

回転半球面上の2次元流体運動に対する 境界条件の影響

京都大学・数理解析研究所 谷口 由紀 (Yuki Taniguchi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

京都大学・数理解析研究所 山田 道夫 (Michio Yamada)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

京都大学・大学院理学研究科 石岡 圭一 (Keiichi Ishioka)
Graduate School of Science, Kyoto University

1 はじめに

回転球面上の流体運動についての研究は、1978年に Williams が南北対称性や波数 8 対称性を課した強制乱流実験で球面上に縞状構造が出現することを示したのが始まりである。このときの数値実験では人為的対称性を仮定したものであったが、その後、1993 年になり Yoden and Yamada が減衰乱流では自転速度が十分に速いと極域に東風ジェットを形成することや帯状の縞構造が出現することを、対称性等の仮定のない数値計算から示した。この Yoden らの数値実験については、1998 年-2000 年に石岡、山田、林、余田が高解像度数値計算を行い詳細に調べた。その結果、減衰系で球自転角速度が速い場合に極域で東風ジェットが出現するのは、初期に与える条件に依存しないことや、初期エネルギーを十分小さなスケールに与えておくと、帯状の縞構造が出現することを確認した。またこの間、1997 年に Nozawa and Yoden が 2 次元強制乱流においても帯状縞構造が形成されることを示している。また、浅水系でも数値実験が行われており、1996 年に Cho and Polvani が減衰乱流から帯状縞構造が出現することを報告している。

我々は、このような全球面上での結果を踏まえて、球面上で円形の粘着境界を持つ領域について、2 次元非圧縮性流体の流れパターンの形成について調べてきた。円領域の大きさや位置を変化させた一連の数値実験から、円領域が縦半球 (半球の境界が経度線と一致) のときには、初期場の流線が同心円上の場合では流れのパターンが東から西へと移動すること、周期的に西側で流れが強くなる西岸強化流を見出している。また、円領域が南半球 (境界が赤道と一致) のときには、初期乱流場から南極付近に西風周極流が形成されることも見出している。この南極付近の西風周極流は、円領域の中心が南極

にあれば、円領域の大きさや初期条件に依らず形成されるようである。

ここでは、円領域が南半球で赤道が粘着境界の場合の西風周極流形成について、初期条件の境界付近の振る舞いの影響について報告する。さらに、境界条件が粘着条件ではなく slip (stress free) 条件の場合について数値的に調べ、境界条件の違いが周極流形成に及ぼす影響について報告する。

2 数値計算法

全球面上での2次元非圧縮性減衰方程式は次のようである。

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(\theta, \psi)} + 2\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} = \nu \Delta^2 \Psi,$$

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

ここでは、境界付き領域内での2次元非圧縮性流体運動の性質を調べる。数値計算では、丸池の大きさと位置を任意に設定できるように、中心が球の頂点となるよう球面を回転した後、その頂点を基準とする立体写像によって丸池を平面単位円板に変数変換し、この単位円板上で非圧縮流体の2次元 Navier-Stokes 方程式を解いた。この変数変換の利点は、渦度方程式の非線形項とラプラシアンが類似の形式で変換され、写像後の方程式が流体方程式に近い形になることである。また、島の大きさを自由に変えることも可能である。

ここでは、丸池が南半球の場合、変数変換後の単位円板上の渦度方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial \Delta_{sphere} \Psi}{\partial t} + \frac{(1+r^2)^2}{4} \frac{1}{r} \frac{\partial(\Psi, \Delta_{sphere} \Psi)}{\partial(r, \psi)} + 2\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} = \nu (\Delta_{sphere} + 2) \Delta_{sphere} \Psi.$$

ここで、 $r = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$ は半径、 ψ は円板上の方位角を表し、

$$\Delta_{sphere} = \frac{(1+r^2)^2}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right),$$

である。円領域の境界における境界条件は no slip 条件と slip(stress free) 条件の両方を用いた。単位円板上では極座標を用いて角度方向にフーリエ展開、動径方向にはチェビシェフ多項式展開を行った。このときの展開形は

- no-slip 境界条件：

$$\begin{aligned}
 R_0(r, t) &= (x-1)^2(x+2)a_0^{(0)}(t) + (x-1)^2(x+1)^2 \sum_{m=1}^M a_m^{(0)}(t)T_{m-1}(x), \\
 R_1(r, t) &= (x-1)^2(x+1)(x+2)a_0^{(1)}(t) + (x-1)^2(x+1)^3 \sum_{m=1}^M a_m^{(1)}(t)T_{m-1}(x), \\
 R_n(r, t) &= (x-1)^2(x+1)^2 \sum_{m=0}^M a_m^{(n)}(t)T_m(x), \quad n \geq 2,
 \end{aligned}$$

