

非等方乱流中の速度勾配の分布関数について

京大院大・理研・物理 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

1 はじめに

乱流は一様に乱れた流れではなく、その中に構造があることが知られています。その構造の特徴付や可視化の方法には色々とありますが、強い渦領域が管状であることはよく知られています。つまり、球状の構造（等方的）ではなく、非等方な構造がその向きが等方的に分布することにより、乱流の統計上の等方性が出ていると考えられます。

従って、その構造の方向や向きを揃えた場の特性と、一様等方乱流の特性とを比較することにより、渦構造からの影響をより詳しく、例えば、軸方向とそれに垂直な方向とでの影響の違いなども、調べることが出来ると期待されます。

ここでは、出来るだけ簡単な「平均流」を用いて、渦構造の方向や向きを揃えることを考えます。例えば、一様引き伸ばし流では渦伸長により引き伸ばしのある方向に渦軸が揃い、一様回転加えると Taylor-Proudman の定理や安定性の性質により、向きまでも揃えることが可能となります。

以前、非等方乱流中の速度の分布関数 (PDF) を調べ、渦管の軸方向とそれに垂直な方向とでは、速度の PDF が変わることを、そしてそれが、圧力項からの寄与と粘性項からの寄与とのバランスが崩れたためであることを報告しました。本報告では、非等方乱流として一様引き伸ばし流による乱流を考え、その速度勾配の PDF を調べ、等方乱流の結果と比較した結果をまとめます。

速度勾配の PDF については既に多くの研究がありますが、以下に、本研究に関係すると思われるものを簡単にまとめます。She ら ('88) は、DNS データをスケール毎にバンドフィルタリングをすることで、skewness (SK)

が負となるのは大きいスケールにより, flatness (FL) が 3 より大きくなるのは散逸領域によることを示しました. Kida と Murakami ('89) は DNS の結果から速度勾配の P D F の裾は指数関数であるとししました.

モデルによりこれらの P D F を説明したものとしては, 次の二つのものが知られています. She('91) は, Kraichnan により提案された mapping-closure のアイデアを利用し, 横方向の速度勾配の P D F を説明する 'dynamical-model' を提案しました. また, Hosokawa('95,'96) は '3-dimensional binomial Cantor set model' を用い, 縦・横両方向の速度勾配の P D F に対し DNS と良く一致する結果を出しています.

しかしながらこれらのモデルにおいては, P D F は DNS のそれと良く一致するものの, 基礎方程式との関係が良く分かりません. つまり, 基礎方程式である Navier-Stokes 方程式のどの項がどう働いて, そのような P D F が得られるのかが不明です. そこで, 本研究では, Sinai と Yakhot により提案されたモーメント法を用い, P D F の形状決定における各項の役割を, DNS データを基に詳しく調べることにします.

2 基礎方程式

一様引き伸ばしのある時の非圧縮の粘性流体の運動の支配方程式を考えます. まず, 速度を平均流と揺らぎの部分に分けます

$$\mathbf{U} = (A_1 x_1 + u_1, A_2 x_2 + u_2, A_3 x_3 + u_3) \quad (1)$$

ここで, 非圧縮の条件から $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ とします. 以下では, $(A_1, A_2, A_3) = (0, 0, 0)$ の時を「等方」と呼び, 「非等方」としては軸対称に収縮する $(A_1, A_2, A_3) = (1, -0.5, -0.5)$ のような一様引き伸ばし流を指すものとします. 他のタイプの非等方流に対する結果は, 今後の機会に譲ることとします.

揺らぎの部分の時間発展の支配方程式は,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + A_j x_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + A_\alpha u_\alpha + u_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

と書けます。但し、繰り返された Latin 添字については 1 から 3 まで和をとり、Greek 添字については和をとらないものとします。

式 (2) の右辺第 2 項には生の空間変数に依存する項があるので、座標変数を時間に依存する形に変数変換します。

$$X_\alpha = \exp(-A_\alpha t)x_\alpha \equiv T_\alpha x_\alpha, \quad (4)$$

この新しい変数を用いると、支配方程式は次のように書けます。

$$\partial_t u_\alpha + A_\alpha u_\alpha + u_j T_j \partial_j u_\alpha = -T_\alpha \partial_\alpha p + \nu T_j T_j \partial_j \partial_j u_\alpha \quad (5)$$

$$T_j \partial_j u_j = 0, \quad (6)$$

ここに $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial X_\alpha}$ です。

この方程式を周期境界条件の下で数値シミュレーションします。ただし、一様引き伸ばしのある時は、各方向の周期長は時間と共に変化することを注意しておきます。空間方向には擬スペクトル法を用い、時間方向には 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用いました。グリッド数は、等方乱流の時は 128^3 で、非等方乱流の時は 256×128^2 としました。初期条件は、低波数外力により得られた定常乱流で、large-eddy time-scale: $t_{le} = \mathcal{E}/\nu Q \sim 10$, small eddy time scale: $t_{se} = 1/\sqrt{2Q} \sim 1$, 但し $\mathcal{E}$, Q は、各々エネルギー密度とエンストロフィ密度です。

3 数値シミュレーションの結果

DNS の結果得られた速度勾配の PDF を図 1 に示します。図 1(a),(b) は、各々等方乱流の縦および横方向の速度勾配の PDF です。既に知られているように、縦方向の速度勾配では、負の方の裾の方が大きく Gauss 分布からずれていて、 $SK < 0$ となっています。また、縦・横方向の速度勾配の両 PDF は共に Gauss 分布よりも広い裾を持ち、 $FL > 3$ となっていることが分かります。

他方、一様引き伸ばしに加わり、流れが非等方となると、図 1 (c),(d) に示すように分布が変化します。縦方向の速度勾配については、渦管方向 ($\diamond$) の速度勾配の PDF は対称化していますが、他の縮む方向 ($+$, $\square$) ののはほ

とんど影響を受けていないことが分かります (図 1 (c)). また, 横方向の速度場については, どの方向も広い裾を持ったままですが, 縮む方向の速度を伸びる方向で微分したものが狭いなど非等方の影響が確認できます.

さて, 等方・非等方におけるこれらの分布が出てくるメカニズムを探るために, Sinai と Yakhot により提案されたモーメント法を利用することを考えます. この方法は, PDF にたいし基礎方程式に基づいた表現を与えるので, 各項からの寄与を詳しく調べるのに適していると考えられます (Ref. Sinai & Yakhot '89, Takaoka '95).

