

波動方程式に関係した Fourier multiplier について

東大 理 宮地晶彦

§ 1. 序

波動方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解 u を, t を固定して $(f, g) \mapsto u(t, \cdot)$ という写像と考
えて, この写像が $\mathbb{R}^n$ 上のどの関数空間からどの関数空間へ
の連続写像になるか, という問題が与えられたとしよう。フ
ーリエ変換を用いると, 解 u は

$$u(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\cos t|\xi| \mathcal{F}f(\xi)) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \mathcal{F}g(\xi)\right)$$

と書ける。従って, 取おうとする写像は,

$$(1) \quad f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m(\xi) \mathcal{F}f(\xi))$$

という形で,

$$m(\xi) = \cos t|\xi| \sim \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$$

である。もし関数空間としてソボレフ空間

$$W^{p,s} = \{f \in \mathcal{S}' \mid \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)) \in L^p\}$$

$$\|f\|_{W^{p,s}} = \|\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi))\|_{L^p}$$

のようなものとして, たとえば $g(x) \equiv 0$ として, 有界性

$$\|u(t, \cdot)\|_{W^{q,r}} \leq C \|f\|_{W^{p,s}}$$

が成り立つか, という場合には, 上の不等式は

$$\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)) = h$$

と書きかえてみれば

$$\|\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}} \cos t|\xi| \mathcal{F}h(\xi))\|_{L^q} \leq C \|h\|_{L^p}$$

と同じであるから,

$$m(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{r-s}{2}} \cos t|\xi|$$

に対する (1) の作用素の L^p - L^q 有界性を問うのと同じである。

$\varepsilon = \varepsilon'$, 一般に ε を実数として

$$m(z) = (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|}$$

と取れば都合がよいであろう。今

$$\psi(z) = 0 \text{ for } |z| \leq 1, \quad \psi(z) = 1 \text{ for } |z| \geq 2$$

となるような有界関数 ψ をとって,

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1} \left((1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|} \mathcal{F}f(z) \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left(\psi(z) (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|} \mathcal{F}f(z) \right) \\ &+ \mathcal{F}^{-1} \left((1-\psi(z)) (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} e^{\pm i|z|} \mathcal{F}f(z) \right) \end{aligned}$$

と令ければ, 右辺第2項は δ (急減少関数) の関数と $\mathcal{F}f$ の合成積だからほとんど問題はないであろう。更に $(1+|z|^2)^{-\varepsilon/2}$ という因子を $|z|^{-\varepsilon}$ に置きかえてしまっても,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f &\mapsto \mathcal{F}^{-1} \left(\psi(z) (1+|z|^2)^{-\varepsilon/2} |z|^{\varepsilon} \mathcal{F}f(z) \right) \\ \mathcal{F}f &\mapsto \mathcal{F}^{-1} \left(\psi(z) (1+|z|^2)^{\varepsilon/2} |z|^{-\varepsilon} \mathcal{F}f(z) \right) \end{aligned}$$

はどちらも L^p や リプシッツ空間 Λ_α などでは有界作用素であるから, 問題はかわらないであろう。

結局以上のような理由から,

$$m(z) = \psi(z) |z|^{-\alpha} e^{i\alpha \arg z}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

なる $m(z)$ によって作用素 (1) を考えることにしよう。考える関数空間は H^p ($0 < p \leq 1$), L^p ($1 < p < \infty$), BMO および Λ_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) である。 H^p は Fefferman-Stein [3] によって与えられる。以後は, $1 < p < \infty$ に対しては, $H^p = L^p$ として H^p, L^p 両方の記号を混用する。ただし H^1 と L^1 は異なる関数空間であることに注意! BMO は John-Nirenberg [4] の空間で, ノルム (正確にはセミノルム) は

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{I: \text{cube}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c| dx$$

である。 Λ_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) は Taibleson [11] によって与えられるリプシッツ空間 $\Lambda(\alpha; \infty, \infty)$ である。これらの関数空間を次のように並べることにする:

$$X_p = \begin{cases} \Lambda_{-np} & p < 0 \\ \text{BMO} & p = 0 \\ H^{1/p} & p > 0. \end{cases}$$