- stress free 境界条件：

$$\begin{aligned}
 R_0(r, t) &= (x^2 + 2x + 3)a_0^{(0)}(t) + (x+1)^2 \sum_{m=1}^{M_1} a_m^{(0)}(t)T_{m-1}(x), \\
 R_1(r, t) &= (x+1)(x^2 + 2x + 3)a_0^{(1)}(t) + (x+1)^3 \sum_{m=1}^{M_1} a_m^{(1)}(t)T_{m-1}(x), \\
 R_n(r, t) &= (x+1)^2 \sum_{m=0}^{M_1} a_m^{(n)}(t)T_m(x), \quad n \geq 2,
 \end{aligned}$$

である。展開係数は選点法により求めた。no-slip 境界の場合は境界条件を満たす展開形を用いているが、slip 境界の場合は境界条件を tau 法で加える。時間積分については Crank-Nicolson 法と Runge-Kutta 法を用い、粘性係数と球自転角速度はそれぞれ $\nu = 10^{-2}$, $\Omega = 400$ (木星相当)とした。

3 数値実験

我々はこれまでの研究から、回転球面上の円領域が南半球（赤道が粘着境界）の場合、初期場に依らず極域で西風周極流が形成されることを見出している。図1は流線の時間発展を描いた1例である。また、それぞれ初期乱流場を20通り選び速度場の方向を逆転した場合も含め合計40通りの初期値に対して、同様な数値計算を行った。これらの数値計算から、各緯度における $u \cos \phi$ の平均 $\langle u \cos \phi \rangle$ の重ね描きの時間変化を示したのが図2である。ここで

$$\langle \rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\phi,$$

である。これらを見ると、時間と共に南極付近で周極流が形成される様子が観察される。このときの周極流の向きは早い時期に決まり、その後はだんだんと極域の定常な流れのみに落ち着いていく。ここでの計算は、境界での no-slip 条件を満たすため、初期乱流場として $f(r, \psi) = (1-r^2)^2$ のファクターを含むものを採用した。このファクター形は

円領域の内部にも依存するため、これが東向き周極流の形成に影響を与えている可能性がある。そこで、ここではまず、境界近くまで初期乱流場を均一に分布させるため、ファクターとして $f(r, \psi) = (1 - r^p)^2$, $p = 2, 10, 20, 30, 40$ を用いる、このときの関数形は図 3 のようになる。それぞれ初期乱流場を 16 通り選び速度場の方向を逆転した場合も含め合計 32 通りの初期値に対して、同様な数値実験を行った。このときの関数形は図 3 のようになる。このようなファクターを含む初期条件の各緯度における $\langle u \cos \phi \rangle$ は図 4 である。この図から、 p が大きくなると初期乱流場が領域全体に均一に分布している様子がわかる。またここでは、境界を stress free 条件に変えた場合の数値計算も行った。

non-slip 境界条件のもとで 32 通りの初期値に対して $\langle u \cos \phi \rangle$ の時間発展を調べたところ、全てにおいて、極域で西風周極流が形成されることを確認した (図 5)。図 6 は、時刻 $t = 6.0$ における $\langle u \cos \phi \rangle$ のアンサンブル平均を示している。次に同じ初期条件に対し、境界条件を slip (stress free) 条件とした数値実験を実行した。 $\langle u \cos \phi \rangle$ の時間変化を見ると、初期ファクターによって形成される周極流の向きが異なる結果となっている (図 7)。 $p = 2, 10$ で西風周極流、 $p \geq 20$ では東風周極流が形成されることを見出した (図 8)。即ち、no-slip 境界条件の下では極域で形成される周極流の向きは初期値に依存しないで一定 (西風) であるのに対し、slip 境界の場合は初期条件によって向きが変化し、極域に偏在する乱流初期条件では non-slip 境界の場合と同様に西風周極流が形成されるものの、流れ領域に一樣に広がる乱流初期条件では東風周極流が形成される。なお non-slip 境界条件では境界における角運動量散逸が生じるのに対し、slip 境界条件では角運動量は散逸せず再配分されるのみである (図 9)。従って、十分に時間がたつと、non-slip 境界条件では南極付近に定常な西風周極流が形成されるのに対し、slip 境界条件では極域で周極流が形成されるものの中緯度では流体は複雑な運動を示している (図 10)。

4 まとめ

以上の結果をまとめると次のようになる。

- 領域に一樣に広がる初期条件を与えて数値計算を行うと、non-slip 境界条件では南極付近に西風周極流が形成され、slip 境界条件では東風周極流が形成される。つまり、境界条件によって得られる周極流の向きは一意に決まり、しかもそれは互いに逆向きである。
- 極域に偏在する初期条件では、境界条件に依らず西風周極流が形成される。

- non-slip 境界条件では, 境界で角運動量が散逸しているのに対し, slip 境界条件では角運動量は散逸せずに再分配している.