4 モーメント法

速度勾配の時間発展の基礎方程式は (式 5) から導けますが, 以下の表記の便利のために, $d_{\alpha\beta} = \bar{\partial}_\beta u_\alpha = T_\beta \partial_\beta u_\alpha$ と書き, 分布の形に興味がありその絶対量を消去するために, 分散が 1 となるような規格化された変数を導入します; $\zeta_{\alpha\beta}^2 = \frac{d_{\alpha\beta}^2}{\langle d_{\alpha\beta}^2 \rangle}$ この新しい変数の $2n$ 次のモーメントの支配方程式は,

$$\partial_t \langle \zeta_{\alpha\beta}^{2n} \rangle = \frac{2n \langle e_{\alpha\beta} \rangle}{d_{\alpha\beta}} \{ (2n-1) \langle \zeta_{\alpha\beta}^{2n-2} f_{\alpha\beta} \rangle - \langle \zeta_{\alpha\beta}^{2n} \rangle \} \quad (7)$$

ただし, $f_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} / \langle e_{\alpha\beta} \rangle$, $e_{\alpha\beta} = u_\alpha d_{j\beta} \bar{\partial}_j d_{\alpha\beta} + \bar{\partial}_\alpha d_{\alpha\beta} \bar{\partial}_\beta p - \nu (\bar{\partial}_j d_{\alpha\beta})^2$ です.

いま, $d_{\alpha\beta}$ が相似的に減衰する ($\zeta_{\alpha\beta}$ が stationary) とすると,

$$(2n-1) \langle \zeta_{\alpha\beta}^{2n-2} f_{\alpha\beta} \rangle = \langle \zeta_{\alpha\beta}^{2n} \rangle \quad (8)$$

となり, これを確率分布関数を用いて書くと

$$(2n-1) \int \int \zeta_{\alpha\beta}^{2n-2} f_{\alpha\beta} P(\zeta_{\alpha\beta}, f_{\alpha\beta}) d\zeta_{\alpha\beta} df_{\alpha\beta} = \int \zeta_{\alpha\beta}^{2n} P(\zeta_{\alpha\beta}) d\zeta_{\alpha\beta} \quad (9)$$

となります. ここで,

$$P(\zeta_{\alpha\beta}, f_{\alpha\beta}) = P(\zeta_{\alpha\beta}) P_{\zeta_{\alpha\beta}}(f_{\alpha\beta}), \quad q_{\alpha\beta}(\zeta_{\alpha\beta}) = \int f_{\alpha\beta} P_{\zeta_{\alpha\beta}}(f_{\alpha\beta}) df_{\alpha\beta} \quad (10)$$

とすると,

$$- \int \zeta_{\alpha\beta}^{2n-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha\beta}} (P(\zeta_{\alpha\beta}) q_{\alpha\beta}(\zeta_{\alpha\beta})) d\zeta_{\alpha\beta} = \int \zeta_{\alpha\beta}^{2n} P(\zeta_{\alpha\beta}) df_{\alpha\beta} \quad (11)$$

$$P(\zeta_{\alpha\beta}) = \frac{C}{q_{\alpha\beta}(\zeta_{\alpha\beta})} \exp\left(-\int_0^{\zeta_{\alpha\beta}} \frac{x dx}{q_{\alpha\beta}(x)}\right) \quad (12)$$

一見 $P(\zeta_{\alpha\beta})$ が求まったように思えますが、ある意味ではこれは単なる書き換えにすぎず、 $q_{\alpha\beta}(x)$ の関数形が求まらないと $P(\zeta_{\alpha\beta})$ が決定できないのです。

そこで、 $q_{\alpha\beta}(x)$ と $P(\zeta_{\alpha\beta})$ との関係について少し調べておくことにします。図 1 から分かるように PDF は $|\zeta_{\alpha\beta}|$ のゼロ付近で大きい値をとるので、 $q_{\alpha\beta}(x)$ の巾展開することを考えます。

$q_{\alpha\beta}(x) = C_0$ のとき

$$P(x) = \frac{C}{C_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2C_0}\right) \quad (13)$$

と Gauss 分布となり、 $C, C_0 (> 0)$ が各々規格化定数と分散に対応していることが分かります。

$q_{\alpha\beta}(x) = C_0 + C_1x$ のとき

$$P(x) = C \cdot C_0^{-\frac{C_0}{C_1^2}} (C_0 + C_1x)^{-1+\frac{C_0}{C_1^2}} \exp\left(-\frac{x}{C_1}\right) \quad (14)$$

で、分布は非対称となります。また、 $C_1 < 0 \rightarrow SK < 0, C_1 > 0 \rightarrow SK > 0$ となることも確かめられます。

$q_{\alpha\beta}(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$ のとき

$$P(x) = C_c(x-a)^{-1-\frac{a}{C_2(a-b)}}(x-b)^{-1+\frac{b}{C_2(a-b)}} \quad (15)$$

ただし、

$$C_c = \frac{C}{C_2}(-a)^{\frac{a}{C_2(a-b)}}(-b)^{-\frac{b}{C_2(a-b)}} \quad (16)$$

$$a = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2C_0}}{2C_2}, b = \frac{-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2C_0}}{2C_2} \quad (17)$$

とします。また、 $C_2 < 0 \rightarrow FL < 3, C_2 > 0 \rightarrow FL > 3$ となることも分かります。従って、 $SK \neq 0$ や $FL \neq 3$ の PDF を表現するためには、少なくとも二次式まで展開してやる必要があることが分かります。

5 シミュレーションにおける $q_{\alpha\beta}(x)$

そこで、実際の乱流で $q_{\alpha\beta}(x)$ のような関数関係があるのか、どのような関数形をしているのかを調べる必要があります。等方および非等方乱流に対して行なった結果を、それぞれ図2と3に示します。各図の(i)(ii)には各々縦方向および横方向の速度勾配に対するものをプロットしてあります。

また、各項からの寄与を見るために、(b)-(d)には圧力-、粘性-、非線形-の各項を人為的に取り除いた時の関数関係をプロットしてあります。ただし、規格化定数は(a)と同じものを用いてありますので、(b)-(d)のグラフを足すと、(a)の二倍のものが得られます。つまり、これらのグラフと(a)との差が、各々の項からの寄与ということになります。

どの場合も(a)は下に凸のほぼ放物線となっており、 $FL > 3$ という先の結果とコンシステントとなっています。また、(b)-(d)のグラフと比べてみると、各項からの寄与がうまくバランスして出来ていることも分かります。(i)-(a)の縦方向の速度勾配のグラフは、 y -軸に関し非対称(最小の位置が $x > 0$ にずれている)となっており、 $SK < 0$ という先の結果とコンシステントとなっています。また、非等方乱流(図3(i)(a))の場合には、引き伸ばしのある方向(渦管の軸方向)の分布($\diamond$)は、他のものと比べ対称的になっており、この方向のSkewnessが他の方向のものと比べゼロに近いという先の結果とコンシステントとなっています。

次に、各項の役割についてみてみます。圧力項の効果は(a)と(b)との差から、横方向の速度勾配の分布にはほとんど寄与していないが、非等方になると FL に差が出るように働いていることが分かります。また、縦方向の速度勾配の分布に対しては非等方乱流の引き伸ばされる方向のが $SK > 0$ となっている以外は $SK < 0$ の寄与をしています。

