

Gray-Scott モデルと発熱反応拡散系に現われる パルス波ダイナミクス

金沢大学 理工研究域数物科学系・JST さきがけ 長山 雅晴 (Masaharu Nagayama)
Institute of Science and Engineering,
Kanazawa University,
PRESTO, JST
金沢大学 大学院自然科学研究科 矢留 雅亮 (Masaaki Yadome)
Graduate School of Natural Science and Technology,
Kanazawa University
京都大学 数理解析研究所 上田 肇一 (Kei-Ichi Ueda)
Research Institute for Mathematical Science,
Kyoto University

1 はじめに

反応拡散系における進行パルス波の研究は, 1952 年の Hodgkin と Huxley のよる大ヤリイカの神経軸索上での電位伝播モデル [1] の提出から始まった. その数理モデルは次の 4 変数反応拡散系

$$\begin{cases} c \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{a}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \bar{g}_K n^4 (v - V_k) - \bar{g}_{Na} m^3 h (v - V_{Na}) - \bar{g}_l (v - V_l), \\ \frac{\partial m}{\partial t} = \gamma_m(v)(m_\infty(v) - m), \\ \frac{\partial n}{\partial t} = \gamma_n(v)(n_\infty(v) - n), \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \gamma_h(v)(h_\infty(v) - h) \end{cases} \quad (1.1)$$

によって記述されてる. その後, FitzHugh[2] と南雲 [3] らが独立に (1.1) を簡略化した次の 2 変数反応拡散系

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} + u(1-u)(u-a) - v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon(u - \gamma v) \end{cases} \quad (1.2)$$

を提出し, 数学方面から多くの研究がなされた. この数理モデルは FitzHugh-Nagumo 方程式と呼ばれている. また, Belousov-Zhabotinsky 反応におけるリング波やスパイラル波の報告 [4] とその数理モデルの提出 [5] がなされたが, その数理モデルは本質的に (1.2) と同じであったことから, (1.2) や (1.2) を拡張した

$$\begin{cases} \varepsilon \tau \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta u + u(1-u)(u-a) - v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d \Delta v + u - \gamma v \end{cases} \quad (1.3)$$

に対して進行パルス波やリング波、スパイラル波の研究が多く行われてきた。1993 年以前は解の漸近挙動を中心とした研究が行なわれており、空間 1 次元では内部遷移層を持つ定常解の存在や安定性、速度の速い進行パルス波解と遅い進行パルス波解の存在や安定性等が示されている（例えば、[6, 7, 8, 9, 10]）。また、空間 2 次元では安定なリング波やスパイラル波が数値計算により発見されており、2 つの向かい合う進行パルス波やリング波は対消滅することが数値計算により確かめられていた。1993 年以降は、J. Pearson の論文 [11] がきっかけとなり遷移過程等の一時的なパターンダイナミクスに注目した研究が行なわれるようになった。我々は、発熱反応拡散モデルを用いて進行パルス波の反射現象や分裂現象、脈動進行パルス波の出現、2 次元におけるリング波やスパイラル波の崩壊現象といった様々な時空間パターンの出現を報告しており [12]、上山－西浦は Gray-Scott モデル [13] を用いて自己複製パターンや時空カオスに対するメカニズムの解析を行った [14, 15]。これらの遷移過程は、栄理論 [16] を使うことが可能な弱い相互作用であり、縮約方程式を導出することで解析することが可能であった。その中で、栄－西浦－上田は空間 1 次元自己複製パルスの分裂は両端のパルスで起こることを縮約方程式から明らかにした [17]。現在では、西浦、寺本、上田らによって弱い相互作用では理解できない強い相互作用を持つ反応拡散系の遷移パターン形成研究（例えば、進行パルス波の対衝突を伴う遷移ダイナミクス）が盛んに行われている（例えば、[18, 19]）。このような強い相互作用を伴う遷移パターンの数理解析には大域的分岐構造を明らかにすることが重要になっている。

反応拡散系における遷移パターンダイナミクスは「弱い相互作用を伴う遷移過程」や「強い相互作用を伴う遷移過程」、「パターンの内部的不安定性による遷移過程」など多種多様であるため、対象とする遷移過程を限定する必要がある。本稿では、単安定興奮性の非線形性を持つ反応拡散系に現れる進行パルスの弱い相互作用の結果として現れる反射現象という遷移過程と進行パルス波の内部不安定性によって現れるカオス運動を伴うパルス波（カオスパルス波）に対する数理解析について解説する。

2 進行パルス波の反射現象に対する数理解析

単安定興奮系における進行パルス波が反射する現象は、1993 年に Pearson, 1994 年に Petrov らによって Gray-Scott モデル

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = du_{xx} - uv^2 + F(1 - u), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_{xx} + uv^2 - (f + K)v \end{cases} \quad (2.1)$$

に対して報告されたのが最初であろう [11, 20]. また, Krisher らは保存量を持つ McKean 型と呼ばれる区分線形非線形性を持つ反応拡散系

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + H(u - a(t)) - u - v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\Delta v + u - v, \\ a(t) = a_0 + \sigma(s_0 - \int_{\Omega} (u + v) dx) \end{cases} \quad (2.2)$$

に対して, 1次元進行パルス波が反射すること, 空間2次元問題において進行スポット解が存在することを数値計算によって報告した [21]. ただし,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