5 謝辞

本研究にあたり貴重なご助言をいただきました, 岡山大の柳瀬眞一郎先生, 東京農工大の佐野理先生, 北大の林祥介先生, 京大の余田成男先生, 同じく京大の酒井敏先生に深く感謝申し上げます. なお, 数値計算には京大の大型計算機 VPP800 を, またグラフには地球電脳倶楽部の DCL を使用しました.

6 参考文献

- P. B. Rhines, 1975, "Waves and turbulence on a beta-plane", *J. Fluid Mech.*, 69 (1975), pp.417-443.
- G. P. Williams, "Planetary circulations: 1.Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence", *J. Atmos. Sci.*, 35 (1978), pp.1399-1426.
- S. Yoden and M. Yamada, "A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere", *J. Atmos. Sci.*, 50 (1993), pp.631-643.
- T. Nozawa and S. Yoden, "Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere", *Phys. Fluids*, 9 (1997), pp.3834-3842.
- Y.-Y. Hayashi, K. Ishioka, M. Yamada and S. Yoden, "Emergence of circumpolar vortex in two dimensional turbulence on a rotating sphere", *Proceedings of the IUTAM/IUGG Symposium on "Developments in Geophysical Turbulence", Boulder 1998*, edited by R.M.Keer and Y.Kimura.
- S. Yoden, K. Ishioka, Y.-Y. Hayashi and M. Yamada, "A further experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere", *Nouvo Cimento C*, 22 (1999), pp.803-812.
- K. Ishioka, M. Yamada, Y.-Y. Hayashi and S. Yoden, "Technical approach for the design of a high-resolution spectral model on a sphere: Application to decaying turbulence", *Nonlinear Processes in Geophysics*, 7 (2000), pp.105-110.

- Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Flow pattern formation in a two-dimensional flow on the rotating hemisphere bounded by the meridional line", *Proceedings of the 51st Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics*, edited by Koji Uetani, 51 (2002), pp.217-223.
- Y. Taniguchi, M. Yamada and K. Ishioka, "Flow pattern formation in two dimensional turbulence on a rotating hemisphere", to be submitted.
- S. Li, D.Montgomery and W.B.Jones, "Inverse, cascades of angular momentum", *J. Plasma Physics*, 56, 3 (1996), pp.615-639.
- Li, S., and D.Montgomery, "Decaying two-dimensional turbulence with rigid walls", *Physics Letters A*, 218 (1996), pp.281-291.
- Li, S., and D.Montgomery, "Two-Dimensional Turbulence with Rigid Circular Walls", *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 9 (1997), pp.167-181.
- K. Yamamoto, S. Yanase and R. Jiang, "Stability of the flow in a helical tube", *Fluid Dynamics Research*, 22 (1998), pp.153-170.
- S. Yanase, N. Goto and K. Yamamoto, "Dual solutions of the flow through a curved tube", *Fluid Dynamics Research*, 5 (1989), pp.191-201.
- S. Yanase and M. Mizuguchi, "Rotating magnetohydrodynamic free-shear flows. I. Linear stability analysis", *Physics of Fluids*, 13 (2001), pp.1946-1955.
- J. Y.-K. Cho and L. M. Polvani, "The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere", *Physics of Fluids*, 8 (1996), pp.1531-1552.