粘性項の効果は(a)と(c)との差ですが、等方乱流では FL を大きくするように働いていますが、非等方になると方向によっては FL を小さくするように働くことが分かります。また、非線形項の効果は(a)と(d)との差ですが、縦方向の速度勾配に対しては圧力項とほぼ逆の寄与をし、横方向の速度勾配に対しては粘性項とほぼ逆の寄与をしていることが分かります。

6 2次式近似

前の§ 5の結果から実際の乱流場でも、§ 4で期待されるような関数関係が、各項に対して成り立っていることが分かりました。

ここではPDFの端の方の稀なところまで再現することは諦めて、取り敢えず SK や FL ぐらいが再現できることを期待して、関数関係を展開の二次式で近似することにします。図 2 と 3 のグラフから最小二乗法により係数を決定し、先の§ 4の式 (15) を使ってPDFを求めました。求められた結果を図 1 に対応する形で図 4 に示します。

グラフを比べると、Gauss 分布 (図中の放物線) からのずれの様子や非対称性といった特徴が、再現できていることが分かります。また、非等方性によるPDFの形の違いも再現できています。

このことをより定量的に見るために、 SK と FL とを計算し、DNSにおけるそれらと比較しました。

等方乱流の結果：

	$SK_{\alpha\alpha}$	$SK_{\alpha\beta}$	$FL_{\alpha\alpha}$	$FL_{\alpha\beta}$
DNS	-0.46	0.00	4.31	5.55
二次式近似	-0.58	0.00	4.55	6.00

非等方乱流の結果：

	SK_{++}	SK_{--}	SK_{+-}	SK_{-+}	$SK_{--'}$
DNS	-0.13	-0.36	-0.08	0.02	-0.01
二次式近似	-0.12	-0.35	-0.45	0.20	0.12
	FL_{++}	FL_{--}	FL_{+-}	FL_{-+}	$FL_{--'}$
DNS	5.26	4.03	5.88	7.73	4.78
二次式近似	5.68	4.36	6.76	8.78	5.68

等方乱流の場合も非等方乱流の場合も、ほとんどの場合一割程度の誤差で良く一致しています。もちろん、より高次のモーメントを計算すると、PDFの裾 (稀な部分) の形が効いてくるので近似はどんどん悪くなります。

7 等方乱流の情報から非等方乱流の PDF を予測

ここでは、等方乱流の情報から、非等方乱流における $P(\zeta_{\alpha\beta})$ の等方乱流からのずれを、定性的にでも良いから予想することを考えます。

非等方性の影響を取り入れる最低次の近似として、次のように考えてみます。 $A_\alpha t \ll 1$ として $T_\alpha \approx 1 - A_\alpha t$ と展開します。また、 $A_\alpha \gg 1$ として A を含んだ項のみ残し、 $-\partial_j \partial_j p_A = A_j \partial_j u_j$ などとします。エディターンオーバータイムに比べ十分短い時間のみ考え、各項の $d_{\alpha\beta}$ に対する関数形が変わらないとします。

以上の仮定の下に $e_{\alpha\beta}$ を展開します；

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} \approx & \{u_\alpha d_{j\beta}^0 \partial_j d_{\alpha\beta}^0 + \partial_\alpha d_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta p - \nu (\partial_j d_{\alpha\beta}^0)^2\} \\ & - (A_j + 2A_\beta) t u_\alpha d_{j\beta}^0 \partial_j d_{\alpha\beta}^0 - (A_\alpha + 2A_\beta) t \partial_\alpha d_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta p \\ & + 2\nu (A_j + A_\beta) t (\partial_j d_{\alpha\beta}^0)^2 \end{aligned}$$

ただし、 $d_{\alpha\beta}^0 = \partial_\beta u_\alpha$ です。この右辺の各項に等方乱流のデータから、最小自乗法により求められた二時関数の関数形を代入し、 $e_{\alpha\beta}$ の関数形を求めます。

等方乱流の各値を代入して計算すると、 (C_0, C_1, C_2) は

$$e_{++} \approx (-1.6 - 7.2At, 0.35 - 4.5At, 0.2 - 0.4At)$$

$$e_{--} \approx (2.15 + 3.5At, -0.55 + 3.2At, 0.33 + 0.3At)$$

$$e_{+-} \approx (0.5 + 1.6At, 0.05At, 0.2 - 0.2At)$$

$$e_{-+} \approx (0.5 - 2.9At, -0.25At, 0.2 - 1.85At)$$

$$e_{-+} \approx (0.8 + 0.1At, 0.2At, 0.65 - 0.2At)$$

となります。規格化して非等方乱流のそれらの値と比べると、次の表のようになります。ただし、 $t = 0.1$ としました。

	C_0	C_1	C_2		C_0	C_1	C_2
e_{++} DNS	0.75	-0.05	0.30	e_{--} DNS	0.90	-0.15	0.15
二次式近似	0.75	-0.08	0.22	二次式近似	0.90	-0.24	0.34
e_{+-} DNS	0.65	0.20	0.40	e_{-+} DNS	0.50	0.10	0.65
二次式近似	0.65	—	0.19	二次式近似	0.50	—	0.64
e_{-+} DNS	0.75	0.05	0.30				
二次式近似	0.75	—	0.11				

定性的には似た傾向が出るのですが、定量的にはまだまだ改良の余地があります。

8 まとめ

等方及び非等方乱流中の、速度勾配のPDFを調べました。Skewnessは縦速度勾配に対し負となり分布は非対称で、非等方乱流では渦管の軸方向のskewnessの方が大きい値をとりました。Flatnessも3より大きくGauss分布より広い裾を持ち、非等方乱流では縦速度勾配で渦管の軸方向のflatnessの方が大きい値をとる、横速度勾配のそれは三グループに分けられました。

モーメント法を適用し、 $q_{\alpha\beta}(x)$ を二次関数で近似しました。PDFやskewness, flatnessといった低次のモーメントをほぼ再現出来ました。この表現を利用し、Navier-Stokes方程式に現われる各項のPDFに対する役割も調べました。 $\langle e_{\alpha\beta}$ の符号にもよるのですが、粘性項や圧力項はflatnessを大きく非線形項は小さくする方に、各々働いていることが分かりました。また、縦速度勾配のPDFの非対称性(skewness)には、 $u_\alpha d_{\alpha\alpha} \partial_\alpha d_{\alpha\alpha}$ や $\partial_\alpha d_{\alpha\alpha} \partial_\alpha p$ からの寄与が大きいことも分かりました。

等方乱流における各項の情報(二次関数の関数形)から、非等方乱流のPDFをどれくらい予想できるか試してみました。かなりナイーブな仮定にもかかわらず、skewnessやflatnessといった量の定性的な傾向を示すことに成功しました。

今後は、rapid-distortion-approximationを用いて、等方乱流の情報から非等方乱流のPDFを予想する精度をあげられるのでは、と考えています。また、各項の値の空間分布も調べ、渦構造との関係を明らかにしてゆきたいと考えています。