更に, 必要に応じて L^1, L^∞ および C^k ($k \in \mathbb{Z}, k > 0$) も考えよう。ここで C^k は k 回連続微分可能な関数で k 回微分まで広めて有界であるものの全体のつくる線型空間で, ノルム

は,

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty}$$

を入れる。

次の記号を用いる。(1) の作用素を簡単に $[m(z)]$ と書く:

$$[m(z)]: f \mapsto \bar{z}^{-1} (m(z) f(z)).$$

$t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$S_t = [\psi(z) |z|^{-t} e^{i|z|}],$$

$$K_t = \bar{z}^{-1} (\psi(z) |z|^{-t} e^{i|z|}) (\in \mathcal{S}').$$

$$S_t f = K_t * f \quad \text{である.}$$

さてこれから, すべて $t \in \mathbb{R}$ について, S_t が $X_p \rightarrow X_\sigma$ の有界作用素となる組 (p, σ) を完全に決定しよう。

§ 2. $S_t: X_p \rightarrow X_\sigma$ の有界性, ただし $p \geq 0$.

$p \geq 0$ の範囲では,

$$D_t = \{(p, \sigma) \mid p \geq 0, S_t: X_p \rightarrow X_\sigma \text{ 有界}\}$$

は次のようになる: $t < 0$ の時 $D_t = \emptyset$, $t \geq 0$ の時は, 図 1, 2, 3 の斜線部。

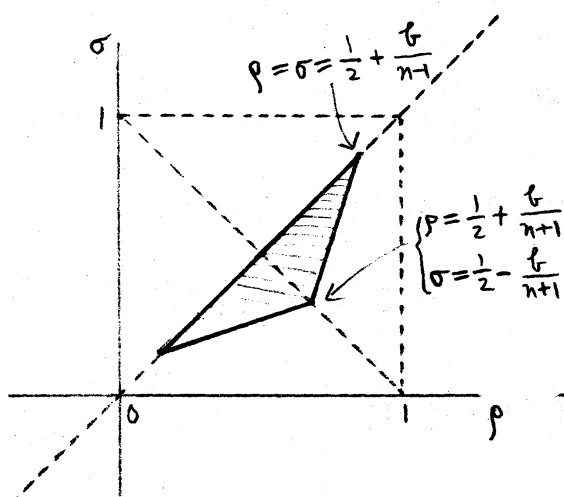


図1. $0 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$ のとき

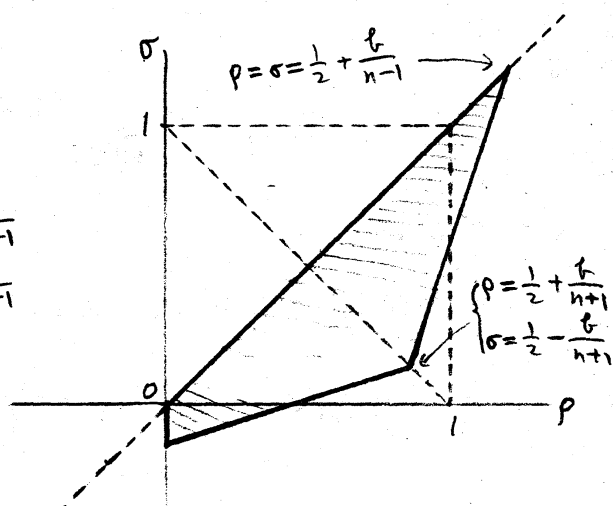


図2. $\frac{n-1}{2} < t \leq \frac{n+1}{2}$ のとき

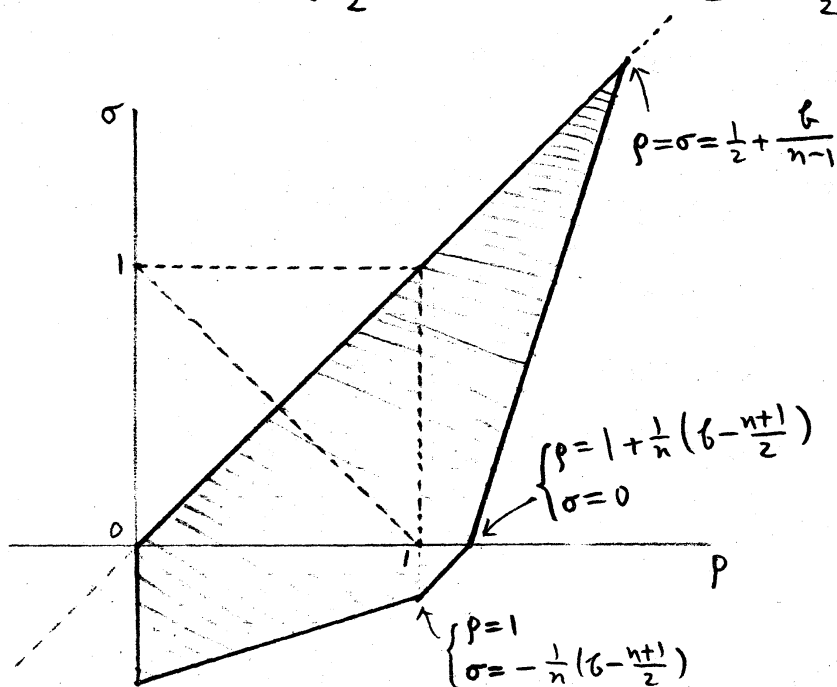


図3. $t > \frac{n+1}{2}$ のとき.

更に, L^1, L^∞ および C^R に属しては, 次の $\alpha = t$ が言える.

(i) $S_t: L^1 \rightarrow L^1, L^\infty \rightarrow L^\infty \iff t > \frac{n-1}{2}.$

(ii) $S_t: L^1 \rightarrow L^\infty \iff t > \frac{n+1}{2}.$

(iii) $S_{\frac{n+1}{2}}: L^1 \rightarrow BMO, H^1 \rightarrow L^\infty.$

(iv) $\sigma > \frac{n+1}{2}$, $p - \sigma = 1 + \frac{1}{n}(\sigma - \frac{n+1}{2})$, $1 \leq p \leq 1 + \frac{1}{n}(\sigma - \frac{n+1}{2})$,
