全てのファイバー  $f^{-1}(a), a \in f(M)$  が連結なものを考える.

問題:  $M$  の diffeo. type を調べよ, あるいは対  $(M, f)$  の diffeo. type を調べよ.

## 2 中間報告

‘問題’の前半部分について次のことが判った. 後半部分に関しては 注意と補遺 B を参照.

主結果 2.1  $M$  はつぎの多様体のどれかに *diffeomorphic*.

$$(a) \quad kC^2P \# l\overline{C^2P}, \quad (b) \quad mS^2 \times S^2.$$

ただし  $k, l, m$  は 0 以上の整数,  $0N$  は  $S^4$  を意味する.

この結果は より詳しくつぎの様に述べることができる.

1. 対  $(M, f)$  から ‘data’ と呼ばれる量

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \text{ または } \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle^*, a_i \in \mathbf{Z},$$

が抽出される (次節を参照).

2. ‘data’ から  $M$  の oriented diffeo. type が一意に決まる.

3.  $S^4$  に (topological) blow up と  $S^2$  に沿った surgery を施して  $M$  に変形する手順が, ‘data’ から得られる (5 節 Fig.5 参照).

注意: 最終的な目標は ‘data’ による  $(M, f)$  の oriented diffeo. type の分類である. これに関しても 上の 2,3 にあたる結果が成り立つと思われるが, 証明がまだ整備されていない.

$n$  が小さな時には実現可能な ‘data’ をリストアップすることができる (Proposition 3.3 参照). これに対して 3 を実行して見ると, ‘data’ と  $M$  の間のつぎの様な関係が得られる.

## Examples

$n = 2;$

可能な data  $\langle 0, 0 \rangle^*$

$M$  の ori.diffeo.type  $S^4$

$n = 3;$

$\langle -1, -1, -1 \rangle$

$\overline{C^2P}$

$\langle 1, 1, 1 \rangle^*$

$C^2P$

$n = 4;$

$\langle a, 0, -a, 0 \rangle$

$S^2 \times S^2$  (if  $a$  is even)  
or,  $S^2 \tilde{\times} S^2$  (if  $a$  is odd)

$\langle 1, 2, 1, 2 \rangle^*$

$2C^2P$

$\langle -1, -2, -1, -2 \rangle^*$

$2\overline{C^2P}$

$n = 5;$

$\langle 1, 1, c, 0, 1 - c \rangle, c \in \mathbb{Z}$

$2C^2P \# \overline{C^2P}$

$\langle -1, -2, -2, -1, -3 \rangle$

$3\overline{C^2P}$

$\langle -1, -1, c - 1, 0, -c \rangle^*, c \in \mathbb{Z}$

$C^2P \# 2\overline{C^2P}$

$\langle 1, 3, 1, 2, 2 \rangle^*$

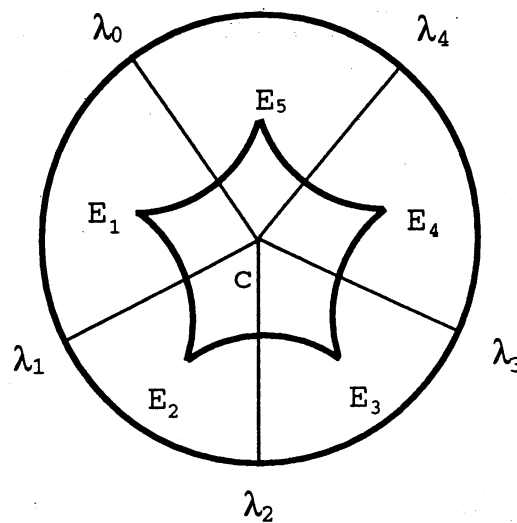
$3C^2P$

注意: 1. 'data' と多様体の向きの関係については 補遺 A を参照.

2.  $D_1$  を実現する  $M$  と  $f$  は存在しない ([K], pp.334-335 参照).