である. 太田らは, (2.2) において $\sigma \rightarrow \infty$ とした系に対して特異極限方程式を導出し, その摂動展開から進行パルス波の運動を記述する常微分方程式系を導出した. そして, その常微分方程式から速度が遅ければパルス波が反射することを明らかにした [22]. 本稿では, 特異摂動的手法を使うことができない発熱反応拡散系や Gray-Scott モデルに現れる進行パルス波の反射現象について解説する. 次の2変数反応拡散系を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} (-au + vf(u)), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} (h(1-v) - vf(u)) \end{cases} \quad (2.3)$$

ただし,

$$f(u) = \exp\left(\frac{u}{1+c/u}\right) \quad (2.4)$$

とおくと, (2.3) は発熱反応拡散系となり,

$$f(u) = u^2 \quad (2.5)$$

とおくと, (2.3) は Gray-Scott モデルとなる. パラメータを上手く選ぶと, どちらも単安定興奮系となる (図 2.1, 図 2.2).

1997 年, 発熱反応拡散系においても図 2.3(a) のように進行パルス波の反射現象を発見した [12]. 進行パルスが反射現象を起こすための本質は速度の遅い進行パルスの存在であり, 図 2.4 のように定常パルス波から超臨界 pitch-fork 分岐によって進行パルス波が出現すれば, その進行パルス波は反射することを示唆した. 数値計算によって (d, ε) パラメータで定常パルス波解からの分岐点を求め (図 2.5(a)), 発熱反応拡散系において安定定常パルス波から安定進行パルス波が分岐することを確認した. 同様に, Gray-Scott モデルにおいても図 2.3(b) のように進行パルス波の反射現象が見られるが, この進行パルス波もやはり安定定常パルス波から超臨界 pitch-fork 分岐 (図

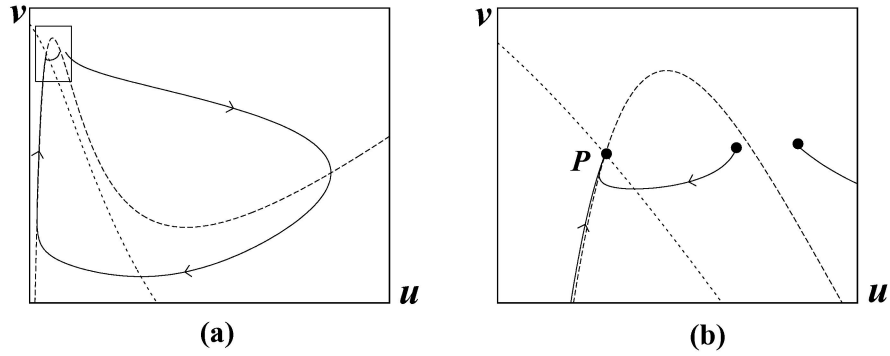


図 2.1: (a) : 発熱反応拡散系 (2.3),(2.4) の拡散を除いた常微分方程式のダイナミクス. (b) : 平衡点近傍の拡大図. パラメータは $a = 2.0, h = 45.0, c = 5.0, \varepsilon = 0.001$.

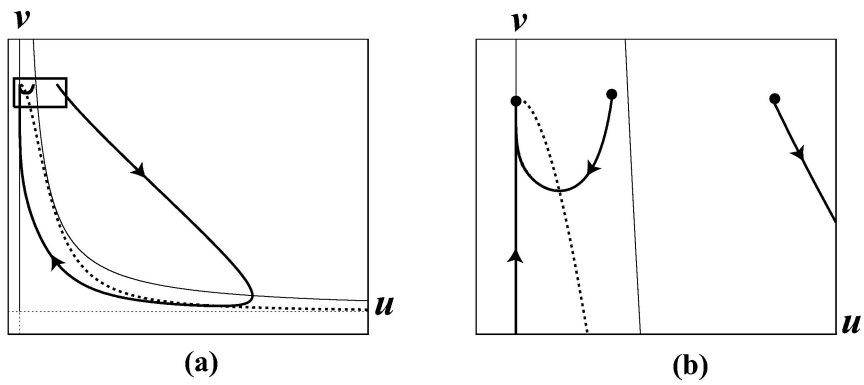


図 2.2: (a) : Gray-Scott モデル (2.3),(2.5) の拡散を除いた常微分方程式のダイナミクス. (b) : 平衡点近傍の拡大図. パラメータは $a = 0.07, h = 0.018, \varepsilon = 0.8$.

2.4) によって出現していることがわかった。図 2.5(b) は Gray-Scott モデルに対する定常パルス波解の解構造と分岐点を求めた結果であり、安定定常パルス波から安定進行パルス波が分岐する分岐点の存在を数値計算によって確認した。これらの結果によって「速度の遅い進行パルス波が存在すれば、2つの進行パルス波が向かい合って進む進行パルス波は反射する」ことを数値計算から示唆した。そして、2000年に栄一三村-N は、定常パルス波から進行パルス波が分岐する分岐点近傍における進行パルス波の遷移ダイナミクスを記述する縮約方程式

$$\begin{cases} \dot{l} = r + \beta_1 \exp(-2\alpha l), \\ \dot{r} = -M_1 r^3 + M_2 \eta r + \beta_2 \exp(-2\alpha l). \end{cases} \quad (2.6)$$

