

特異性を持つポテンシャルに対する NON-COLLISION な周期軌道の存在について

平野載倫 (NORIMICHI HIRANO)[†]・塩路直樹 (NAOKI SHIOJI)[‡]
[‡] 横浜国立大学 (YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. 序

$\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ におけるハミルトン系

$$(P) \quad \ddot{u}(t) + V'(u(t)) = 0$$

の non-collision な T -周期解の存在について考える。ここで、 $V \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ は、原点において特異性を持ち得る関数で、 $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上 $V < 0$ を満たし、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき $V(x) \rightarrow 0$ 及び $V'(x) \rightarrow 0$ を満たすとする。 V がいわゆる strong force 条件を満たすときは、この問題に対しては [3, 6, 7, 8] など多くの結果がある。大雑把に言って、strong force 条件とは、2 以上のある定数 α に対し原点の近傍で $V(x) \approx -1/|x|^\alpha$ が成り立つことをいう。ここで考える問題の解は、

$$F_T u = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t)|^2 - V(u(t)) \right) dt, \quad u \in \Lambda_T$$

で定義される汎関数 $F_T : \Lambda_T \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点で与えられる。ただし、 $\Lambda_T = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) : u(t) \neq 0, u(\cdot + T) = u(\cdot)\}$ は、Hilbert 空間 $H_T = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) : u(\cdot + T) = u(\cdot)\}$ の開部分集合である。strong force 条件は、点列 $\{u_n\} \subset \Lambda_T$ が $H_T \setminus \Lambda_T$ のある点に弱収束するとき $F_T u_n \rightarrow \infty$ を示し、いわゆる Palais-Smale 条件がすべての正の実数のレベルで成り立つことを導く。このことから、正数が F_T の臨界値でないとすれば deformation の議論ができることがわかるので、うまく定義された正のミニマックス値は臨界値となる。詳しくは、[3, 8] を参照せよ。

V が strong force 条件を満たさないときは、 $\{u_n\} \subset \Lambda_T$ が $H_T \setminus \Lambda_T$ のある点に弱収束しても $F_T u_n \rightarrow \infty$ となるとは限らない。それゆえ、正のミニマックス値が臨界値になるとは限らない。この困難を克服し、この問題は [1, 2, 4, 5, 9, 10] で議論されている。特に、原点の近傍で $V(x) \approx -1/|x|$ となるときは、この問題は極めて難しい。この場合を扱っているのは、Ambrosetti-Coti Zelati [1] 及び Giannoni [5] の他には見当たらない。[1] において、原点のある星形有界開近傍の境界上のすべての点で V は最大値を取り、 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x)$ は V の最大値より小さいなどの仮定のもとで、 T が十分大きいとき求める解が存在するという結果が得られている。[5] の結果も同様のものである。

ここでは、原点の近傍で $V(x) \approx -1/|x|$ でもよく、 V は最大値に達する点がない場合を考え、 T が十分大きいとき求める解が存在するという結果を示す。

定理. N を 3 以上の自然数とし、 $V \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ は

すべての $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ に対し $V(x) < 0$

$|x| \rightarrow \infty$ のとき $V(x) \rightarrow 0, V'(x) \rightarrow 0$

$\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) < 0$

を満たし、

$$|x| \geq R \text{ ならば } \frac{a}{|x|^\alpha} \leq -V(x) \leq \frac{b}{|x|^\alpha}$$

を満たす $R > 0$, $\alpha > 1$, $a > 0$, $b > 0$ が存在すると仮定する。 $1 < \alpha < 2$ の場合は

$$a\delta(\alpha) > b$$

が成り立つことも仮定する。ここで、

$$\delta(\alpha) = \frac{2^{1+\alpha} \left(\int_0^{\pi/2} |\sin s|^{2/\alpha} ds \right)^\alpha}{(2-\alpha)^{(2+\alpha)/2} (\pi^2 \alpha)^{\alpha/2}}$$

である。このとき、 T_0 以上の T に対し (P) の *non-collision* な T -周期が存在するという条件を満たす $T_0 > 0$ が存在する。

註. $1 < \alpha < 2$ ならば $\delta(\alpha) > 1$ である。

2. 定理の証明

$\alpha \geq 2$ の場合は $1 < \alpha < 2$ の場合よりやさしいので、後者の場合のみ示す。以下では、 $1 < \alpha < 2$ を仮定する。