注意 (Neumann-Weintraub の結果)

1. [K] の議論を使うと,  $M$  は  $\bullet - \bullet - \dots - \bullet$  型の graph に沿って  $S^2$  上の  $D^2$  bundle を plumbing して境界つき多様体を作り, そこに  $D^4$  を貼り合わせたものであることが判る ([K] p.343 と次節 Proposition 3.1 を参照). すると, Neumann-Weintraub [NW] の結果あるいは議論から, 主結果と Examples が導かれる.
2. 以下の議論は [NW] とほぼ平行な議論と思われる. しかし, ここでは 最終目標を示すため (補遺 B Conjecture), 全ての議論を写像の変形を通して行なう (すなわち, 多様体のみを変形するのではなく, 同時に写像も変形する). また, これにより, 多様体が復元される様子が写像を通じて視覚的にとらえられる (5 節 Fig.5 参照).

Figure 2:  $D_n(n=5)$  の分割

### 3 ‘data’ のあらまし

**Proposition 3.1**  $D_n$  を Fig.2 のように  $n$  個のセクタ  $E_i$  に分割する. すると, それぞれのセクタの引き戻しは  $D^2 \times D^2$  と *diffeomorphic* である. さらに, セクタを構成する 2 辺の引き戻しは  $\partial D^2 \times D^2$  と  $D^2 \times \partial D^2$  に対応する.

上の命題により,  $M$  は  $n$  個の  $D^2 \times D^2$  を貼り合わせて作られる. 貼り合わせ  $D^2 \times S^1 \rightarrow S^1 \times D^2$  はつぎのタイプであることが, 写像  $f$  の様子からすぐに判る ([K] Prop.3.2).

$$\begin{aligned} \langle l, m \rangle &= \langle l, m \rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \text{または} \\ \langle l, m \rangle &= \langle l, m \rangle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ただし,  $l = S^1 \times \{0\}$ ,  $m = 1 \times \partial D^2$ .

上のタイプの貼り合わせを  $a$ , 下のタイプを  $a^*$  と略記すれば,  $(M, f)$  から列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  または  $(a_1, a_2, \dots, a_n^*)$  が取り出せる. ( $m$  の向きを adjust すれば,  $*$  タイプの貼り合わせを最後の一か所にできる.)

記号:

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  で  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の cyclic permutations を表す.

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle^*$  でつぎの同値類を表す;

$$(a_1, a_2, \dots, -a_n^*) \sim (a_n, a_1, a_2, \dots, -a_{n-1}^*) \sim \dots \sim (a_2, \dots, a_n, -a_1^*).$$

定義: 上の同値類を  $M$  の  $f$  による decomposition data (あるいは単に 'data') という.

つぎの命題は ほぼ明らかである.

**Proposition 3.2** 1.  $(M, f)$  から decomposition data が一意に取り出せる.

2. decomposition data から  $M$  の oriented diffeo. type が一意に復元される.

記号:  $M \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle (*, \text{resp.})$  で decomposition data  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle (*, \text{resp.})$  から復元された多様体を表す.

与えられた同値類が 'data' として実現されるか否か (すなわち,  $n$  箇所の貼り合わせが consistent か否か) の条件は, つぎのように書き下せる.

**Proposition 3.3** 同値類  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle (*, \text{resp.})$  がある  $(M, f)$  の decomposition data  $\Leftrightarrow$

$$T_{a_n} \cdot J \cdot T_{a_{n-1}} \cdot J \cdots T_{a_1} \cdot J = I \quad (\text{resp. } -I) \quad \cdots \quad \text{aux. equation.}$$

ただし,

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意: 最終目標を示すための鍵は, Proposition 3.2 の 2 を  $(M, f)$  について示すことである. この証明を 'きっちり' つけるのが悩ましい.

## 4 多様体の復元

decomposition data  $d = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  または  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle^*$  から多様体を復元する手続きをあたえる.

**Proposition 4.1** data の少なくとも一つの成分  $a_i$  は 0 または  $\pm 1$ .

この命題はつぎの2つの補題から従う.