DNSの結果

等方

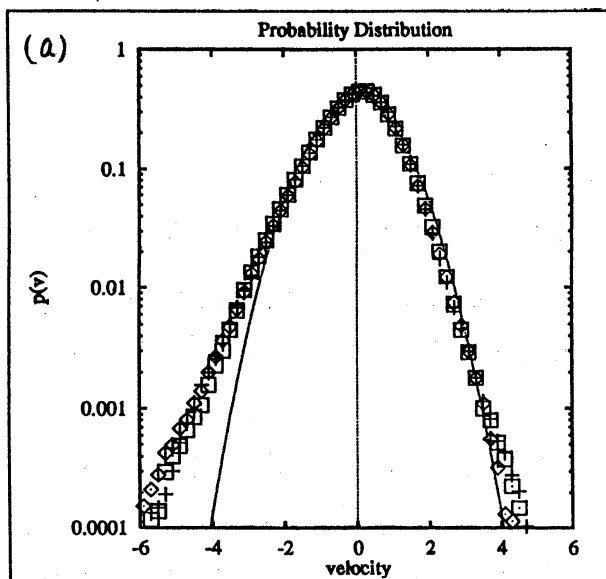


Figure 5: dns.frd.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_1 u_1, + = \partial_2 u_2, \square = \partial_3 u_3$$

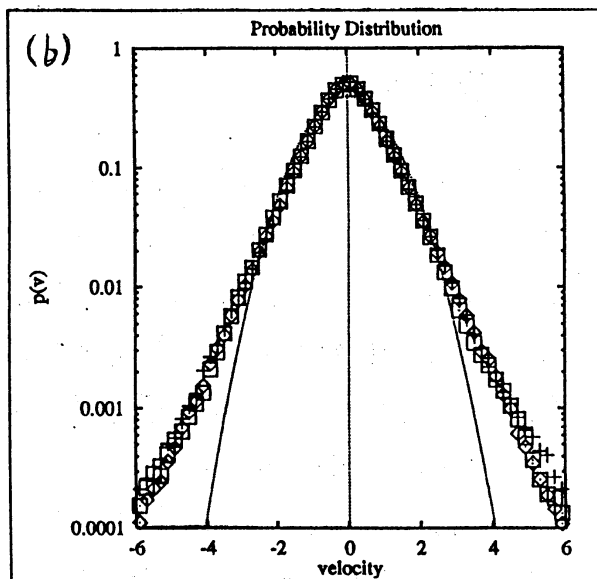


Figure 6: dns.fro.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_3 u_1, + = \partial_1 u_2, \square = \partial_1 u_3$$

非等方

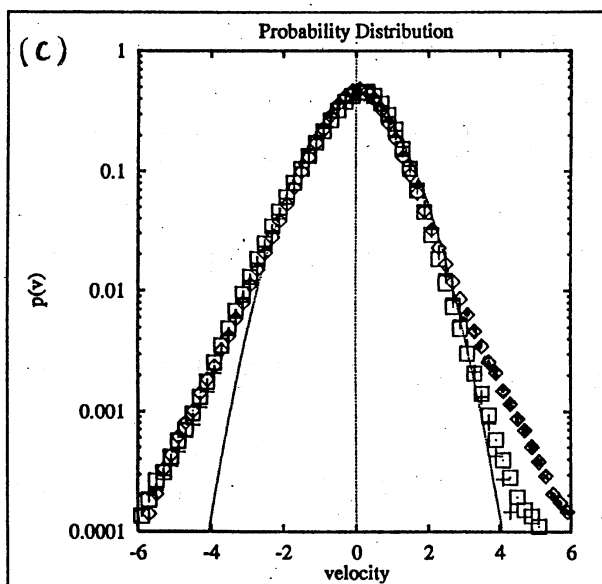


Figure 7: dns.std.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_1 u_1 = \partial_+ u_+ \\ + = \partial_2 u_2 = \partial_- u_- , \square = \partial_3 u_3 = \partial_- u_-$$

図 1

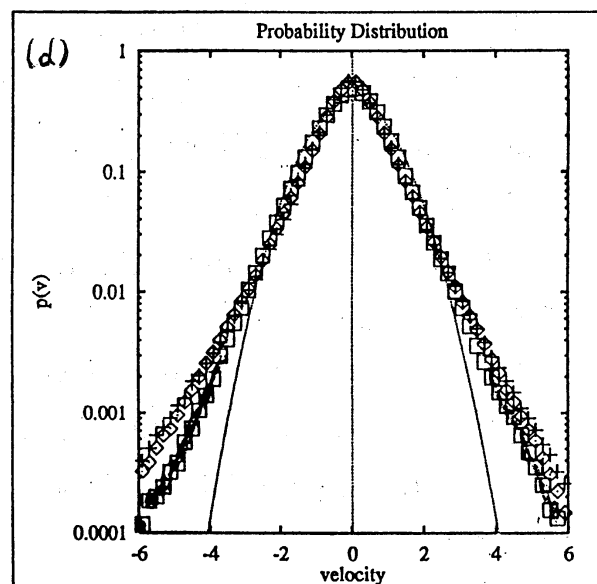


Figure 8: dns.sto.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_3 u_1 = \partial_- u_+ \\ + = \partial_1 u_2 = \partial_+ u_- \\ \square = \partial_2 u_3 = \partial_- u_-$$