$T > 0$ とする。 $S_T^1 = [0, T] / \{0, T\}$ とし、 $H_T = H^1(S_T^1, \mathbb{R}^N)$ と置き、 $u, v \in H_T$ に対し内積を $\langle u, v \rangle_{H_T} = \int_0^T ((u(t), v(t)) + (\dot{u}(t), \dot{v}(t))) dt$ と定めることにより H_T を Hilbert 空間とみなす。ただし、 $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^N$ における通常の内積である。

$$\tilde{H}_T = \left\{ u \in H_T : \int_0^T u(t) dt = 0 \right\}, \quad \Lambda_T = \{ u \in H_T : \text{すべての } t \in S_T^1 \text{ に対し } u(t) \neq 0 \}$$

とする。一般性を失うことなく

$$|x| \leq R \text{ ならば } \frac{a}{R^\alpha} \leq -V(x)$$

が成り立つとしてよい。 $\hat{V} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V(x) & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ のとき} \\ \overline{\lim}_{|y| \rightarrow 0} V(y) & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め、汎関数 $I_T : H_T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を

$$I_T u = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t)|^2 - \hat{V}(u(t)) \right) dt, \quad u \in H_T$$

と定める。 $p > 0$ に対し、 $I_{p,T} : H_T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を

$$I_{p,T} u = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t)|^2 + \frac{p}{|u(t)|^\alpha} \right) dt, \quad u \in H_T$$

と定め、

$$c_p(T) = \min I_{p,T}(\tilde{H}_T), \quad \bar{c}_p(T) = \min I_{p,T}(H_T \setminus \Lambda_T)$$

と置く。 $I_{p,T}$ は、 H_T において弱点列下半連続で、 $\tilde{H}_T$ と $H_T \setminus \Lambda_T$ の両方でコアシブであることから、上記の2つはいずれも最小値に達する点が存在することを注意しておく。 [9, Propositions 2.1 and 2.2] により、 $c_p(T)$ 及び $\bar{c}_p(T)$ の値は次の通りである。

補助定理 1. $p > 0$ 及び $T > 0$ に対し、

$$c_p(T) = \frac{2+\alpha}{2\alpha} ((2\pi)^\alpha \alpha)^{\frac{2}{2+\alpha}} p^{\frac{2}{2+\alpha}} T^{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}}, \quad \bar{c}_p(T) = (\delta(\alpha))^{\frac{2}{2+\alpha}} c_p(T)$$

である。

$(b/(\delta(\alpha)a))^{2/(2+\alpha)} < \beta < 1$ を満たす定数 β をとり、

$$d(T) = \beta \bar{c}_a(T) - \frac{4\alpha\sqrt{a}}{2-\alpha} R^{\frac{2-\alpha}{2}}, \quad T > 0$$

と置く。

補助定理 2.

$$T \geq T_1 \text{ のとき } \{u \in H_T : I_T u < d(T)\} \subset \Lambda_T$$

を満たす $T_1 > 0$ が存在する。

証明. $T > 0$ とする。

$$W(x) = \begin{cases} -\frac{a}{|x|^\alpha} & |x| \geq R \text{ のとき} \\ -\frac{a}{R^\alpha} & |x| \leq R \text{ のとき} \end{cases}$$

とし、

$$J_T u = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{u}(t)|^2 - W(u(t)) \right) dt, \quad u \in H_T$$

と定める。 $I_T \geq J_T$ を注意しておく。 T が十分に大きいとき $\min J_T(H_T \setminus \Lambda_T) \geq d(T)$ が成り立つことを示せば、証明は完結する。[9, Proposition 2.2] で用いられた評価法を用いる。 $e \in S^{N-1}$ とすると、

$$\min J_T(H_T \setminus \Lambda_T) = \min_{\rho \in H_0^1([0, T], \mathbb{R}_+)} \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{\rho}(t)|^2 - W(\rho(t)e) \right) dt$$