**Lemma 4.2**  $a_1, \dots, a_n$  を対角成分に持つつぎの3重対角行列を  $A$  と書く.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

$A_1$  で,  $n$  行と  $n$  列を除いた  $(n-1)$ -小行列,  $A'_1$  で, 1 行と 1 列を除いた  $(n-1)$ -小行列,  $A_2$  で, 1,  $n$  行と 1,  $n$  列を除いた  $(n-2)$ -小行列, を表す. すると,

$$\text{aux. eq} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\det A_2 & \det A_1 \\ -\det A'_1 & \det A \end{pmatrix} = \pm I.$$

**Lemma 4.3** もし全ての  $|a_i| > 1$  ならば  $|\det A| > 1$ .

**Proposition 4.4 (topological blow down)**

$$d = \langle \dots, a_2, a_1, 1, b_1, b_2, \dots \rangle (*)$$

のとき,

$$\begin{aligned} d_1 &= \langle \dots, a_2, a_1 - 1, b_1 - 1, b_2, \dots \rangle (*), \\ d_2 &= \langle 1, 1, 1 \rangle^* \end{aligned}$$

とおく.

1.  $d_1, d_2$  はともにある  $(M, f)$  の *decomposition data* として実現される.
2.  $Md \cong_+ Md_1 \# Md_2$ .
3.  $Md_2 \cong_+ \mathbf{C}^2 P$ .

**Proposition 4.5 (blow down)**

$$d = \langle \cdots, a_2, a_1, -1, b_1, b_2, \cdots \rangle (*)$$

のとき,

$$\begin{aligned} d_1 &= \langle \cdots, a_2, a_1 + 1, b_1 + 1, b_2, \cdots \rangle^* (* \text{ なし}), \\ d'_2 &= \langle -1, -1, -1 \rangle \end{aligned}$$

とおく.

1.  $d_1, d'_2$  はともにある  $(M, f)$  の *decomposition data* として実現される.
2.  $Md \cong_+ Md_1 \# Md'_2$ .
3.  $Md'_2 \cong_+ \overline{C^2P}$ .

この二つの命題は, 写像  $f$  を Fig.3 のように変形することで証明できる. すなわち, elimination of cusps ([L]) の逆操作であらたに2つのカスプを作り,  $D_3$  型特異値を持つ多様体をちぎり取る. それぞれの命題の3は, Proposition 3.1 から明らか.