等势乱流

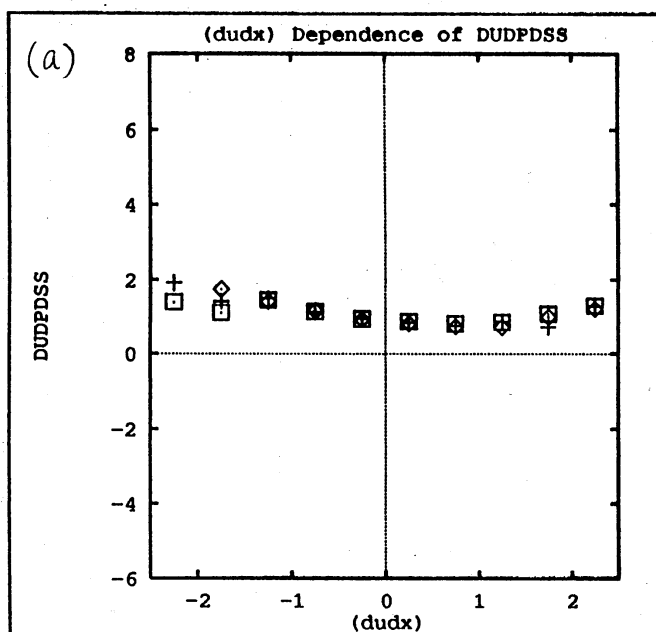


Figure 1: frp5r3.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

$\diamond = e_{11}$, $+$ = e_{22} , $\square = e_{33}$

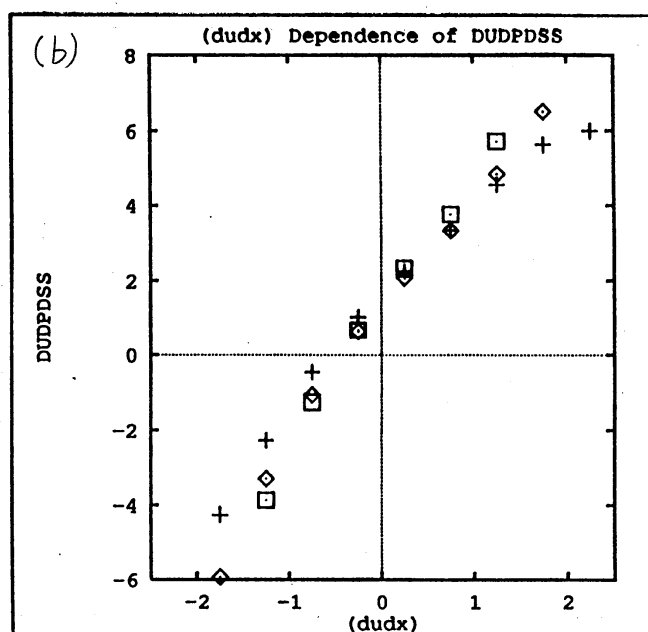


Figure 2: frq5r32.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

P-項存1

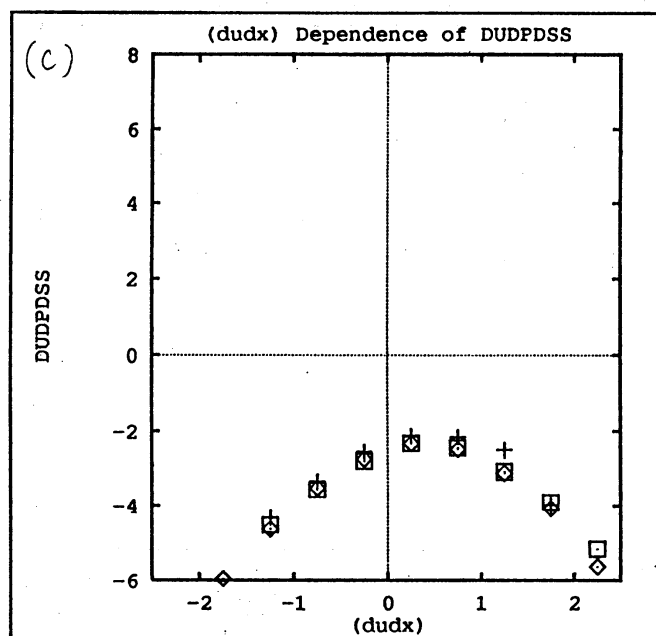


Figure 3: frq5r33.eps(DUDX vs $(dudx)^{**2}$)

粘性項存1

図 2 (i)

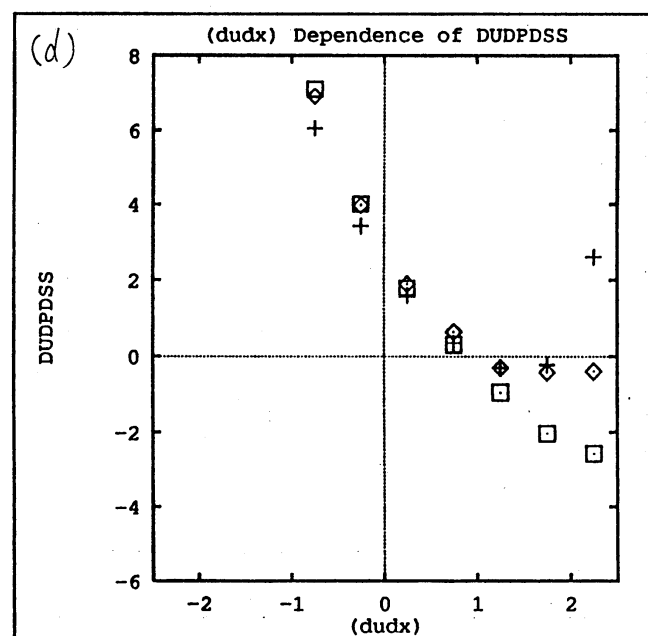


Figure 4: frq5r34.eps(DUDY vs $(dudy)^{**2}$)