を導出した。ここで、 $l(t), r(t)$ はそれぞれパルス波の位置と速度を表している。 M_i ($i = 1, 2, 3$), α, β_j ($j = 1, 2$) は定数であり、 M_i は分岐点における線形作用素とその随伴作用素の 0 固有値に対する固有関数を用いて計算可能な定数で、 α, β_j は固有関数の指数減衰レートとその減衰方向ベクトルを用いて計算可能な定数である。(2.6) における定数の符号がすべて正であれば、「安定定常パルス波から超臨界的に進行パルス波が分岐し、速度の遅い進行パルス波は反射する」ことを示すことができる。また、具体例として発熱反応拡散系 (2.3), (2.4) に対して縮約方程式の係数を数値的に求め、進行パルス波が反射することを示した [23]。

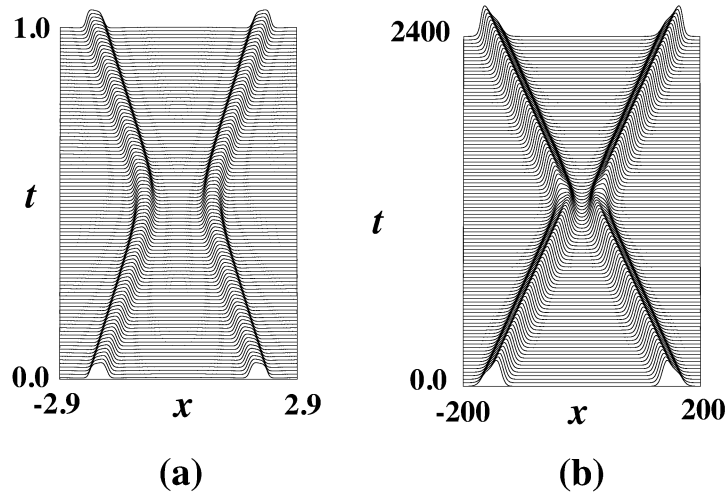


図 2.3: (a) : 発熱反応拡散系 (2.3),(2.4) に現れる進行パルス波の反射現象。パラメータは $a = 2.0, h = 45.0, c = 5.0, \varepsilon = 0.001, d = 4.5$. (b) : Gray-Scott モデル (2.3),(2.5) に現れる進行パルス波の反射現象。パラメータは $a = 0.07, h = 0.018, \varepsilon = 0.8, d = 3.5$.

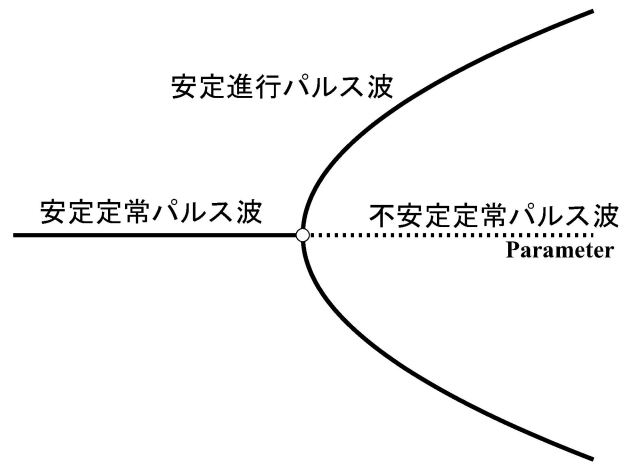


図 2.4: 超臨界 pitch-fork 分岐の模式図

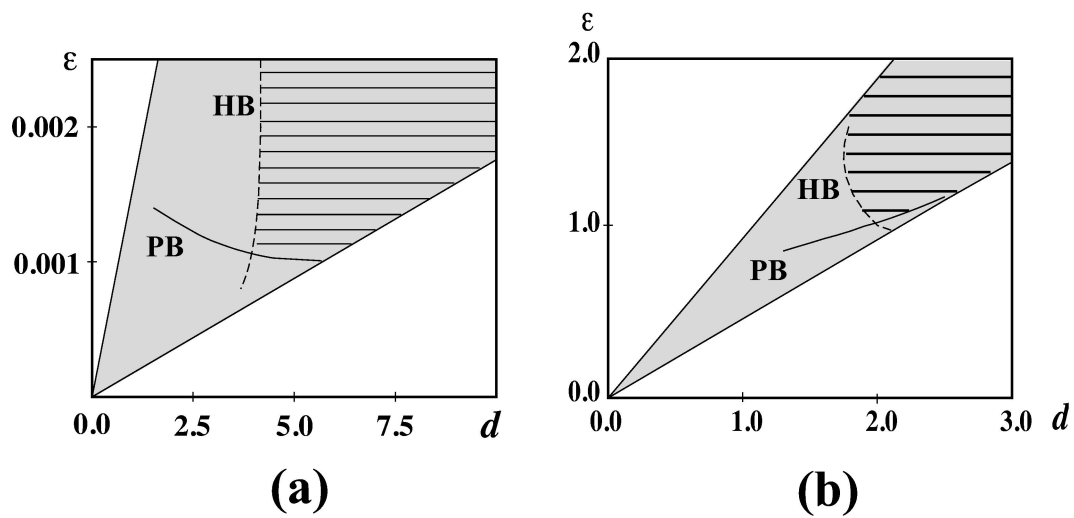


図 2.5: (d, ε) 平面での定常パルス解の存在範囲と分岐点. グレー部分が定常パルス波解の存在範囲であり, 斜線部が定常パルス波が安定なパラメータ領域, PB が pitch-fork 分岐線, HP が Hopf 分岐線である. (a) は発熱反応拡散系 (2.3), (2.4) に対する定常パルス波解の構造, (b) は Gray-Scott モデル (2.3), (2.5) に対する定常パルス波解の構造.