**Proposition 4.6 (surgery)**

$$d = \langle \cdots, a_2, a_1, 0, b_1, b_2, \cdots \rangle (*)$$

のとき,

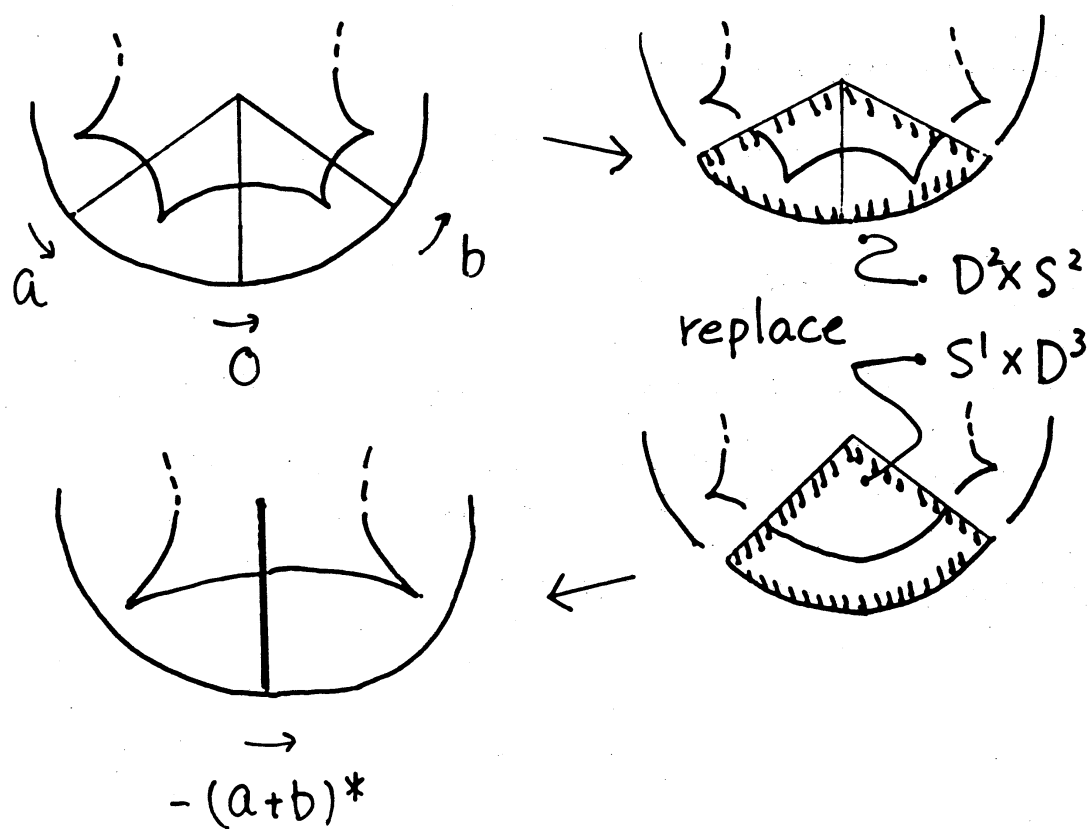
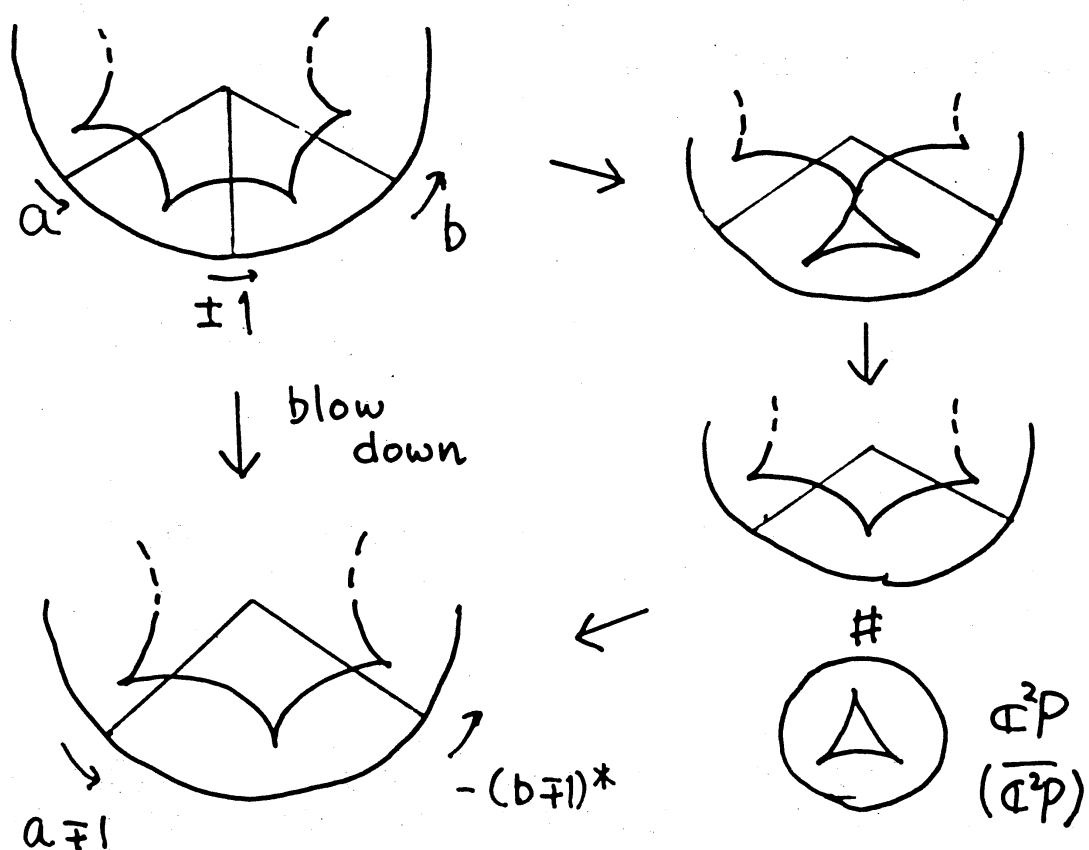
$$d_1 = \langle \cdots, a_2, a_1 + b_1, b_2, \cdots \rangle^* (* \text{ なし})$$

とおく.