 $-\sigma$: 整数, n とき $S_\sigma: H^{\frac{1}{p}} \rightarrow C^{-\sigma}$.

$L^1 \subset H^1$, $L^\infty \subset BMO$, $C^k \subset \Lambda_k$ であるから, (i) ~ (iv) は, $(p, \sigma) \in D_\sigma$ となつてゐる (p, σ) と σ に ついて, ある場合には $S_\sigma: X_p \rightarrow X_\sigma$ の有界性より強い有界性が言えることを, 主張したものである。

§3. 有界性の証明.

§2 の結果のうち肯定的部分は, 次の2つの命題が基礎になる:

命題1. $0 < \sigma < \infty$ の時 $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{n-1}$ とおくと,

$$S_\sigma: H^{p_0} \rightarrow H^{p_0} \text{ 有界.}$$

命題2. $0 < \sigma < \frac{n+1}{2}$ のとき

$$S_\sigma: L^{p_1} \rightarrow L^{p_1'}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{n+1}, \quad \frac{1}{p_1'} = 1 - \frac{1}{p_1}.$$

$\sigma \geq \frac{n+1}{2}$ のとき.

$$S_\sigma: H^{p_2} \rightarrow L^\infty, \quad \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{n}(\sigma - \frac{n+1}{2}).$$

命題 1 は, $p_0 \leq 1$ の時は, H^{p_0} が アトム分解できること (Latter [6]) と, H^{p_0} の ノルム が Riesz 変換 を用いて L^{p_0} ノルム に 帰着 できる こと を用いて, p_0 -atom と呼ばれる 函数 f に対して,

$$\|S_{\theta} f\|_{p_0} \leq C$$

を示すことに帰着される。この評価の証明は, Hölder の不等式と Plancherel の定理だけを用いておこなえる。詳しくは [8]。ただしこの評価のために K_{θ} の挙動を知ることが必要だが, それは次の様である:

補題 1.
$$\begin{cases} K_{\theta} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{|x|=1\}) \\ \forall \theta \in \mathbb{R} \begin{cases} |x| \rightarrow \infty \text{ のとき } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} K_{\theta}(x) = O(|x|^{-N}) \quad (\forall N, \forall \alpha). \end{cases} \end{cases}$$