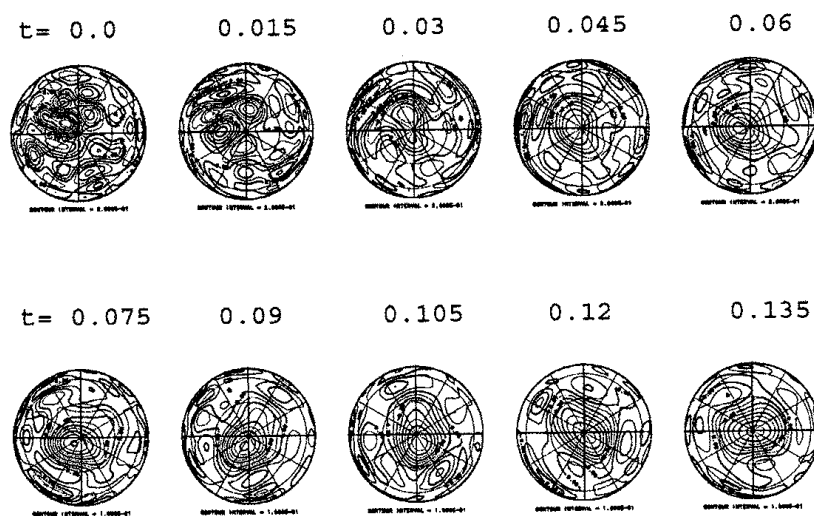


図 1: 南極上空から眺めた流線の時間発展. $\delta t = 0.015$. $\Omega = 400$.

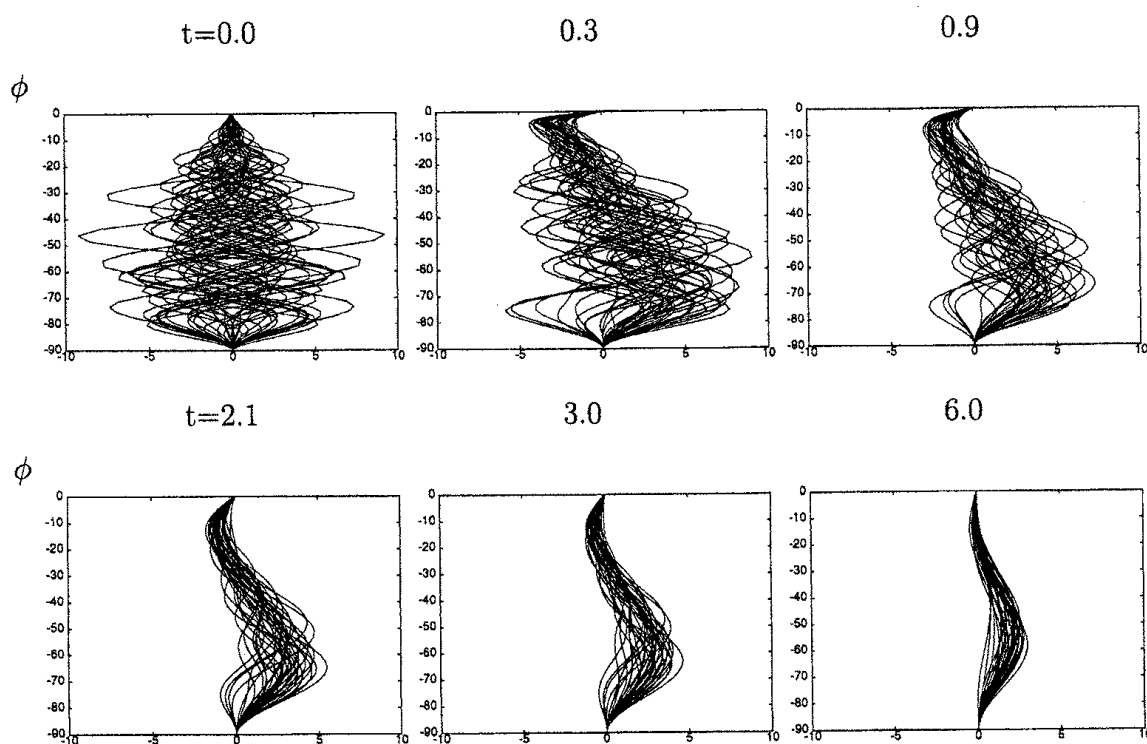


図 2: $\langle u \cos \phi \rangle$ の時間発展. 40 種類の重ね描き.