NL-項存1

等势乱流

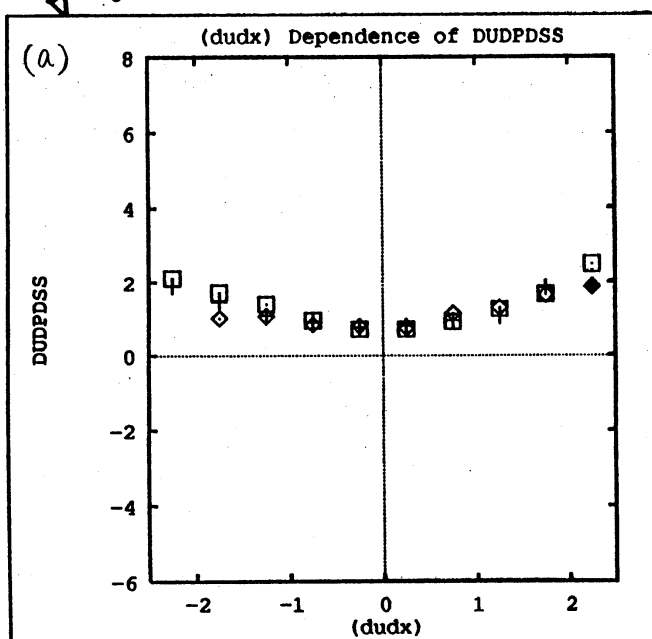


Figure 9: frp7r5.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

$\diamond = e_{12}$, $+$ = e_{23} , $\square = e_{31}$

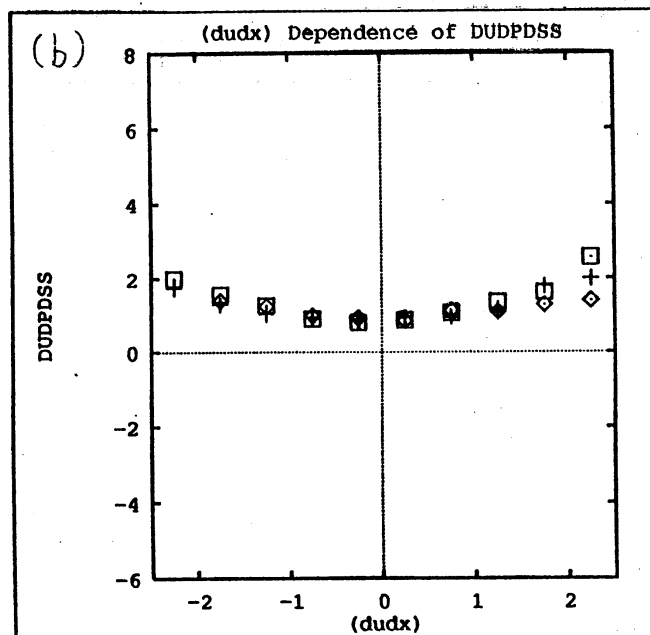


Figure 10: frq7r52.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

P-项存1

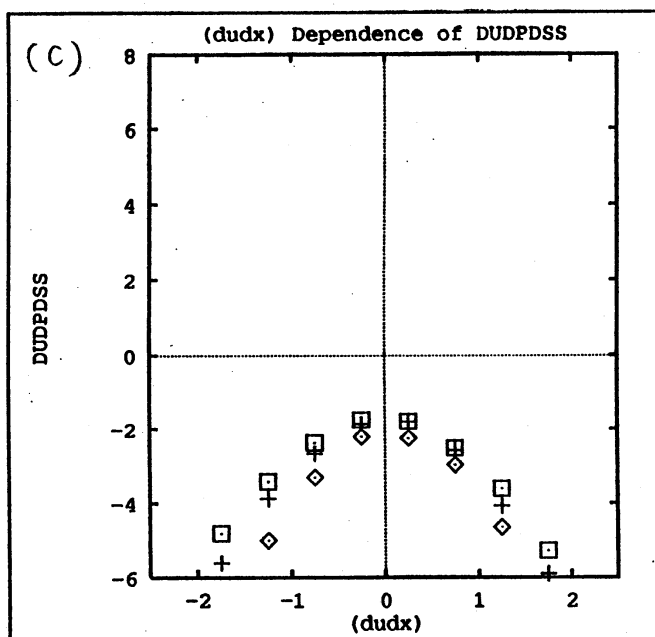


Figure 11: frq7r53.eps(DUDX vs $(dudx)**2$)

粘性项存1

12 (ii)

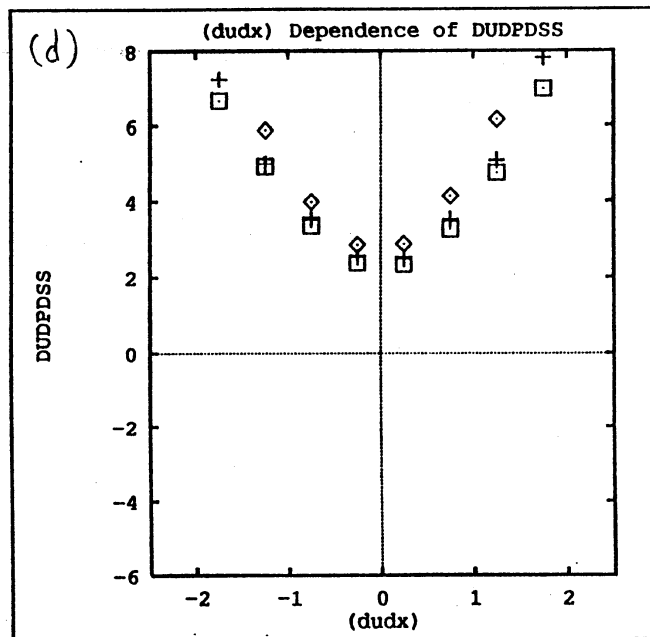


Figure 12: frq7r54.eps(DUDY vs $(dudy)**2$)