3 脈動進行パルス波からの分岐 -カオスパルス波-

本節では脈動進行パルス波の内部的不安定性により現れるカオスパルス波について説明する．発熱反応拡散系や双安定 FitzHugh-Nagumo 方程式に現れる脈動進行パルス波は進行パルス波からの Hopf 分岐によって出現することが知られている [12, 25]．また，本節で取り上げる Gray-Scott モデルを拡張した系に対しても，進行パルス波からの Hopf 分岐によって脈動進行パルス波が現れる．このように，脈動進行パルス波が出現する例は知られているが，脈動進行パルス波が不安定化する例はほとんど知られていない．双安定 FitzHugh-Nagumo 方程式系に対して脈動進行パルス波が saddle-node 分岐点により不安定化することが数値計算でわかったが [26]，Gray-Scott モデルと発熱反応拡散系は同様な不安定性を示すだろうか．これらの系に対して脈動進行パルス波の大域的分岐構造を調べると，脈動進行パルス波は saddle-node 分岐点や period doubling 分岐点，torus 分岐点と多彩な分岐点を有することがわかった．さらに，発熱反応拡散系ではそれらに加え pitch-fork 分岐も起こすことがわかった．本節ではこれらの分岐現象の中で，特に，脈動進行パルス波が period doubling 分岐点と torus 分岐点を持つ場合に注目する．その結果，その分岐点近傍でカオスパルス波や準周期パルス波が出現することを発見した．

本稿では $f(u) = u^2$ の Gray-Scott モデルに対してカオスパルス波や準周期パルス波の出現を解説する．まず，パルス波を数値的に求めるための数値スキーム，パラメータなどを述べる．空間に関する離散化は Fourier-Galerkin 法を用いる．そのため，(2.3) に対して区間を 2π として計算を行い，周期境界条件のもとで次の方程式の数値解を求める：

$$\begin{cases} u_t - 4\pi^2/L^2 u_{xx} = \frac{1}{\varepsilon}(-au + f(u)v), \\ v_t - 4d\pi^2/L^2 v_{xx} = h(1-v) - f(u)v. \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad (3.1)$$

Fourier-Galerkin 法による波数計算の常微分方程式には 4 次の Runge-Kutta 法を適用する．空間分割数を 512，エイリアシング誤差を考え切断波数を 256 として与え，時間分割幅は $\Delta t = 0.1$ とする．ただし，周期解の分岐構造を求めるときは時間分割幅を $\Delta t \leq 0.1/\text{周期}$ として与える．(3.1) に対して，前節と同様に非線形性は $a = 0.07$ ， $h = 0.018$ と固定した単安定興奮性 (図 3.1) を持つ場合を考える． $L = 500$ として， d をコントロールパラメータとする．安定進行パルス波を初期値として，発展方程式の数値計算を行った結果，パルス波の漸近挙動は図 3.2 となり，安定脈動進行パルス波が存在するパラメータ領域が 2 カ所あることがわかった．これ以降，図 3.2 の右側のパラメータ領域の脈動進行パルス波を TB(A)、左側のパラメータ領域の脈動進行パルス波を TB(B) と表すことにする．次に，脈動進行パルス波を含めたパルス波の解構造を調べる．図 3.3 は $\varepsilon = 1.0$ と固定して d を変化したときの大域的分岐構造である．TB(A) と TB(B) はどちらも進行パルス波の Hopf 分岐点から現れる．しかしながら，TB(A) と TB(B) の不安定化は異なり，TB(A) は period doubling 分岐，TB(B) は torus 分岐を起こし不安定化する．次に，これらの分岐点近傍におけるパルス波に

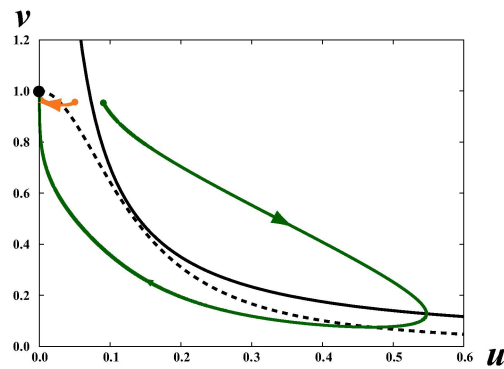


図 3.1: (3.1) の拡散を除いた常微分方程式のダイナミクス. $a = 0.07, h = 0.018, \varepsilon = 1.0$.