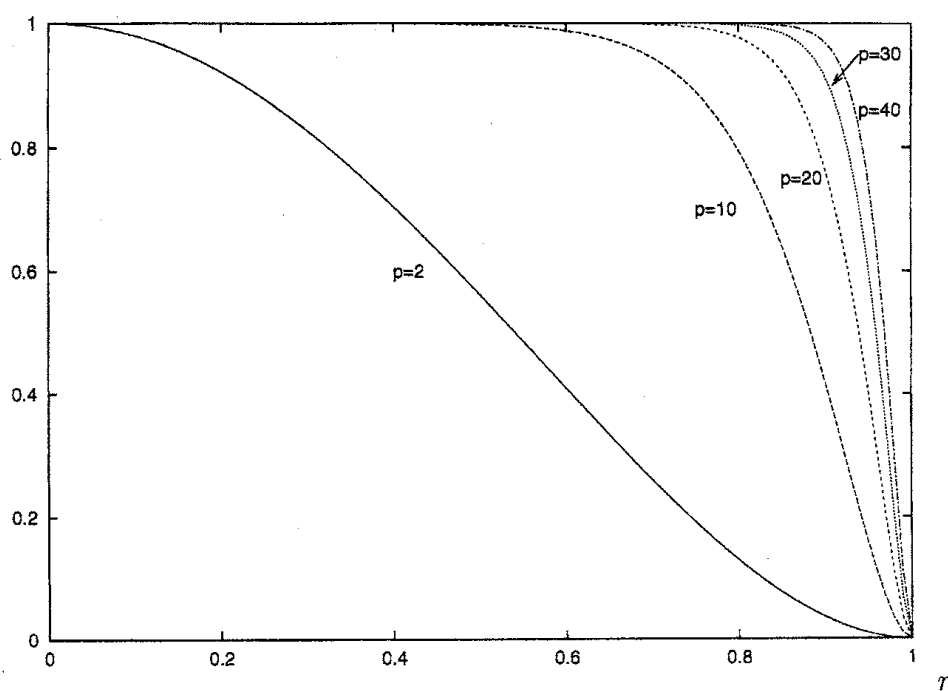
$f(r)$


図 3: ファクター $f(r) = (1 - r^p)^2$ ($p = 2, 10, 20, 30, 40$).

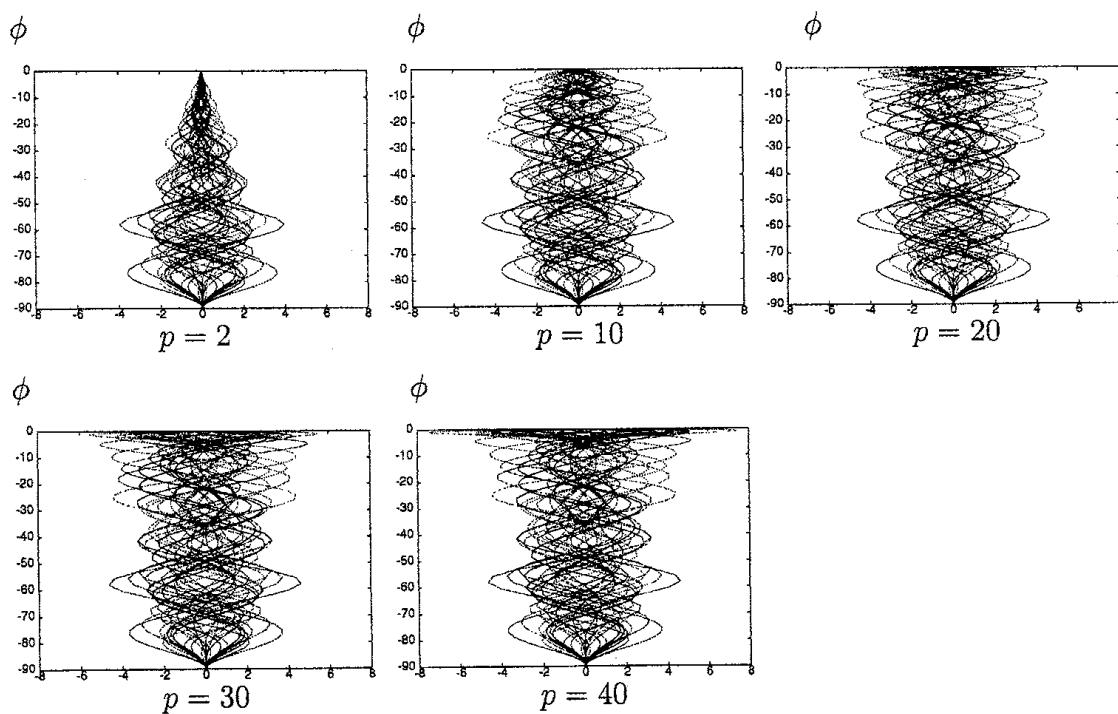


図 4: 32 種類の初期条件における $\langle u \cos \phi \rangle$ の重ね描き.