$\theta < \frac{n+1}{2} + |\alpha|$ のとき

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} K_{\theta}(x) &= \text{const. } x^{\alpha} (1 - |x| + i0)^{\theta - |\alpha| - \frac{n+1}{2}} \\ &\quad + o(|1 - |x||^{\theta - |\alpha| - \frac{n+1}{2}}) \quad \text{as } |x| \rightarrow 1. \end{aligned}$$

$\theta = \frac{n+1}{2}$ のとき

$$K_{\theta}(x) = \text{const. } \log(1 - |x| + i0) + O(1) \quad \text{as } |x| \rightarrow 1.$$

$p_0 > 1$ のときの命題 1 は, 補題 1 によって証明できる。す

なやち, $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対して作用素 T_z を

$$T_z = [\psi(z)|z|^{-\frac{n-1}{2}} e^{i|z|}]$$

とおくと, $p_0 = 1$ のときの結果を用いて

$$T_{1+iy}: H^1 \rightarrow H^1, \quad \|T_{1+iy}\|_{H^1 \rightarrow H^1} \leq C(1+|y|)^N,$$

また

$$T_{iy}: L^2 \rightarrow L^2, \quad \|T_{iy}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C$$

であるから, $0 < \theta < 1$ の θ について,

$$T_\theta: H^p \rightarrow H^p, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}.$$

(Calderón-Torchinsky [2] II, pp. 151~152) によれば, $1 < p_0 < 2$ の場合の命題 1 の結果に他ならない。

命題 2 の証明. まず補題 1 によって,

$$K_{\frac{n+1}{2}}(x) = \log |1-x| + (\text{odd. function})$$

だから, $K_{\frac{n+1}{2}} \in \text{BMO}$ である (このことは John-Nirenberg の [4] にある $\log |x| \in \text{BMO}$ の証明と同じ方法で証明できる)。

故に, $S_{\frac{n+1}{2}}: L^1 \rightarrow \text{BMO}$ であり, Fefferman の不等式

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right| \leq C \|f\|_{H^1} \|g\|_{\text{BMO}}$$

により, $S_{\frac{n+1}{2}}: H^1 \rightarrow L^\infty$ も言える。 $0 < \sigma < \frac{n+1}{2}$ のとき

の $L^p \rightarrow L^{p'}$ 有界性は, 命題 1 の証明のときと同様の補局定理

を用いて証明される。 $\sigma > \frac{n+1}{2}$ のときには,

$$S_\sigma = S_{\frac{n+1}{2}} [|\cdot|^{-(\sigma - \frac{n+1}{2})}]$$

と分解して,

$$[|\xi|^{-(6-\frac{n+1}{2})}] : H^{p_2} \rightarrow H^1$$

(fractional integral, Calderón-Torchinsky [2] II, p. 162) と

$$S_{\frac{n+1}{2}} : H^1 \rightarrow L^\infty$$

とを合成して $S_6 : H^{p_2} \rightarrow L^\infty$ の有界性かわかる。

$S_6 : L^p \rightarrow \Lambda_\alpha$ の有界性は, 双対性を利用して $S_6 : H^q \rightarrow L^{p'}$ ($p' = p/(p-1)$, $\alpha = \frac{n}{q} - n$) の有界性から導くことができる。簡単のため $0 < \alpha < 1$ とする。Taibleson [11] によると, Λ_α のノルムは,

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

である。よって,

$$\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup |f(x) - f(y)| / |x-y|^\alpha$$

とおく。Meyer の定理 ([7]) によれば,

$$(2) \quad \|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup_{I: \text{cube}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{|I|^{1+\alpha/n}} \int_I |f(x) - c| dx$$

である。双対性 $(L^1)' = L^\infty$ によつて

$$(3) \quad \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{|I|^{1+\alpha/n}} \int_I |f(x) - c| dx = \sup \left| \int_I f(x) g(x) dx \right|,$$