NL-项存1

非等熵乱流

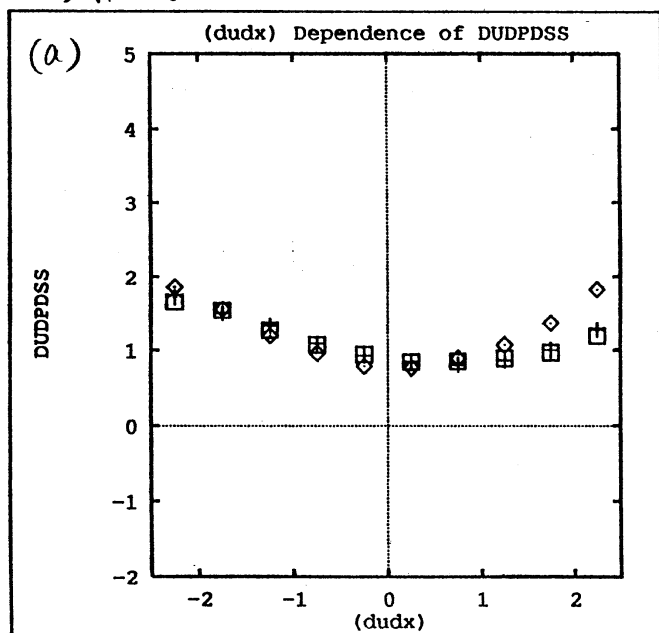


Figure 1: stq5r31.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

$\diamond = e_{++}$, $+$ = e_{--} , $\square = e_{--}$

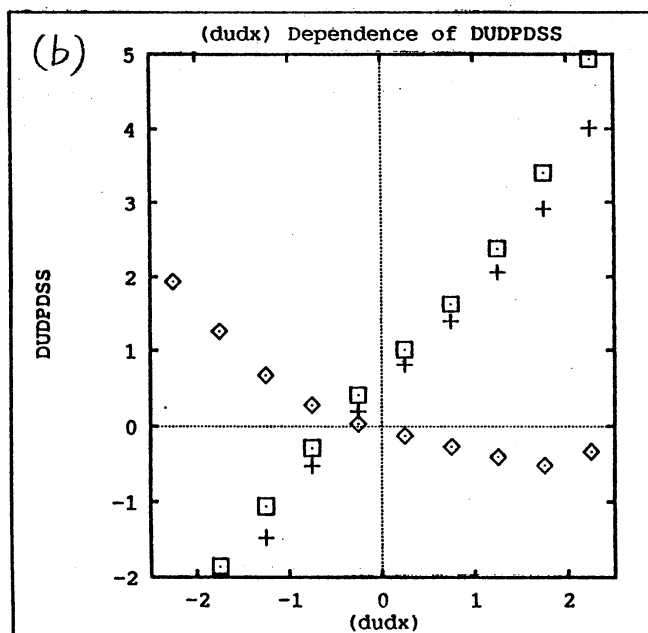


Figure 2: stq5r32.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

P-顶存L

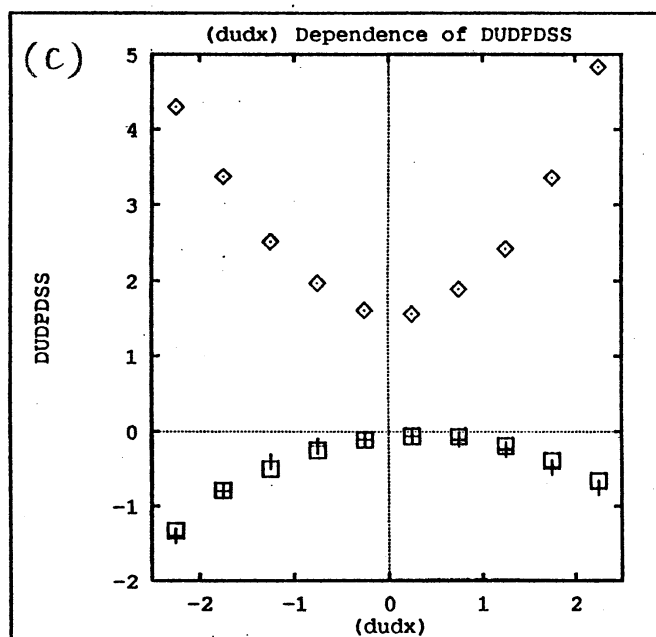


Figure 3: stq5r33.eps(DUDX vs $(dudx)^{**2}$)

粘性顶存L

图3(i)

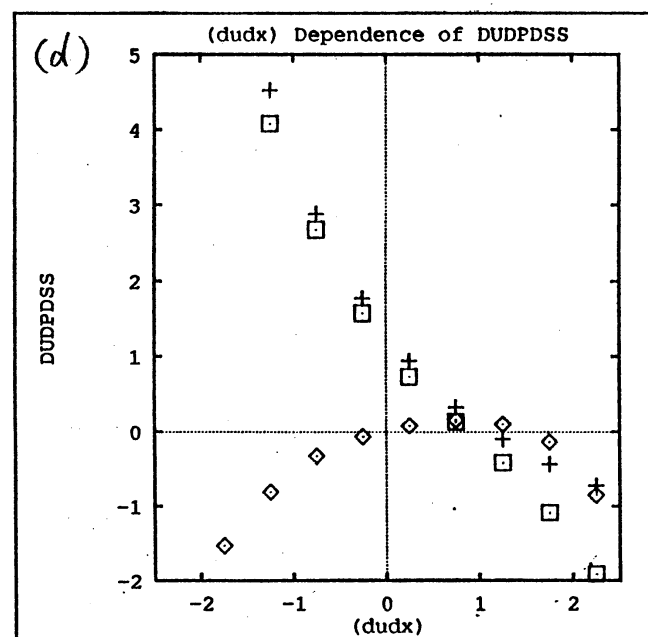


Figure 4: stq5r34.eps(DUDY vs $(dudy)^{**2}$)

NL-顶存L

非等方乱流

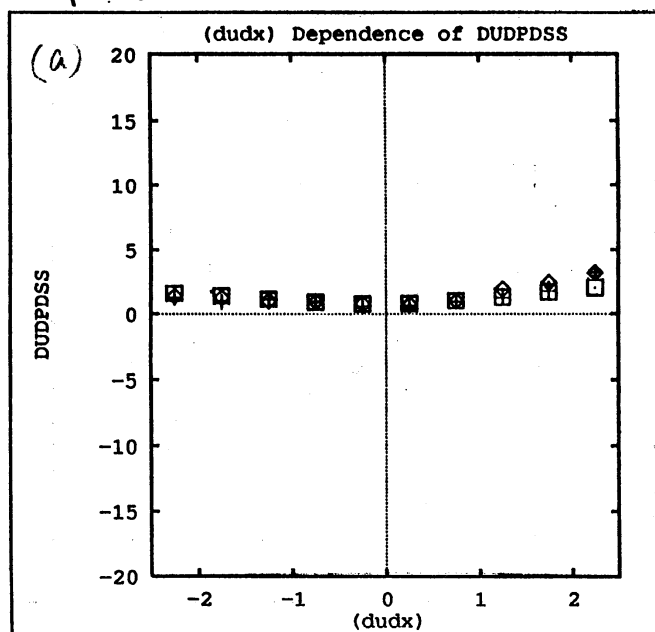


Figure 9: stq7r51.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

$\diamond = e_{+-}$, $+$ = e_{--} , $\square = e_{-+}$

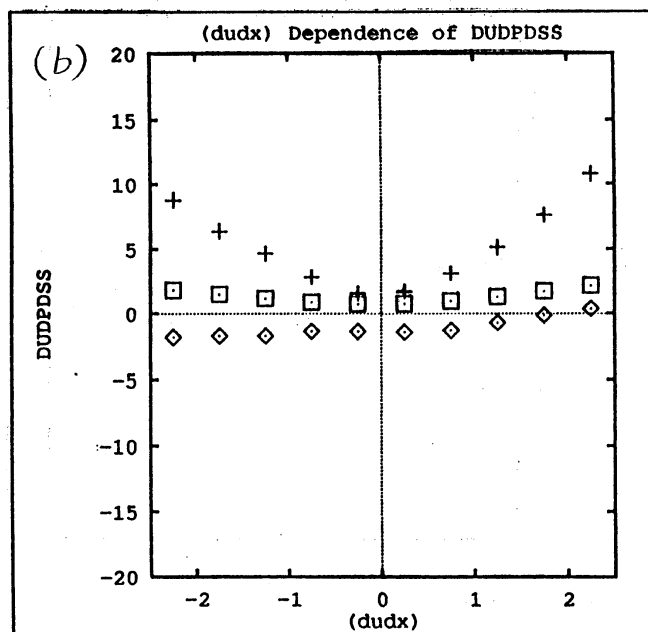


Figure 10: stq7r52.eps(DUDX vs $(v_i)^2$)

P-項存し

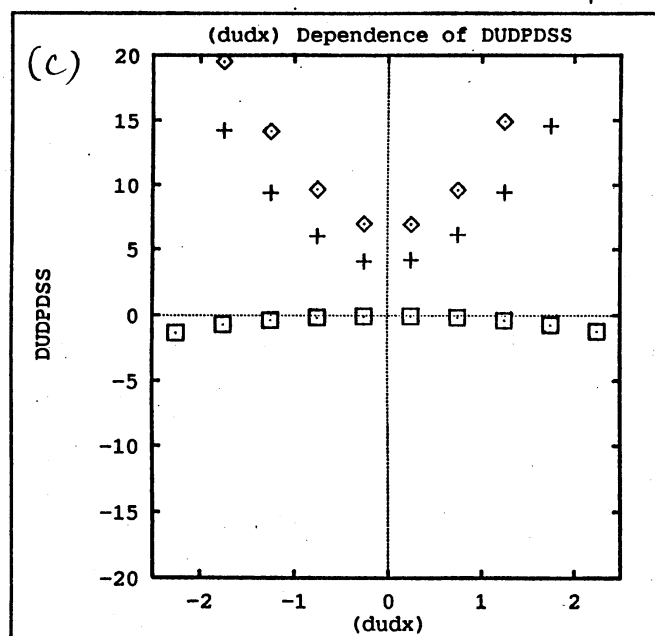


Figure 11: stq7r53.eps(DUDX vs $(dudx)^{**2}$)