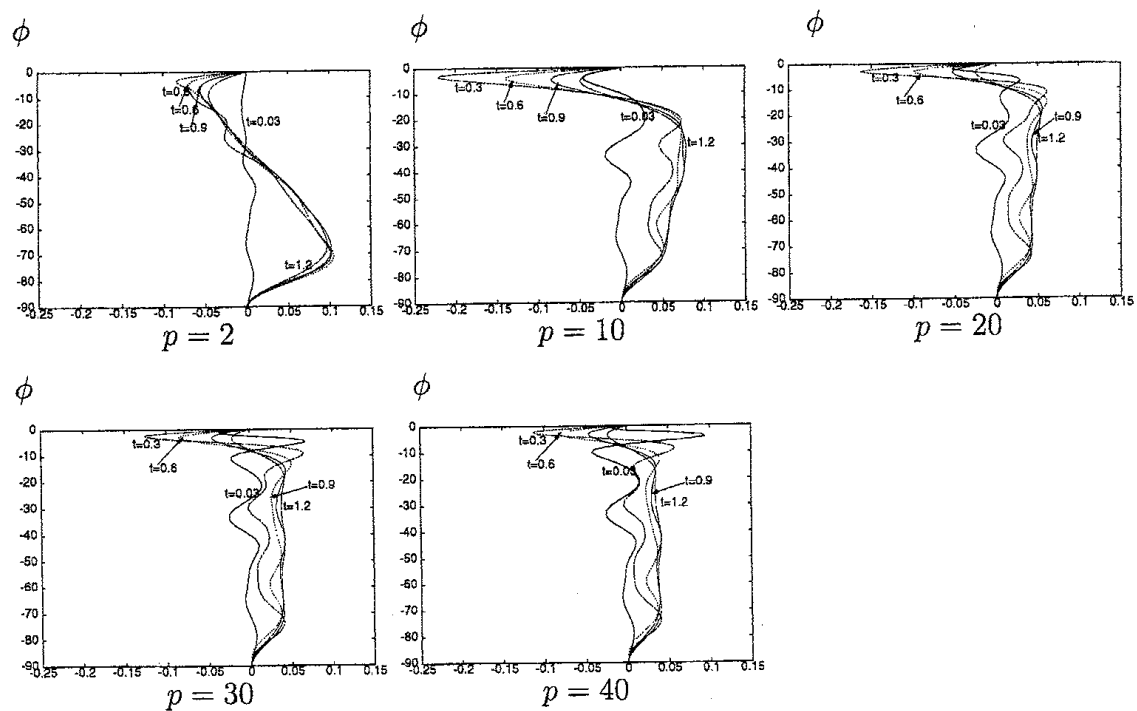


図 5: no-slip 境界条件における $\langle u \cos \phi \rangle$ の時間変化. 32 種類のアンサンブル平均.

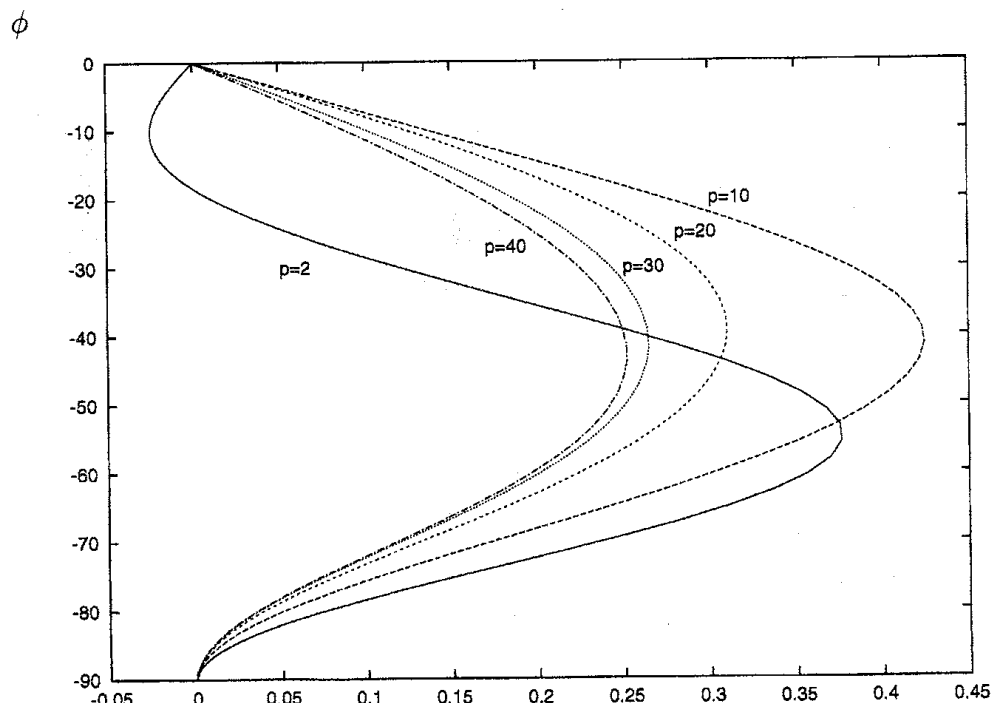


図 6: $t = 6.0$ における $\langle u \cos \phi \rangle$ のアンサンブル平均. 境界条件は rigid.