が成り立つ。 $\rho \in H_0^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ を、 $J_T(\rho e) = \min J_T(H_T \setminus \Lambda_T)$ を満たすようにとる。すべての $t \in [0, T]$ に対し $\rho(t) \leq R$ となる場合は、 $aT_2/R^\alpha \geq \bar{c}_a(T_2)$ を満たす $T_2 > 0$ とれば、 $T \geq T_2$ のとき $J_T(\rho e) \geq aT/R^\alpha \geq \bar{c}_a(T) > d(T)$ が成り立つ。以下、 $\rho(t) > R$ となる $t \in [0, T]$ が存在すると仮定する。このとき、 $[0, t_0]$ において ρ は狭義単調増加で、 $[t_1, T]$ において ρ は狭義単調増加となり、 $[t_0, t_1]$ において ρ は定数となるような $t_0 \leq t_1$ を満たす $t_0, t_1 \in (0, T)$ が存在する。 $\rho^{-1}(R)$ は2点を含むだけだから、 $\rho(t) < R$ を満たす $t \in [0, T]$ に対し $f(t) = 0$ と置き、 $\rho(t) > R$ を満たす $t \in [0, T]$ に対し $f(t) = a\alpha/(\rho(t))^{\alpha+1}$ と置くことにより $f \in L^\infty([0, \infty], \mathbb{R})$ が定められる。 ρe は J_T が $H_T \setminus \Lambda_T$ 上で最小値に達する点だから、任意の $\varphi \in C_0^\infty((0, T), \mathbb{R})$ に対し、 ρe における φe 方向への汎関数 J_T の Gâteaux 微分は0である。したがって、

$$(1) \quad \int_0^T \dot{\rho}(t) \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt$$

が、すべての $\varphi \in C_0^\infty((0, T), \mathbb{R})$ に対して成り立つ。よって、 $\dot{\rho}$ は $(0, T)$ 上連続になり、 $\rho(t) \neq R$ を満たす $t \in (0, T)$ に対し $\ddot{\rho}(t) + f(t) = 0$ が成り立ち、 $t \in (0, T)$ に依存しない

ある負定数 E_J に対して

$$(2) \quad \begin{cases} E_J = \frac{1}{2}(\dot{\rho}(t))^2 - \frac{a}{R^\alpha} & t \in (0, t^*) \cup (T - t^*, T) \text{ のとき} \\ E_J = \frac{1}{2}(\dot{\rho}(t))^2 - \frac{a}{(\rho(t))^\alpha} & t \in (t^*, T - t^*) \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。このことから、 $t \in [0, T]$ に対し $\rho(t) = \rho(T - t)$ が成り立ち、 $t_0 = t_1 = T/2$ となり、 $t^* = R/\sqrt{2E_J + 2a/R^\alpha}$ と置くと $\rho(t^*) = \rho(T - t^*) = R$ となることがわかる。

(1) により $\int_0^T (\dot{\rho}(t))^2 dt = \int_{t^*}^{T-t^*} a\alpha/(\rho(t))^\alpha dt$ が成り立ち、この式と(2)により $J_T(\rho e) = (1/2 + 1/\alpha) \int_0^T \dot{\rho}^2 dt + 2at^*/R^\alpha$ 及び $-TE_J = (1/\alpha - 1/2) \int_0^T \dot{\rho}^2 dt + 2at^*/R^\alpha$ を得る。よって、

$$J_T(\rho e) = -\frac{2+\alpha}{2-\alpha} TE_J - \frac{2\alpha}{2-\alpha} \frac{2aR^{1-\alpha}}{\sqrt{2E_J + 2a/R^\alpha}}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} - \frac{R}{\sqrt{2E_J + 2a/R^\alpha}} &= \frac{T}{2} - t^* = \int_R^{(-a/E_J)^{1/\alpha}} \frac{1}{\dot{\rho}} d\rho \\ &= \int_R^{(-a/E_J)^{1/\alpha}} \frac{d\rho}{\sqrt{2E_J + 2a/\rho^\alpha}} = \frac{\sqrt{2a}^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha(-E_J)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \int_{\sin^{-1}(R^{\alpha/2}\sqrt{-E_J/a})}^{\pi/2} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}} ds \end{aligned}$$

も成り立つ。この式から、 T が十分大きいとき、負定数 E_J は、十分 0 に近いかわるいは $-a/R^\alpha$ に近いことがわかる。ところが、後者の場合は起こらない。なぜなら、そのときは $J_T(\rho e) = O(T)$ であるが、前者の場合は $J_T(\rho e) = O(T^{(2-\alpha)/(2+\alpha)})$ となるからである。したがって、 $\beta = (\int_{\theta}^{\pi/2} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}} ds / \int_0^{\pi/2} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}} ds)^{2\alpha/(2+\alpha)}$ を満たす定数 $\theta \in (0, \pi/2)$ を取ると、 $T \geq T_3$ ならば $\sin^{-1}(R^{\alpha/2}\sqrt{-E_J/a}) < \theta$ を満たす $T_3 (\geq T_2)$ が存在する。よって、 $T \geq T_3$ のとき

$$\frac{T}{2} \geq \frac{\sqrt{2a}^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha(-E_J)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \int_{\theta}^{\pi/2} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}} ds$$