1.  $d_1$  は, ある  $(M, f)$  の *decomposition data* として実現される.
- 2.

$$Md \cong_+ \begin{cases} Md_1 \# S^2 \times S^2 & (a_1, b_1 \text{ 共に even のとき}) \\ Md_1 \# S^2 \tilde{\times} S^2 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

証明の概略については Fig.4 を参照.



以上の命題を繰り返し用いて、つぎの事が判る.

$$Md \cong_+ Md_0 \# \quad C^2P, \overline{C^2P}, S^2 \times S^2, S^2 \tilde{\times} S^2 \text{の連結和} \quad ',$$

ただし,  $d_0$  は長さ 2 の (実現可能な) data. 一方, つぎの命題は容易に示せるので,  $d$  からの多様体の復元が終了する.

- Proposition 4.7** 1. ある  $(M, f)$  の *decomposition data* として実現可能な長さ 2 の data は  $\langle 0, 0 \rangle^*$  のみ.  
 2.  $M \langle 0, 0 \rangle^* \cong_+ S^4$ .

## 5 復元の実行例

前節の手続きを実行して

$$\begin{aligned} M \langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle &\cong_+ C^2P \# S^2 \times S^2 \\ &\cong_+ C^2P \# S^2 \tilde{\times} S^2 \end{aligned}$$

を示した例を載せる (Fig.5).

## 6 補遺

### A, data と多様体の向き

*decomposition data* と 多様体の向きに関してつぎが成り立つ.

**Proposition 6.1 (inverse rule)**  $d = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  に対して

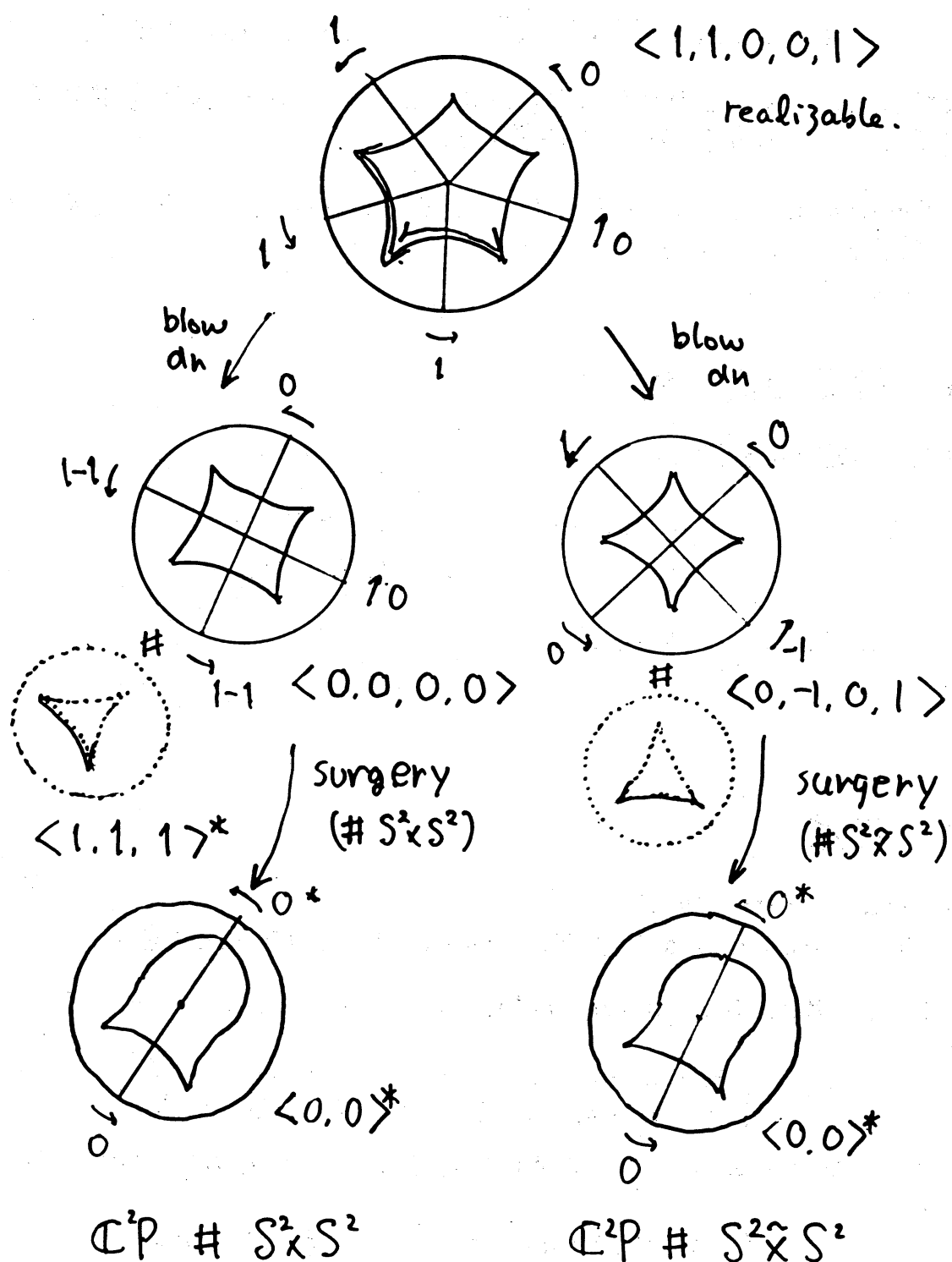
$$d' = \begin{cases} \langle -a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1 \rangle & (n \text{ even のとき}) \\ \langle -a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1 \rangle^* & (n \text{ odd のとき}) \end{cases}$$

