

# Connes の新しい crossed product と integrable representation について

天王寺高校 榎本雅俊

最近、Connes がいくつかの興味ある概念を crossed product と関連して展開していきまのぞ、ここではそれについて、簡単に紹介したいと思ひます。

先ず、Connes は新しく crossed product を次の様に導入してゐます。

(Def. 1)  $G$  を locally compact group with the left Haar measure  $dg$  とし、 $\lambda$  を  $G$  の left regular representation とする。  $M$  を von Neumann algebra、 $\sigma$  を  $G$  から  $M$  への Connes の意味での representation (i.e.,  $G$  から  $M$  の automorphisms 全体の作る group への  $\sigma$ -weakly continuous homomorphism) とする。この時、 $M \rtimes_{\sigma} G$  (crossed product of  $M$  by  $\sigma$ ) を、次の set で Def. する。

$$\{ y \in M \rtimes_{\sigma} G(L^2(G)); (\sigma_g \otimes A\lambda(g))y = y \text{ for } \forall g \in G \}. \quad (\text{但し, } A\lambda(g)(x) = \lambda(g)x\lambda(g)^{-1} \text{ (} \equiv x, x \in L^2(G) \text{)}).$$

この様に crossed product を新しく Def. すると、従来のもの

との関係が問題になるが、discreteの場合には、この Def. はもと a crossed product と一致する。continuous の場合には、locally compact abelian group の時に一致する。この事実を使うと次の proposition が簡単に示される。

(Prop. 2)  $M$  を type I factor.  $\sigma$  を locally compact abelian group  $G$  から  $M$  への representation とする。この時、 $M \otimes_{\sigma} G$  は、type I von Neumann algebra になる。

(pr.)  $M$  は type I factor だから、 $\sigma_g$  は  $M$  の inner automorphism である。だから、 $\sigma_g(x) = u_g x u_g^*$  (但し、 $u_g$  は  $M$  の unitary で、 $x$  は  $M$  の任意の元) と書ける。 $M \otimes_{\sigma} G$  は、 $\sigma \otimes \lambda$  の fixed algebra だから、 $M \otimes_{\sigma} G = \{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}'$  になるが、 $\{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}$  は可換な set だから、 $M \otimes_{\sigma} G$  は type I になる。

次に、integrable representation について述べよう。まず、

(Def. 3)  $G$  を locally compact group with the left Haar measure  $dg$  とし、 $M$  を von Neumann algebra.  $\sigma$  を  $G$  から  $M$  への representation とする。 $\{x \in M ; \int_G \sigma_g(x x^*) dg \in M\}$  が  $M$  で weakly dense である場合には、 $\sigma$  を integrable であるという。

この時、 $\{x \in M ; \int_G \sigma_g(x x^*) dg \in M\}$  は left ideal であることは注意する。

integrable representation の例として、 $G$  を locally compact

group with the left Haar measure  $dg$  とし、 $M = \mathcal{L}(L^2(G))$ ,  $U_g = A\lambda(g)$  とすれば、これが1つの例を与えてくれることがわかり  
ます。integrable representation については、次の事が成り立ち  
ます。

(1)  $G$  は locally compact group,  $\sigma \in G$  から von Neumann algebra  $M$  への representation.  $N$  は  $\sigma$ -finite von Neumann algebra とす  
る。もし、 $\sigma \otimes 1$  が  $G$  から  $M \otimes N$  への integrable representation  
であるとすると、この時、 $\sigma$  は integrable になる。

(pr.)  $N$  は  $\sigma$ -finite だから、faithful normal state  $\Phi$  が  $N$  上に  
取れる。 $E = 1 \otimes \Phi$  を考え、 $E$  は  $M \otimes N$  から  $M \otimes \mathbb{C}$  への  
conditional expectation である。この時、 $E(\sigma_g \otimes 1)(x) = (U_g \otimes 1)$   
 $E(x)$  ( $x \in M \otimes N$ ) が成り立つ。もし、 $x > 0$ ,  $\int_G (\sigma_g \otimes 1)(x) dg$   
 $\in M \otimes N$  であれば、 $E(x) > 0$ ,  $\int_G (U_g \otimes 1)(E(x)) dg \in M \otimes \mathbb{C}$ 。  
 $\sigma \otimes 1$  が integrable から、 $\exists (x_\alpha) \subset (M \otimes N)^+$  ( $M \otimes N$  の positive  
elements 全体);  $x_\alpha \uparrow 1$  (strongly),  $\int_G (U_g \otimes 1)(x_\alpha) dg \in M \otimes N$  for  
 $\forall \alpha$ .  $E(x_\alpha)$  を考えることにより、 $\sigma$  が integrable であることが  
わかる。

(2)  $G$  は locally compact group,  $\sigma, \tau \in G$  から von Neumann  
algebra  $M, N$  への representation とする。もし、 $\sigma$  が integrable  
とすると、この時、 $\sigma \otimes \tau$  は integrable となる。

(pr.)  $\sigma$  が integrable ということから、 $\exists (a_\alpha) \subset M^+$ ;  $a_\alpha \uparrow 1$

(strongly),  $\int_G \sigma_g(a_n) dg \in M$ . 故に,  $a_n \otimes 1 \in (M \otimes N)^+$ ;  $a_n \otimes 1 \uparrow 1$

(strongly),  $\int_G (\sigma_g \otimes \tau_g)(a_n \otimes 1) dg \in M \otimes N$  より,  $\sigma \otimes \tau$  は integrable になる.

integrable representation を与える条件としては, 次のような条件がある.