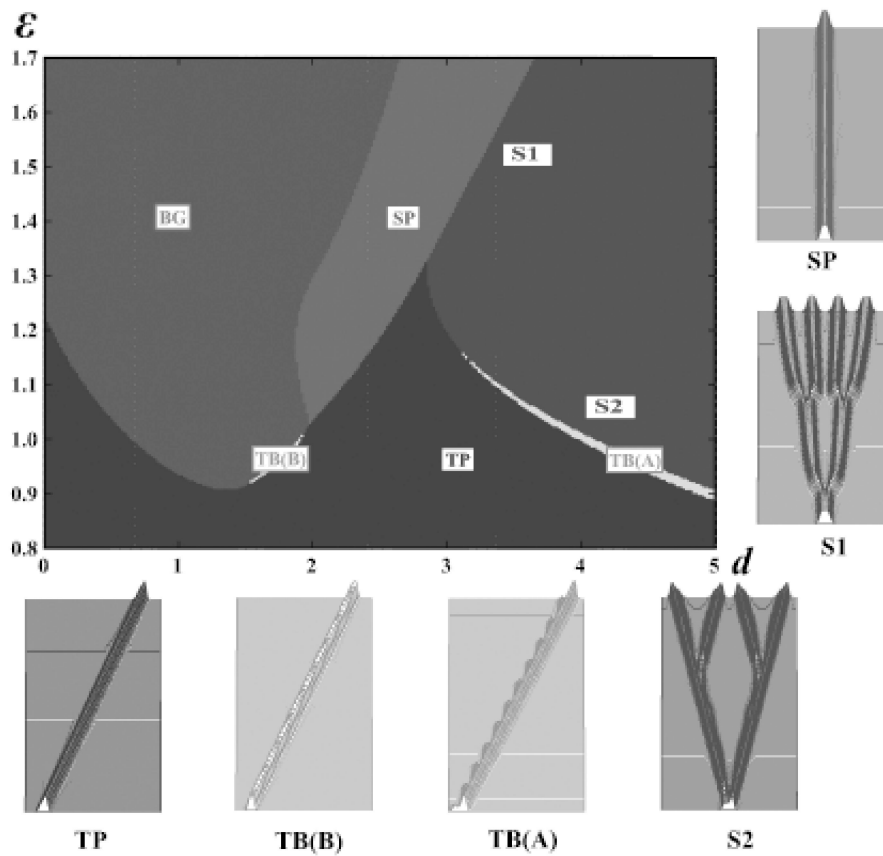


図 3.2: (d, ε) 平面に対する進行パルス波の相図. SP, TP, TB, S, BG はそれぞれ定常パルス波, 進行パルス波, 脈動進行パルス波, 分裂パルス波, 自明平衡解 $(0, 1)$ を表す. ただし, 分裂パルス波は定在型自己複製パターン (分裂する前に定常解のように振る舞う自己複製パターン) と伝播型自己複製パターン (分裂する前に (脈動) 進行波解のように振る舞う自己複製パターン) の 2 種類のパターンがある.

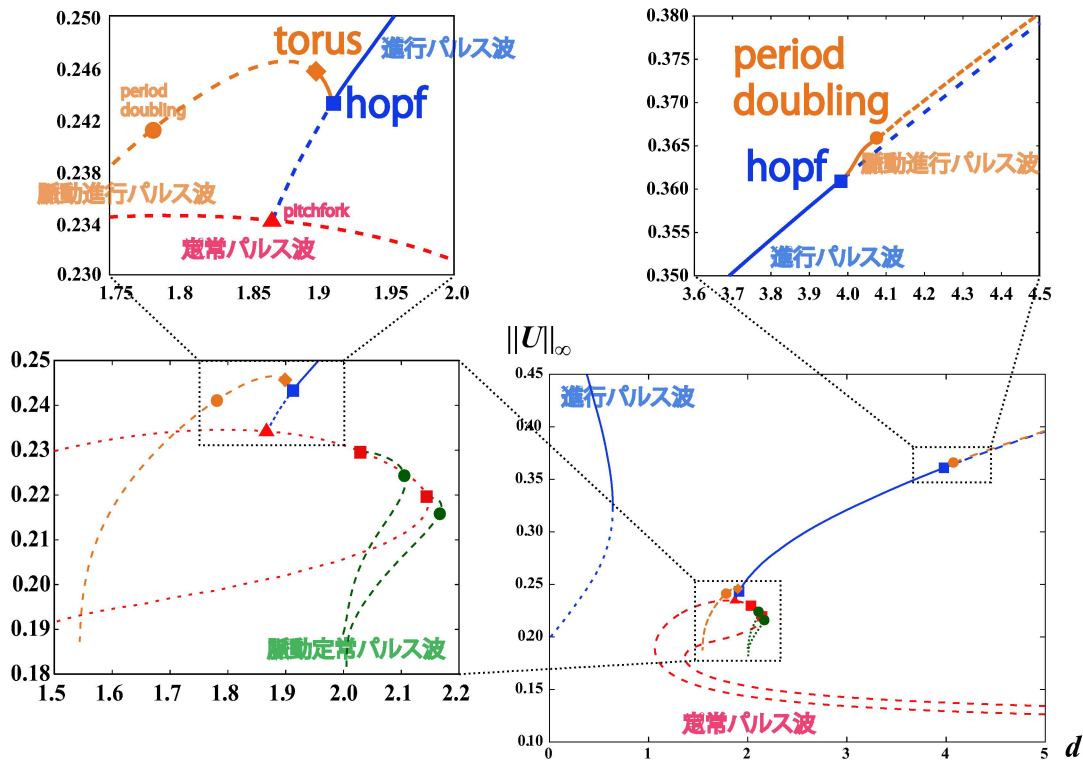


図 3.3: $\varepsilon = 1.0$ に対するパルス波の大域的分岐構造. 安定解を実線, 不安定解を破線で表す. ▲は pitch-fork, ■は Hopf 分岐, ●は period doubling, ◆は torus 分岐を表す. 横軸は d , 縦軸は $\|u\|_\infty$ を表す. ただし, 定常パルス波と進行パルス波の場合は $\|u(z)\|_\infty := \max_{-\pi \leq z \leq \pi} u(z)$. 脈動定常パルス波と脈動進行パルス波の場合は

$$\|u(t, z)\|_\infty := \max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, z)\|_{L_2}, \quad \|u\|_{L_2} := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} u^2 dz} \text{ である.}$$