とする. また  $d = \langle \dots \rangle^*$  に対しては  $d'$  の  $*$  の付け方を反対にする. すると,

$$d \text{ が } (M, f) \text{ の data} \iff d' \text{ が } (\bar{M}, f) \text{ の data.}$$

### B. $(M, f)$ の分類

この研究の目標はつぎを示す事である.

Figure 5:  $\langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$  からの復元

**Conjecture 6.2**  $(M, f)$  の *decomposition data* は  $f$  の  $\mathcal{R}_+\mathcal{L}$ -class と 1-1 に対応する.

### C. 交叉行列と\*

data から  $M$  の 交叉行列がつぎのように復元される. data から連続する  $n-2$  個の成分を取り出す. それを対角成分とする 3 重対角行列を  $I_M$  と書く (4 節で定義した  $(n-2)$  行列  $A_2$  は, その一例). この行列  $I_M$  は  $M$  の 交叉行列. data が  $*$  を持つとき, 交叉行列の行列式は 1, そうでないとき  $-1$  となる.

### D. toric manifolds

Non-singular toric surface は ‘あさがお型’ の特異値集合をもつ安定写像  $f$  を持つ ([K], p.342 の写像  $f_1$  を用いる). このとき,  $f$  は moment map を摂動して安定にした写像である ([KF]).

## References

- [K] M. Kobayashi, *Simplifying certain stable mappings from simply connected 4-manifolds into the plane*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 327–349.
- [K1] M. Kobayashi, *4-manifolds restored over the 2-disc by stable maps with the critical value set  $D_5$* , Mem. Coll. Edu. Akita Univ. (Natural Science) **50** (1996), 39–48.
- [KF] M. Kobayashi and T. Fukui, in preparation.
- [L] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3**, suppl. 2 (1965), 263–296.
- [NW] W.D. Neumann and S. Weintraub, *Four-manifolds constructed via plumbing*, Math. Ann. **238** (1978), 71–78.

Department of Mathematics  
Akita University  
Akita 010, Japan

e-mail: mahito@math.akita-u.ac.jp