粘性項存し

図 3 (ii)

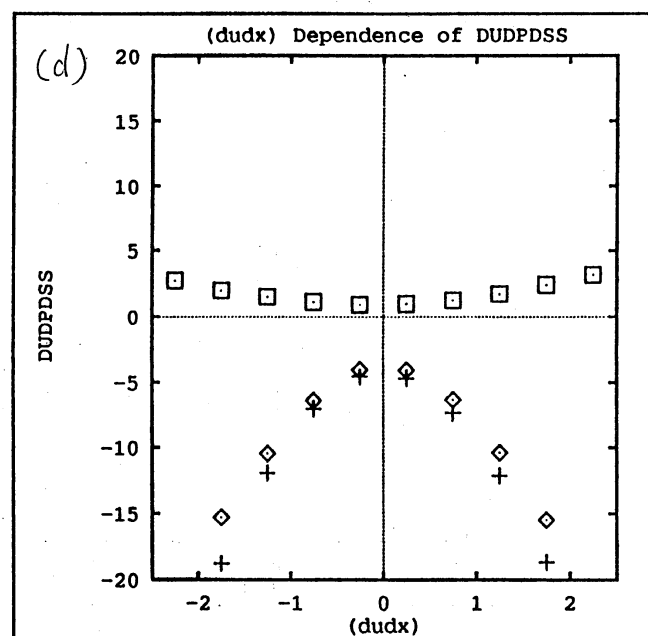


Figure 12: stq7r54.eps(DUDY vs $(dudy)^{**2}$)

NL-項存し

2次式で近似したときのPDF

等分

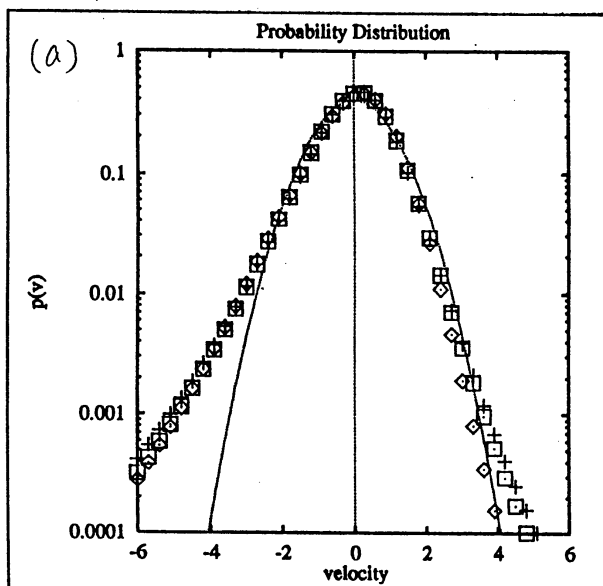


Figure 1: appr.frd.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_1 u_1, + = \partial_2 u_2, \square = \partial_3 u_3,$$

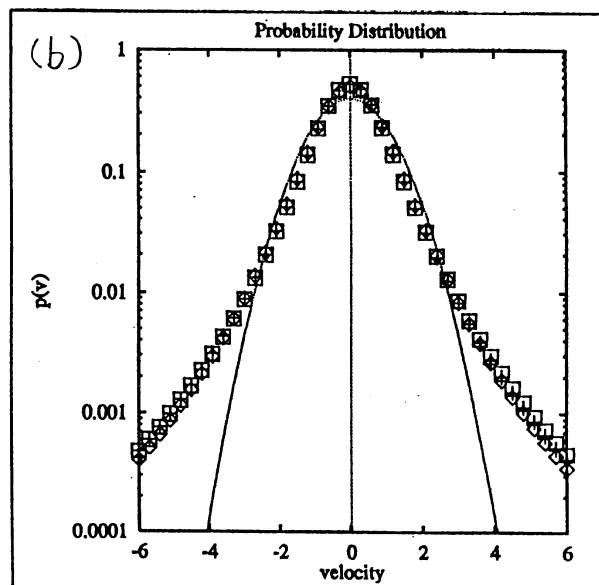


Figure 2: appr.fro.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_3 u_1, + = \partial_2 u_2, \square = \partial_1 u_3$$

非等分

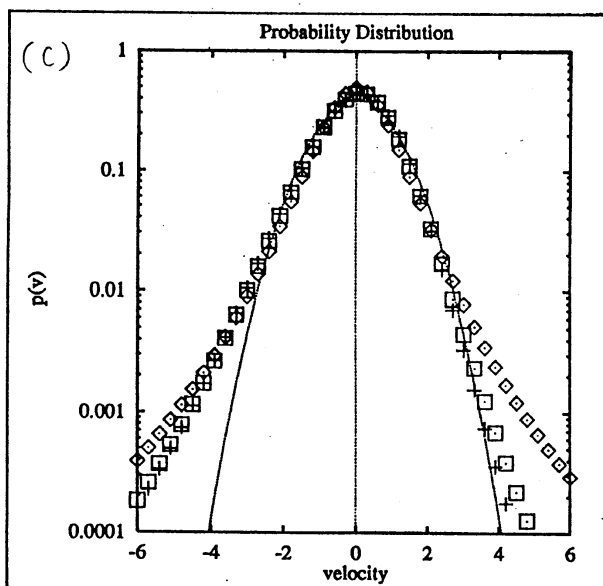


Figure 3: appr.std.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_+ u_+, + = \partial_- u_-, \square = \partial_- u_-$$

図 4

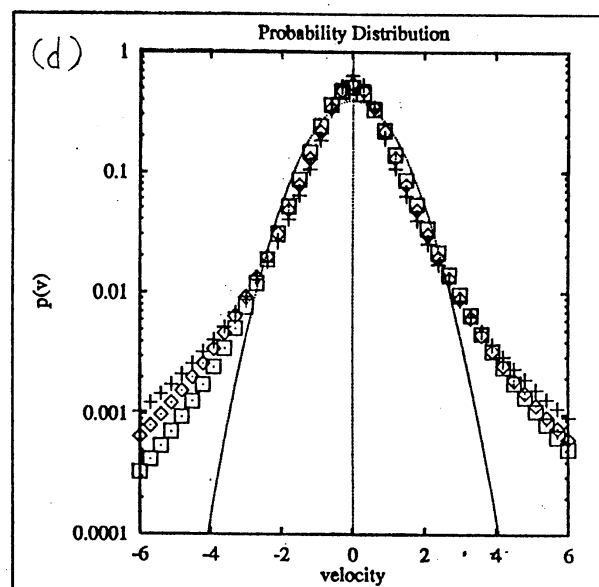


Figure 4: appr.sto.eps(Vel PDF)

$$\diamond = \partial_- u_+, + = \partial_+ u_-, \square = \partial_- u_-$$