ついて述べる．ここでは，TB(A) と TB(B) に対するそれぞれの分岐点近傍に現れるパルス波について述べる．

最初に，TB(A) の方から解説する．TB(A) は period doubling 分岐点により不安定化する．この period doubling 分岐点を PD_1 と表記する．図 3.4 は PD_1 から伸びる解の枝を追跡した結果で，2 周期の脈動進行パルス波が安定に現れ，その解の枝はパラメータ d が増大すると period doubling(PD_2) により不安定化する．さらに， PD_2 から伸びる解の枝を求めると，4 周期の脈動進行パルス波が安定に現れ，その解の枝も period doubling(PD_4) により不安定化する．このように，1 周期，2 周期，4 周期の脈動進行パルス波が安定に現れ，それぞれの解は period doubling により不安定化する．これらのパルス波は同じような振る舞いをするため， $\|\mathbf{u}\|_{L^2}$ の時系列データ¹などで表示しないと区別することが困難な解である．そこで，パラメータ d を変化させながら時系列データの極大値をプロットした (図 3.5)． d を徐々に増大させると，1, 2, 4, 8, 16 周期と period doubling 分岐を起こし，次第に極大値で埋め尽くされるパラメータ領域が現れた．この領域ではカオス運動するパルス波 (カオスパルス波と呼ぶ) の存在が示唆される．そこで，カオスパルス波であることを確かめるために，カオス現象の特徴の 1 つである初期値に対する鋭敏な依存性を調べることにする．初期値に対する鋭敏な依存性とは，近接する 2 つの軌道間の距離が時間発展と共に指数的に増大する (軌道の指数的不安定性) ことをいう²．ここで， $d = 4.087$ におけるパルス波が初期値に対する鋭敏な依存性を持つか調べる．次のような数値実験を行った．初期値として，1 つは $d = 4.087$ におけるパルス波 (S_1) とそのパルス波にわずかな誤差³を含めた初期値 (S_2) を用意する．初期値 S_1 と S_2 に対する時間発展解を求め，初期値 S_1 に対する解 $\mathbf{u}_1$ の L^2 ノルム $\|\mathbf{u}_1\|_{L^2}$ と初期値 S_2 に対する解 $\mathbf{u}_2$ の L^2 ノルム $\|\mathbf{u}_2\|_{L^2}$ の差が指数的大増大性を示すか調べる．その結果，2 つの解の L^2 ノルムは時間が経つと徐々にずれていくことがわかり， $\log \|\mathbf{u}_1\|_{L^2} - \|\mathbf{u}_2\|_{L^2}$ は全体的に右上がりに増大するため，2 つの軌道間の距離は L^2 ノルムの意味で指数的に増大する (図 3.6)．従って， $d = 4.087$ のパルス波は L^2 ノルムの意味で軌道の指数的不安定性を持つことから，初期値に対する鋭敏な依存性があることがわかった．数値計算によってカオスの特徴の 1 つである「初期値鋭敏依存性」を調べることができる．しかし，実際の解軌道に対する「軌道の指数的不安定性」を調べる場合はリアプノフ指数を求める必要がある．リアプノフ指数とは 2 つの軌道間の距離がどの程度で離れるかを数値的に表す量で，最大リアプノフ指数が正ならば「軌道が指数的に不安定である」ことがわかる．各 d に対して，最大リアプノフ指数を求めた結果を図 3.7 に示す．カオスの窓を含めた周期的に振舞うパラメータ領域では最大リアプノフ指数がほぼ 0 の値に対して，それ以外のパラメータ領域ではリアプノフ指数が正である．従って，リアプノフ指数が正をもつパラメータ領域は軌道の指数的不安定性を持つという意味でカオスパルス波が現れていることがわかった．

¹これ以降，時系列データと単に表記した場合， $\|\mathbf{u}\|_{L^2}$ の時系列データを表す．

²初期値に対する鋭敏な依存性の定義は研究者によって異なり，グッケンハイマーの意味での初期値に対する鋭敏な依存性は 2 つの軌道間の距離が十分時間がたてば必ずある一定以上の距離だけ離れることをいう．ここでは軌道の指数的不安定性を持つ場合のことを初期値に対する鋭敏な依存性があると定義する．