が成り立つ。さて、 $I_{a,T}u = \min I_{a,T}(H_T \setminus \Lambda_T)$ 及び $u(0) = u(T) = 0$ を満たす $u \in H_T \setminus \Lambda_T$ をとり、 $E_I = |\dot{u}(t)|^2/2 - a/|u(t)|^\alpha$ と置く。 E_I も $t \in (0, T)$ によらない定数である。上と同様の評価で、 $T > 0$ に対し

$$\frac{T}{2} = \frac{\sqrt{2a}^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha(-E_I)^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}} \int_0^{\pi/2} (\sin s)^{\frac{2}{\alpha}} ds$$

を得る。よって、 $T \geq T_3$ のとき、 $E_J/E_I \geq \beta$ が成り立つ。 $T \geq T_1$ ならば $E_J \geq -a/(2R^\alpha)$ となる $T_1 (\geq T_3)$ を取る。 $I_{a,T}u = -(2+\alpha)/(2-\alpha)TE_I$ に注意して、 $T \geq T_1$ のとき

$$J_T(\rho e) \geq -\frac{2+\alpha}{2-\alpha} TE_I \beta - \frac{4\alpha\sqrt{a}}{2-\alpha} R^{\frac{2-\alpha}{2}} = d(T)$$

を得る。よって、証明された。 $\square$

T_1 を補助定理 2 で得られた定数とし、 $d(T_0) > c_b(T_0)$ を満たす $T_0 (\geq T_1)$ を取る。以下では、 $T \geq T_0$ とする。

Λ_T において I_T は Fréchet 微分可能であることを注意する。 $u \in \Lambda_T$ に対し、 $\nabla I_T u$ は、すべての $v \in H_T$ に対し

$$\langle \nabla I_T u, v \rangle_{H_T} = \int_0^T ((\dot{u}(t), \dot{v}(t)) - (V'(u(t)), v(t))) dt$$

を満たす H_T の元とする。 $c \in \mathbb{R}$ とする。 $\nabla I_T u_n \rightarrow 0$ かつ $I_T u_n \rightarrow c$ を満たす Λ_T の任意の点列 $\{u_n\}$ が Λ_T のある元に強収束する部分列を持つとき、 Λ_T において I_T は $(PS)_c$ を満たすという。

補助定理 3. $0 < c < d(T)$ のとき、 Λ_T において I_T は $(PS)_c$ を満たす。

証明. $0 < c < d(T)$ とする。 $\nabla I_T u_n \rightarrow 0$ かつ $I_T u_n \rightarrow c$ を満たす Λ_T の点列 $\{u_n\}$ をとる。 $\{\int_0^T |\dot{u}_n|^2 dt\}$ が有界であることは明らかである。 H_T において $\{u_n\}$ は有界ではないとすると、 $|\bar{u}_n| \rightarrow \infty$ としてよい。ただし、 $\bar{u}_n = (1/T) \int_0^T u_n(t) dt$ である。ところが、 $\langle \nabla I_T u_n, u_n - \bar{u}_n \rangle_{H_T} \rightarrow 0$ より、 $I_T u_n \rightarrow 0$ となるので、 $c > 0$ に矛盾する。よって、 H_T において $\{u_n\}$ は有界となるので、 $\{u_n\}$ は、ある $u \in H_T$ に弱かつ一様に収束しているとしてよい。補助定理 2 かつ I_T の弱点列下半連続性により、 $u \in \Lambda_T$ である。 $\langle \nabla I_T u_n, u_n - u \rangle_{H_T} \rightarrow 0$ より、 $\int_0^T |\dot{u}_n - \dot{u}|^2 dt \rightarrow 0$ を得る。したがって、 H_T において $\{u_n\}$ は u に強収束する。 $\square$

問題の解を見つけるために、Bahri–Rabinowitz [3] によって与えられ Tanaka [10] によって改良されたミニマックス法を用いる。 $\gamma \in C(S^{N-2}, \Lambda_T)$ に対し

$$\tilde{\gamma}(x, t) = \frac{\gamma(x)(t)}{|\gamma(x)(t)|}, \quad (x, t) \in S^{N-2} \times S_T^1$$

