

|      |
|------|
| 新制   |
| 理    |
| 1506 |
|      |

理学研究科

(論文内容の要旨)

$R$  を可換環とする.  $R$  の cup-length は, ある  $x_1, \dots, x_n \in R \setminus R^*$  で,  $x_1 \cdots x_n \neq 0$  を満たすような物が存在する最大の整数  $n$  として定義される.  $R$  の cup-length を  $\text{cup}(R)$  で表す. 特に位相空間  $X$  と可換環  $A$  に対し,  $X$  の  $A$ -cup-length を  $\text{cup}(\tilde{H}^*(X; A))$  で定義し,  $\text{cup}_A(X)$  と表す.  $\text{cup}_A(X)$  は後述する  $X$  の LS-category 数の下界を与える. この研究の主目的は  $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3})$  を計算する事である. ここで  $\tilde{G}_{n,k}$  は有向 Grassmann 多様体  $SO(n+k)/SO(n) \times SO(k)$  を表す.  $\tilde{G}_{n,k}$  は  $(nk)$  次元多様体である.  $\tilde{G}_{n,2}$  の  $\mathbb{Z}/2$ -cohomology がよく知られている一方で,  $\tilde{G}_{n,3}$  の場合は具体的な構造は知られていない.

著者は Gröbner 基底を用いて  $H^*(\tilde{G}_{n,3}; \mathbb{Z}/2)$  の環構造を詳しく調べた. 計算機を用いて,  $n \leq 200$  の範囲で  $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3})$  を計算した結果, 次の予想が得られた.

CONJECTURE.

$$\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3}) = \begin{cases} 2^{m+1} - 3 & \text{when } 2^{m+1} - 4 \leq n \leq 2^{m+1} + 2^m - 6, \\ 2^{m+1} - 3 + k & \text{when } n = 2^{m+1} + 2^m - 5 + k, 0 \leq k \leq 2, \\ 2^{m+1} + 2^m + \dots & \text{when } n = 2^{m+1} + 2^m + \dots + 2^{j-1} - 2 + k, \\ \quad + 2^{j+1} + 2^{j-1} + k & 0 \leq k \leq 2^j - 1. \end{cases}$$

特に  $n = 2^{m+1} - 4 (m \geq 2)$  のとき, Gröbner 基底を用いた解析が詳細に実行でき, 次の結果が得られた.

THEOREM 1.  $n = 2^{m+1} - 4 (m \geq 2)$  とする. このとき  $\text{cup}_{\mathbb{Z}/2}(\tilde{G}_{n,3}) = n + 1$ .

位相空間  $X$  に対し,  $X$  を覆うのに必要な,  $X$  の中で可縮な開集合の個数の最小を,  $X$  の LS-category 数と定め,  $\text{cat}(X)$  で表す. 多様体の次元と LS-category 数に関する一般論から  $\text{cat}(\tilde{G}_{n,3}) \leq \frac{3}{2}n$  が得られるが, この評価を改良することが出来た.

COROLLARY 2.  $n = 2^{m+1} - 4 (m \geq 2)$  とする. このとき  $n + 1 \leq \text{cat}(\tilde{G}_{n,3}) < \frac{3}{2}n$  である. 特に  $\text{cat}(\tilde{G}_{4,3}) = 5$ .

主結果を  $\tilde{G}_{n,3}$  のはめ込み問題に応用した.

THEOREM 3.  $n = 2^{m+1} - 4 (m \geq 3)$  のとき,  $\tilde{G}_{n,3}$  は  $\mathbb{R}^{3n-2}$  にはめ込めるが  $\mathbb{R}^{3n+8}$  へはできない. また  $\tilde{G}_{4,3}$  は  $\mathbb{R}^{21}$  にはめ込めるが  $\mathbb{R}^{17}$  へはできない.

Theorem 3 の証明は, 下からの評価は特性類の計算により, はめ込みの障害の非消滅を示すことによる. 上からの評価は, ファイブレーション

$$BSO(3n-3) \rightarrow BSO(\infty)$$

の解析とそこから得られた障害類の消滅から, 安定法束の分類写像  $\nu: \tilde{G}_{n,3} \rightarrow BSO(\infty)$  が  $\bar{\nu}: \tilde{G}_{n,3} \rightarrow BSO(3n-3)$  へリフトする事を示す. Hirsch の埋め込み定理から結論が従う.

(論文審査の結果の要旨)

空間のLusternik-Schnierelman Category(L-S Category)数とはその空間を空間内で一点に縮めることが可能な開集合で被覆するときに必要な開集合の数の最小の値である。この数は空間が滑らかな多様体の場合には、その多様体上で定義された滑らかな実数値函数の特異点の数の下限を与えることが知られているなど、多くの応用をもつ重要な不変量であります。しかしながらこの量を実際に計算することは一般には非常困難で、例えば複素射影空間や複素グラスマン多様体を含むコンパクトケーラー多様体の場合やユニタリー群の場合に一般的に決定されている他は、階数の低いリー群など限られた場合に知られているのみであります。特に幾何学的に最も重要と思われる有向グラスマン多様体の場合にはほとんど知られている結果がない状況であります。

この量を決定する上で非常に強力な道具は、その空間の乗法的コホモロジーのカップリングと呼ばれる量で、基点に制限したときに自明になる元を $n$ 個かけて自明でないものがあり、 $(n+1)$ 個かけると、全て自明になるときカップリングが $n$ であるという。空間のL-S Category数は空間のカップリングより小さくないことが知られています。

有向グラスマン多様体のmod 2 cohomology環の構造は具体的には知られていません。申請者深谷友宏はグレムナ基底の手法を用いてその構造を詳しく調べ、計算機により実際に計算を実行することで、低い次元の場合にそのカップリングを決定しこの問題についての予想を立てた。さらにグレムナ基底を用いた詳しい解析を実行することで特別の場合にこの予想を証明しました。

この結果を用いて申請者は有向グラスマン多様体のL-S Category数についての優れた評価を得た。また有向グラスマン多様体のmod 2 cohomology環の構造を用いて有向グラスマン多様体のはめ込みの問題に付いても優れた成果を得ている。

有向グラスマン多様体のmod 2 cohomology環の構造を具体的に調べる問題は、応用の立場からは不可欠な物でありながら多くの困難があり、これまで本質的な進歩がなかったが申請者は計算機科学と代数学の接点であるグレムナ基底の手法を巧みに用いてこの問題において顕著な業績を上げた。

主論文は代数的位相幾何学の専門誌として高い評価を得ているHomotopy, Homology and Applications誌にすでに掲載されております。

このように申請者の学位論文は国際的にも高い評価を受けており、極めて優れた独創的な知見を含む物であります。従って大学院在学5年未満ですが、例外的に博士(理学)の学位を授与するのにふさわしいものであると判断しました。審査委員会では関連事項についての試問結果と併せて合格と判定いたしました。