³誤差は u のパルス波の頂点に 10^{-8} の誤差を与える．

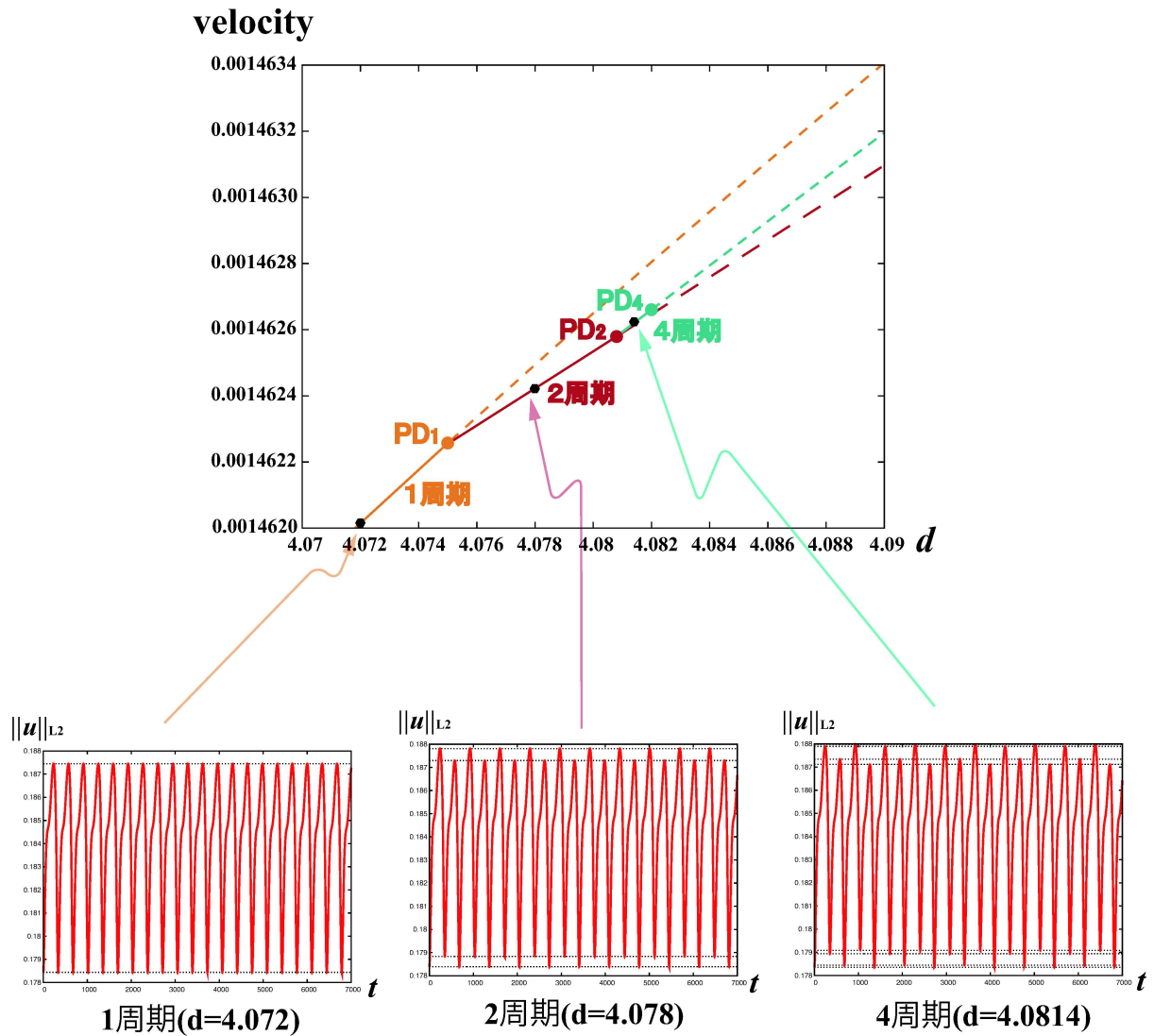


図 3.4: PD_1 近傍の脈動進行パルス波に対する大域的分岐構造. 安定解を実線, 不安定解を破線で表す. ●は period doubling を表す. 横軸は d , 縦軸は速度を表す. 図は $d = 4.072$, $d = 4.078$, $d = 4.0814$ に対する 1 周期, 2 周期, 4 周期の脈動進行パルス波に対する $\|u\|_{L^2} := \|u\|_{L^2} + \|v - 1\|_{L^2}$ の時系列データ.