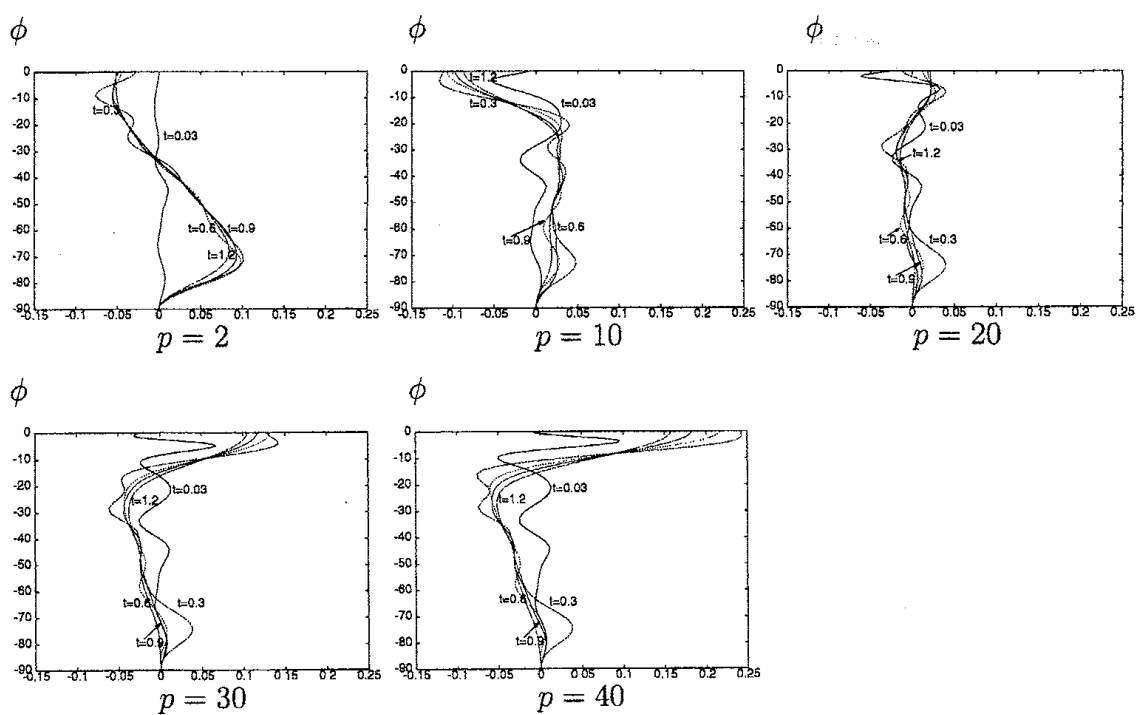


図 7: slip 境界条件における $\langle u \cos \phi \rangle$ の時間変化.