(Theorem 4)  $G$  は locally compact abelian group が metrizable であるとする.  $\sigma$  を  $G$  から von Neumann algebra  $M$  への representation で,  $\forall \gamma \in \Gamma (= \widehat{G})$ ,  $M(\sigma; \{\gamma\}) \ni \exists$  unitary の条件を満足しているとする. この時に,  $\sigma$  は integrable になる.

証明の要諦は,  $\sigma \otimes 1$  が integrable であることと示せばよい訳です. これは,  $\sigma \otimes A\lambda$  を考えると,  $A\lambda$  は integrable より,  $\sigma \otimes A\lambda$  は integrable になる. だから,  $\sigma \otimes 1$  と  $\sigma \otimes A\lambda$  が unitary 同値であることと示せばよい.

又, integrable representation とその fixed algebra の関係については次の事が成り立つ.

(Theorem 5)  $G$  は locally compact abelian group,  $\sigma$  を  $G$  から factor  $M$  への representation で,  $\sigma$  を  $(M\sigma)' \cap M$  へ制限した時, integrable とすると, この時,  $(M\sigma)' \cap M$  は type I である.

これを示すには, 次の Theorem を示せば十分である.

(Theorem 6)  $G$  は locally compact abelian group,  $\tau$  を  $G$  から von Neumann algebra  $N$  への integrable representation で,

$N^\sigma \subset \text{Center } N$  とする。この時、 $N$  は type I である。

何故かと言えば、 $N = (M^\sigma)' \cap M$  とし、 $\sigma|_N = \bar{\sigma}$  とする。

この時、 $x \in N^\sigma$  とすると、 $x \in M^\sigma$  であり、 $x \in \text{Center } N$ 。つまり、

$N^\sigma \subset \text{Center } N$  となるから。

(Theorem 6) により、 $N^\sigma = \mathbb{C}$  (ergodic) としこまよひ。

この時、 $\hat{G} = \Gamma$  とし、 $E(\sigma) = S_p(\sigma)$  は  $\Gamma$  の closed subgroup

である。 $G/E(\sigma)^\perp$  を考えることにしよう。始めから  $E(\sigma) = \Gamma$  と

しこまよひ。 $E(\sigma) = \Gamma$  より、 $N \otimes_\sigma G$  は type I factor であり、

$(N \otimes G) \otimes \Gamma = N \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$  から、 $(N \otimes G) \otimes \Gamma$  は (prop. 2) から

type I に注意すると、 $N$  は type I になる。

最後に、Connes は  $\mathfrak{A}$  von Neumann algebras の間に次のような新しい概念を導入している。

(Def. 6)  $M_1, M_2$  は von Neumann algebras とする。 $M_1, M_2$  が du même genre と呼ばれるのは、for  $\forall_{\sigma} e_1 \in M_1^p(M_1 \text{ の projection 全体})$  ( $\forall_{\sigma} e_2 \in M_2^p$ ),  $\exists_{\sigma} f_1 \leq e_1, \exists_{\sigma} f_2 \leq e_2; f_1 \in M_1^p, f_2 \in M_2^p$ ,

$M_{1,f_1} \cong M_{2,f_2}$  を満たす  $\sigma$  がある。

これは関して、du même genre であるものとしこまよひ。

(Theorem 7)  $G$  は locally compact group with the left Haar

measure  $dg$ ,  $M$  は von Neumann algebra,  $\sigma \in G$  から  $M \rtimes \sigma$  の

integrable representation とする。この時、 $M^\sigma$  と  $M \otimes_\sigma G$  は、

du même genre である。

これを示すには、次の2つの Lemma を 順次使えばよい。

(Lemma 8)  $G, M, U$  を Theorem 7 のものとする。この時、

$$\exists x (\neq 0) \in M \otimes \mathcal{K}(L^2(G)); x(1 \otimes \lambda(g)) = (U_g \otimes 1)(x) \quad (\forall g \in G)$$

証明は、具体的構成による。

(Lemma 9)  $U, G, M$  を Theorem 7 のものとする。この時、

$U \otimes 1$  と  $U \otimes A\lambda$  は unitary 同値である。

証明は、(Lemma 8) と Connes の  $2 \times 2$  matrix の手法を用いる。