ただし右辺の $\sup$ は, $\text{support } g \subset I$, $\|g\|_{L^\infty} \leq |I|^{-1-\alpha/n}$ かつ $\int g(x) dx = 0$ なる g を動かしてとる。(2) と (3) から,

$$(4) \quad \|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha} = \sup \left| \int f(x)g(x)dx \right|$$

ただし右辺の $\sup$ は, ある cube I に対して前記の条件をみたす g 全体にわたって (I も動かして) とる, すなわち, $g \in \mathcal{A} = \mathcal{H}_\alpha - \mathcal{H}$ なる族としたとき, g は g -atom の全体を動かすことにある。さて, (4) を用いると,

$$(5) \quad S_\delta: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha \iff \left| \int S_\delta f \cdot g \right| \leq C \text{ for } \|f\|_p \leq 1, g: g\text{-atom}$$

であるが, 実は

$$\int S_\delta f \cdot g = \int f \cdot S_\delta g$$

なのであるから,

$$(5) \text{ の右辺 } \iff \|S_\delta g\|_{L^{p'}} \leq C \text{ for } g: g\text{-atom}.$$

H^α がアトム分解であることによると, これは S_δ の $H^\alpha \rightarrow L^{p'}$ の有界性と同等である。このようにして,

$$(6) \quad S_\delta: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha \iff S_\delta: H^\alpha \rightarrow L^{p'}$$

がわかった。命題 1 と 2 の結果およびそれらを補内した結果は, 適当な $q \leq 1$, $p' \geq 1$ について $S_\delta: H^\alpha \rightarrow L^{p'}$ の有界性を教えているから, (6) に従って $S_\delta: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha$ の有界性が得られる。 $S_\delta: L^p \rightarrow L^\infty$ の有界性は, $K_\delta \in L^{p'}$ を見るこ

とによって容易にわかるから, $S_\sigma: L^p \rightarrow \tilde{\Lambda}_\alpha$ とおいて

$S_\sigma: L^p \rightarrow \Lambda_\alpha$ が言える。

以上のようにして D_σ の端点の (p, σ) について $S_\sigma: X_p \rightarrow X_\sigma$ の有界性は示して証明できる。その他の $(p, \sigma) \in D_\sigma$ については補内定理で示される。

(i) は, 補題 1 を使って $K_\sigma \in L^1, \sigma > \frac{n-1}{2}$, を見ることによってわかる。(ii) は, やはり補題 1 を使って $K_\sigma \in L^\infty, \sigma > \frac{n+1}{2}$, を見ることによってわかる。(iii) は命題 2 で示した。(iv) は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha S_\sigma f &= [\xi^\alpha \psi(\xi) |\xi|^{-\sigma} e^{i|\xi|}] f \\ &= [\psi(\xi) |\xi|^{-\sigma+|\alpha|} e^{i|\xi|}] [\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}] f \\ &= S_{\sigma-|\alpha|} [\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}] f, \end{aligned}$$

$$[\xi^\alpha / |\xi|^{|\alpha|}]: H^p \rightarrow H^p \text{ 有界, } 0 < p < \infty,$$

から, $S_\sigma: H^p \rightarrow C^k$ か, $S_{\sigma-k}: H^p \rightarrow L^\infty$ に帰着されることによつて, 命題 2 から導かれる。

§ 4. 非有界性の証明

$(p, \sigma) \notin D_\sigma$ なる (p, σ) について $S_\sigma: X_p \rightarrow X_\sigma$ の証明。

(i) 一般に平行移動と可換な線型作用素 T について, も

$$\|Tf\|_{H^q} \leq C \|f\|_{H^p}, \quad 0 < q < p < \infty \quad \text{ならば実は } T=0$$

である。このことの証明は、Hörmander [5] による $q > 1$ の場合の証明 ([5] p. 96) と同様に行われる。

$$(ii) \quad S_b: H^p \rightarrow H^q \quad \text{if} \quad \frac{1}{q} - \frac{n}{p} < -b - \frac{n-1}{2}.$$

これは、

$$b - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{q} < \lambda < \frac{n}{p} - n$$

なる λ をとると、

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi) |\xi|^\lambda) \in H^p \quad \text{かつ} \quad S_b f \notin H^q$$