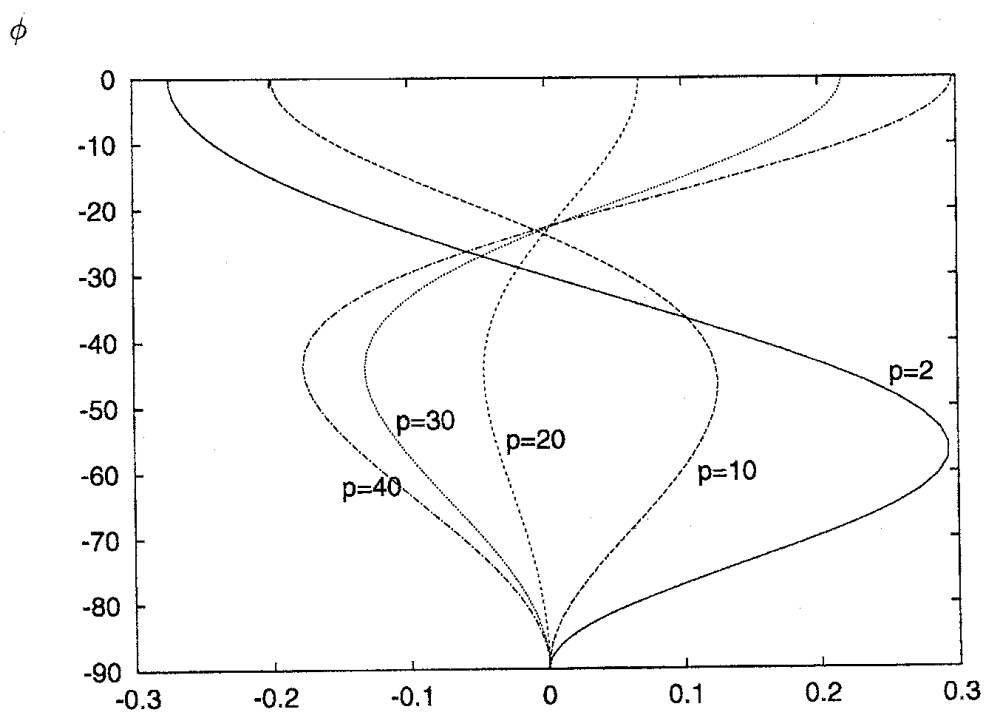


図 8: $t = 6.0$ における $\langle u \cos \phi \rangle$ のアンサンブル平均. 境界条件は stress free.

angular momentum

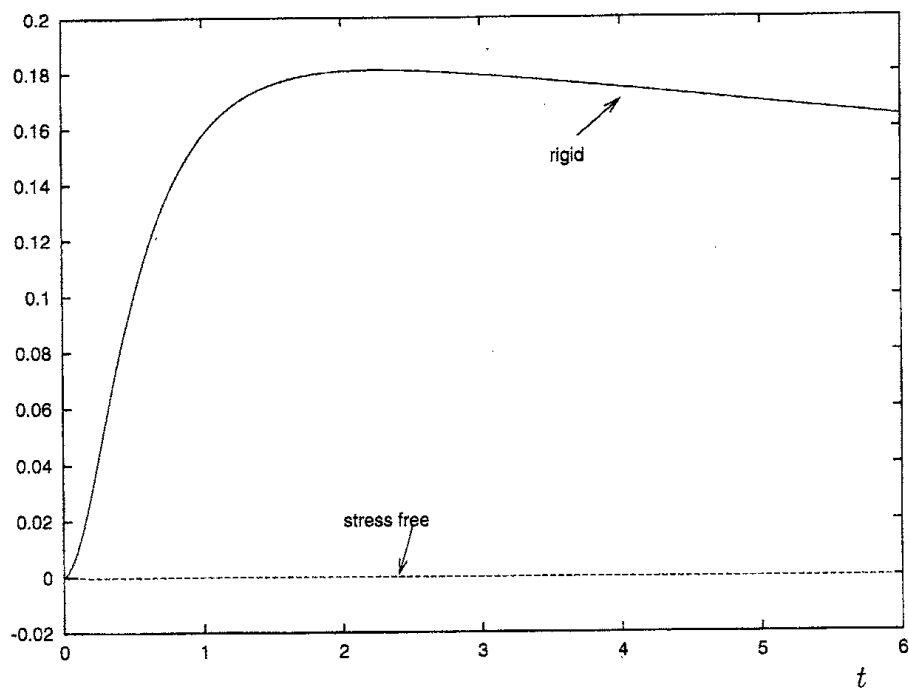
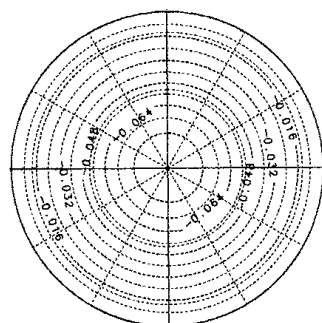
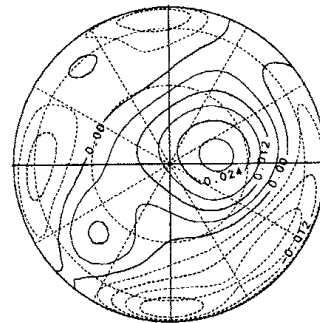


図 9: $p = 40$ における全角運動量の時間変化.



CONTOUR INTERVAL = 8.000E-03



CONTOUR INTERVAL = 6.000E-03

図 10: $p = 40, t = 6.0$ での流線. 左図は rigid 境界条件で, 右図は stress free 境界条件. 中心は南極.