と $\tilde{\gamma}: S^{N-2} \times S_T^1 \rightarrow S^{N-1}$ を定め、

$$\Gamma_T = \{\gamma \in C(S^{N-2}, \Lambda_T) : \deg \tilde{\gamma} \neq 0\}$$

と置く。ここで、 $\deg \tilde{\gamma}$ は $\tilde{\gamma}$ の Brouwer 写像度である。以下で、 $\inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x))$ は I_T の臨界値であることを示す。

補助定理 4.

$$0 < \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x)) < d(T).$$

証明. [3, Proposition 1.4] と同じ議論により、 $0 < \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x))$ がわかる。以下、もう一方の不等号を示す。 $e_1 \in S^{N-2}$ かつ $e_N \perp S^{N-2}$ を満たす $e_1, e_N \in S^{N-1}$ を取る。[8, Theorem 1.5] の証明にあるように

$$\gamma(x)(t) = \begin{cases} R_T \left(x \sin \frac{2\pi t}{T} + e_N \cos \frac{2\pi t}{T} \right) & (x, t) \in S^{N-2} \times [0, T/2] \text{ のとき} \\ R_T \left(e_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + e_N \cos \frac{2\pi t}{T} \right) & (x, t) \in S^{N-2} \times [T/2, T] \text{ のとき} \end{cases}$$

と $\gamma \in C(S^{N-2}, \Lambda_T)$ を定める。ただし、 $R_T = (b\alpha T^2/(4\pi^2))^{1/(2+\alpha)}$ である。 $\deg \tilde{\gamma} \neq 0$ かつ $\max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x)) \leq c_b(T) < d(T)$ が容易にわかるので証明された。 $\square$

定理の証明. $c = \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x))$ と置く。 c が I_T の臨界値であることを示す。このことを否定する。すると、 $u \in H_T$ かつ $|I_T u - c| \leq 2\varepsilon$ ならば $\|\nabla I_T u\|_{H_T} \geq 2\varepsilon$ を満たす $\varepsilon \in (0, \min\{d(T) - c, c\}/2)$ が取れる。このとき、

- (i) すべての $u \in H_T$ に対し $\eta(0, u) = u$
- (ii) すべての $(s, u) \in [0, 1] \times H_T$ に対し $I_T(\eta(s, u)) \leq I_T u$
- (iii) $\eta(1, I_T^{c+\varepsilon}) \subset I_T^{c-\varepsilon}$

を満たす $\eta \in C([0, 1] \times H_T, H_T)$ が存在する。ここで、 $\sigma \in \mathbb{R}$ に対し、 $I_T^\sigma = \{u \in H_T : I_T u \leq \sigma\}$ である。 $\max_{x \in S^{N-2}} I_T(\gamma(x)) < c + \varepsilon$ を満たす $\gamma \in \Gamma_T$ を取る。(i), (ii) かつ補助定理 3 により $\eta(1, \gamma(\cdot)) \in \Gamma_T$ である。また、 $\max_{x \in S^{N-2}} I_T(\eta(1, \gamma(x))) \leq c - \varepsilon$ となる。これは、 c の定義に矛盾する。よって、 c は I_T の臨界値であることが証明された。 $\square$

参考文献

- [1] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, *Non-collision orbits for a class of Keplerian-like potentials*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 5 (1988), 287–295.
- [2] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, *Perturbation of Hamiltonian systems with Keplerian potentials*, Math. Z. 201 (1989), 227–242.
- [3] A. Bahri and P. H. Rabinowitz, *A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials*, J. Funct. Anal. 82 (1989), 412–428.
- [4] M. Degiovanni and F. Giannoni, *Dynamical systems with Newtonian type potentials*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1988), 467–494.
- [5] F. Giannoni, *Periodic solutions of dynamical conservative systems outside prescribed regions*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 3-B (1989), 547–557.
- [6] W. B. Gordon, *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc. 204 (1975), 113–135.
- [7] C. Greco, *Periodic solutions of a class of singular Hamiltonian systems*, Nonlinear Anal. 12 (1988), 259–269.
- [8] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions for some forced singular Hamiltonian systems*, in Analysis, et cetera, Research papers published in Honor of Jürgen Moser's 60th Birthday, Edited by P. H. Rabinowitz and E. Zehnder, 521–544, Academic Press, San Diego, 1990.
- [9] M. Ramos and S. Terracini, *Noncollision periodic solutions to some singular dynamical systems with very weak forces*, J. Diff. Eq. 118 (1995), 121–152.
- [10] K. Tanaka, *Non-collision solutions for a second order singular Hamiltonian system with weak force*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 10 (1993), 215–238.