からわかる。

$$(iii) \quad S_b: H^p \rightarrow \Lambda_\alpha \quad \text{if} \quad \frac{n}{p} - n > b - \frac{n+1}{2} - \alpha.$$

このことは、 $0 < \alpha < 1$ からは

$$b - \frac{n+1}{2} - \alpha < \lambda < \frac{n}{p} - n$$

なる λ をとって

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi) |\xi|^\lambda) \in H^p \quad \text{かつ} \quad S_b f \notin \Lambda_\alpha$$

からわかる。作用素 $[(1+|\xi|^2)^{-\lambda/2}]$ が $\Lambda_\alpha \rightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}$ の onto の isomorphism であること (Taibleson [11] Theorem 6, p. 437) を用いると、実は

$$(7) \quad S_b: X_p \rightarrow \Lambda_\alpha \iff S_{b+\beta}: X_p \rightarrow \Lambda_{\alpha+\beta}$$

がわかるから、 $\alpha \geq 1$ の場合は $0 < \alpha < 1$ の場合と帰着できる。

$$(iv) \quad S_b: L^p \rightarrow \Lambda_\alpha \quad \text{if} \quad \frac{1}{p} + \alpha > b - \frac{n-1}{2}$$

これは、双対性 (§3 の (6)) を用いて (ii) に帰着できる。

$$\S 5. \quad S_\sigma: \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\beta.$$

= の節では α, β, σ はすべて実数 (負でもよい) とする。

命題 3. $S_\sigma: \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_{\alpha+\sigma-\frac{n-1}{2}}$ 有界.

$$S_\sigma: \Lambda_\alpha \not\rightarrow \Lambda_\beta \text{ if } \beta > \alpha + \sigma - \frac{n-1}{2}.$$

証明. $\S 4$ の (7) に よって,

$$(8) \quad S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda_\alpha$$

$$(9) \quad S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_\alpha \not\rightarrow \Lambda_\beta \text{ if } \beta > \alpha$$

を示せばよい。まず (8) を示す。Taibleson [11] (II, Theorem 2, p. 27) により, $K_{\frac{n-1}{2}} \in \Lambda(0; 1, \infty)$ を示せばよい。Taibleson による $\Lambda(0; 1, \infty)$ の定義に従うと, $[(1+|z|^2)^{-\beta/2}] K_{\frac{n-1}{2}} \in L^1$, $\beta > 0$, と, 十分大なる β に ついて

$$(10) \quad \left\| \left[y^k \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k e^{-y|z|^2} \right] K_{\frac{n-1}{2}} \right\|_{L^1} \leq C, \quad 0 < y \leq 1$$

を示せばよい。最初の条件は補題 1 を用いて容易に示せる。2 番目の条件を確かめるために, 次の補題を用いる。

補題 2. $\varphi^{(j)} \in \mathcal{S}$, $j=1, \dots, m$, は次の条件を満たすとする:

ある:

$$\forall \xi \neq 0, \exists t > 0; \sum_{j=1}^m |\xi_j \varphi^{(j)}(t\xi)| \neq 0.$$

f は Fourier 変換 $\hat{f}$ が原点の近傍で L^1_{loc} であるような緩増加超関数とする。十分大きな数 M と定数 C があり

$$(11) \quad \sum_{j=1}^m \left\| f * (s^{-n} \varphi^{(j)}(\frac{\cdot}{s})) \right\|_{L^1} \leq \begin{cases} C, & 0 < s \leq 1 \\ C s^M, & s > 1 \end{cases}$$

が成り立つば, 十分大きな k に対して (10) が成り立つ。

この補題は, 関数 $\hat{f}^{-1}(\eta^k (\frac{\partial}{\partial y})^k e^{-\eta|z|^2}) \in s^{-n} \varphi^{(j)}(\frac{\cdot}{s})$ の合成積による重ね合わせとしてあるからと (その方法は Fefferman-Stein の [3] p185 にあるテクニックによる) によって証明できる。

さて, 補題 2 によると (10) を示すのに, 適当な $\mathcal{S}$ の関数 f と $f = K_{\frac{n-1}{2}}$ に対して (11) を示せばよい。 $\varphi^{(j)}$ としてコンパクトな台をもつ $\int \varphi^{(j)}(x) dx = 0$ とするものにとると $f = K_{\frac{n-1}{2}}$ に対する (11) は, 命題 1 の $p_0 \leq 1$ の時の証明 (Miyachi [8] の Theorem 1 の証明) と同様の計算でできる。

(9) は,

$$f = \hat{f}^{-1}(\psi(z)|z|^{-\frac{n+1}{2}-\alpha} e^{-i|z|^2}) \in \Lambda_\alpha,$$

$$S_{\frac{n-1}{2}} f = \hat{f}^{-1}(\psi(z)|z|^{-n-\alpha}) \notin \Lambda_\beta \quad \text{if } \beta > \alpha$$

からわかる。または, 次のようにして (9) を示してもよい。

もしも $S_{\frac{n-1}{2}} : \Lambda_\alpha \rightarrow \Lambda_\beta$, $\beta > \alpha$, ならば,

$$S_{\frac{n-1}{2}} = [(1+|z|^2)^{\alpha/2}] S_{\frac{n-1}{2}} [(1+|z|^2)^{-\alpha/2}]$$

と考へて, $S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_{\beta-\alpha}$, 従つて ($L^\infty \subset \Lambda_0$ から) $S_{\frac{n-1}{2}}: L^\infty \rightarrow \Lambda_{\beta-\alpha}$, $\beta-\alpha > 0$. §3 の (6) によつて dual をとつて $S_{\frac{n-1}{2}}: H^p \rightarrow L^1$, $p < 1$; しかしこれは §4 の (ii) と矛盾する. 故に $S_{\frac{n-1}{2}}: \Lambda_\alpha \rightarrow \Lambda_\beta$, $\beta > \alpha$.

§6. NOTE

以上の結果は, S_ϕ のかわりに

$$[\psi(z)|z|^{-\phi} \sin|z|] \text{ や } [\psi(z)|z|^{-\phi} \cos|z|]$$

に対しても成り立つ。また $\phi(z)$ を, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ で定義される 1 次斉次関数で, $\phi(z) > 0$ かつ曲面 $\{z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \phi(z) = 1\}$ の Gauss 曲率が 0 になるような関数とし, $a(z), b(z)$ をどちらか一方は恒等的に零でない $-\phi$ 次の斉次関数とすると,

$$[\psi(z)(a(z)e^{i\phi(z)} + b(z)e^{-i\phi(z)})]$$

についても, 同様の結果が成り立つ。(Cf. Mizuhara [8].)

命題 1 の証明は, $p_0 \geq 1$ の場合は, Peral の [9] にもあるが, アトム分解を利用したこゝでの証明法は, 簡単でしかも融通性に富み, かつ $p_0 < 1$ にも適用できる利点を持つ。

命題2の前半の結果は, Strichartz [10] によって知られていた。こゝでの BMO を用いる証明法は [10] のものより簡単でかつ融通性に富む。 $L^p-L^{p'}$ 有界性の証明法には, Brenner [1] による Littlewood-Paley の定理に基づいた方法もある。

References

- [1] Brenner, P., On $L^p-L^{p'}$ estimates for the wave-equation, Math. Z. 145(1975), 251-254.
- [2] Calderón, A. P., and Torchinsky, A., Parabolic maximal functions associated with a distribution, I, Advances in Math. 16 (1975), 1-64; II, 24(1977), 101-171.
- [3] Fefferman, E. M., and Stein, E. M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129(1972), 137-193.
- [4] John, F., and Nirenberg, L., On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. 14(1961), 415-426.
- [5] Hörmander, L., Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math. 104(1960), 93-140.
- [6] Latter, R. H., A characterization of $H^p(\mathbf{R}^n)$ in terms of atoms, Studia Math. 62(1978), 93-101.
- [7] Meyer, N. G., Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), 717-721.
- [8] Miyachi, A., On some estimates for the wave equation in L^p and H^p , to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

- [9] Peral, J. C., L^p estimates for the wave equation, to appear in J. Func. Anal.
- [10] Strichartz, R. S., Convolution with kernels having singularities on a sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 148(1970), 461-471.
- [11] Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I, J. Math. Mech. 13(1964), 407-479; II, 14(1965), 821-839; III, 15(1966), 973-981.