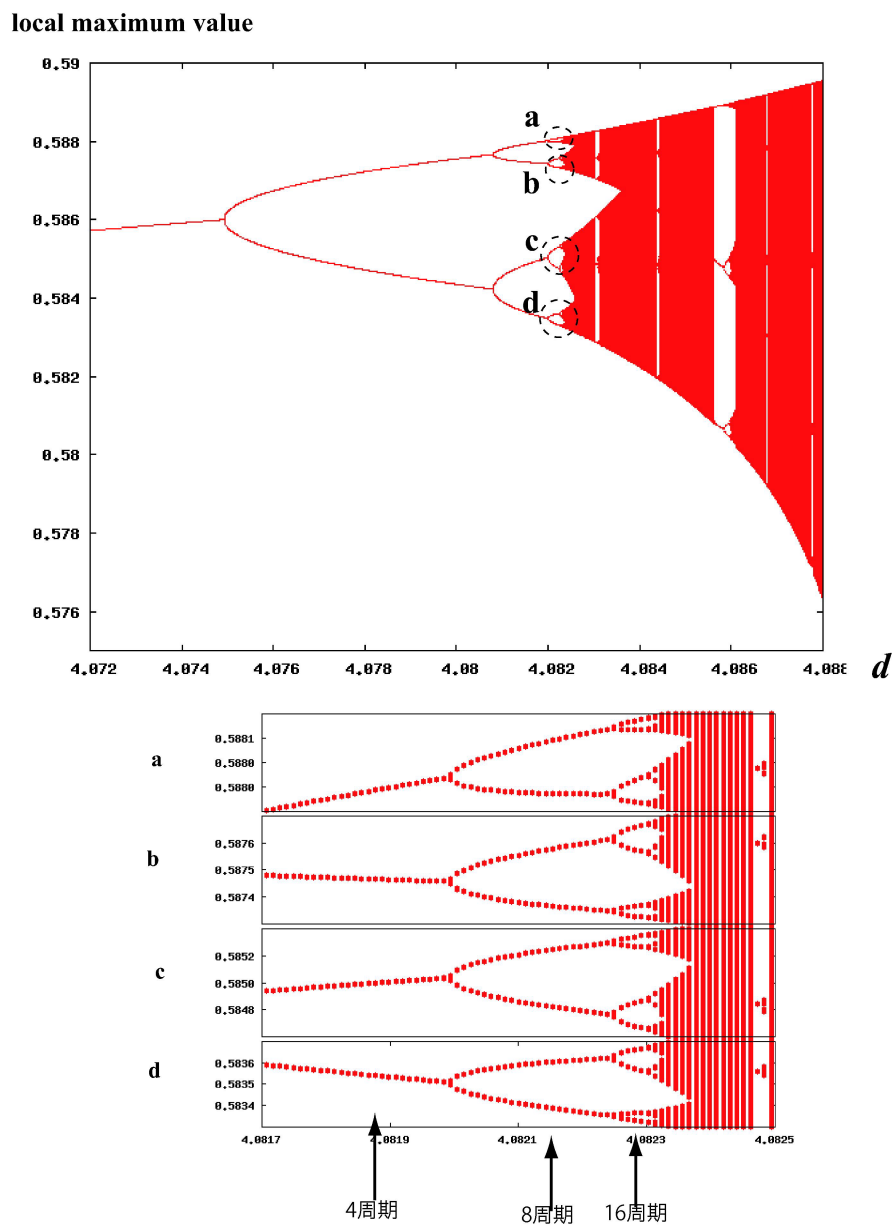


図 3.5: TB(A) の分岐点近傍での時系列データの極大値をプロットした分岐図. 下図は上図の a, b, c, d の拡大図. 拡大図では 4 周期から 8 周期, 16 周期と period doubling 分岐をする.

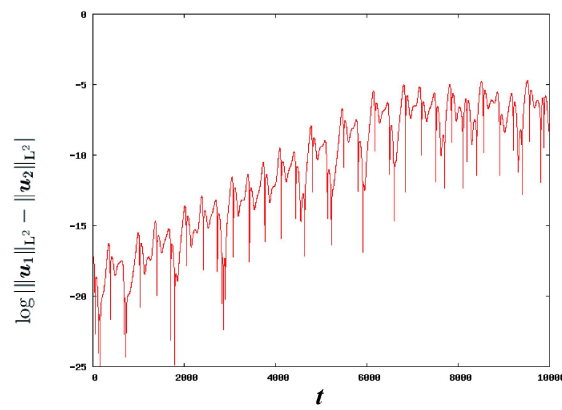


図 3.6: $d = 4.087$ のパルス波に対する軌道の指数的不安定性. 軌道間の距離を対数表示で表したときのグラフ. 横軸は時間, 縦軸は $\log ||\mathbf{u}_1||_{L^2} - ||\mathbf{u}_2||_{L^2}$ を表す.

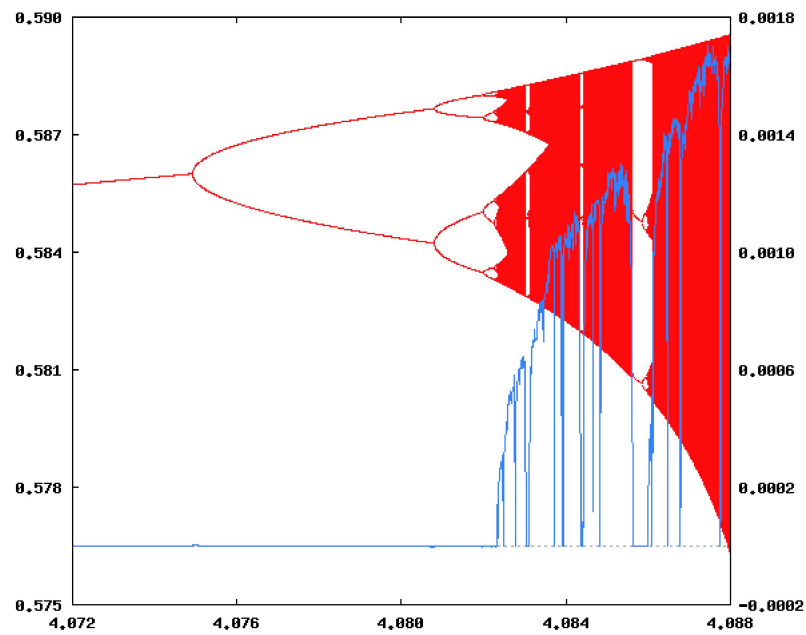


図 3.7: 時系列データの極大値と最大リアプノフ指数. 横軸はパラメータ d , 左の縦軸は極大値, 右の縦軸は最大リアプノフ指数である.

次に、TB(B) が torus 分岐により不安定化を起し、その分岐点から現れるパルス波について説明する。パラメータ d を変化しながら、時系列データの極大値を求めた結果を図 3.8 に示す。torus 分岐点から極大値で埋め尽くす領域が現れるが、極大値のリターンマップ⁴と時系列のパワースペクトルを調べた結果、リターンマップは閉じた周期軌道を描き、パワースペクトルは振動数を持つピーク値が基本振動数 f_1 と f_2 の線形結合で表されることがわかった。これらの結果から、準周期パルス波が安定に現れることがわかった。

本節では、Gray-Scott モデルに対するパルス波のカオス運動と準周期運動を調べた。同様に、発熱反応拡散系に現れるパルス波に対しても脈動進行パルス波からの分岐現象としてカオスパルス波や準周期パルス波が出現することがわかっているが、ここでは省略する。

注意：本文中の図はほとんどカラーで作成されており、モノクロ印刷では見にくい図が多々あると思われる。図については後日公開される数理研の電子化公開を参照してください。

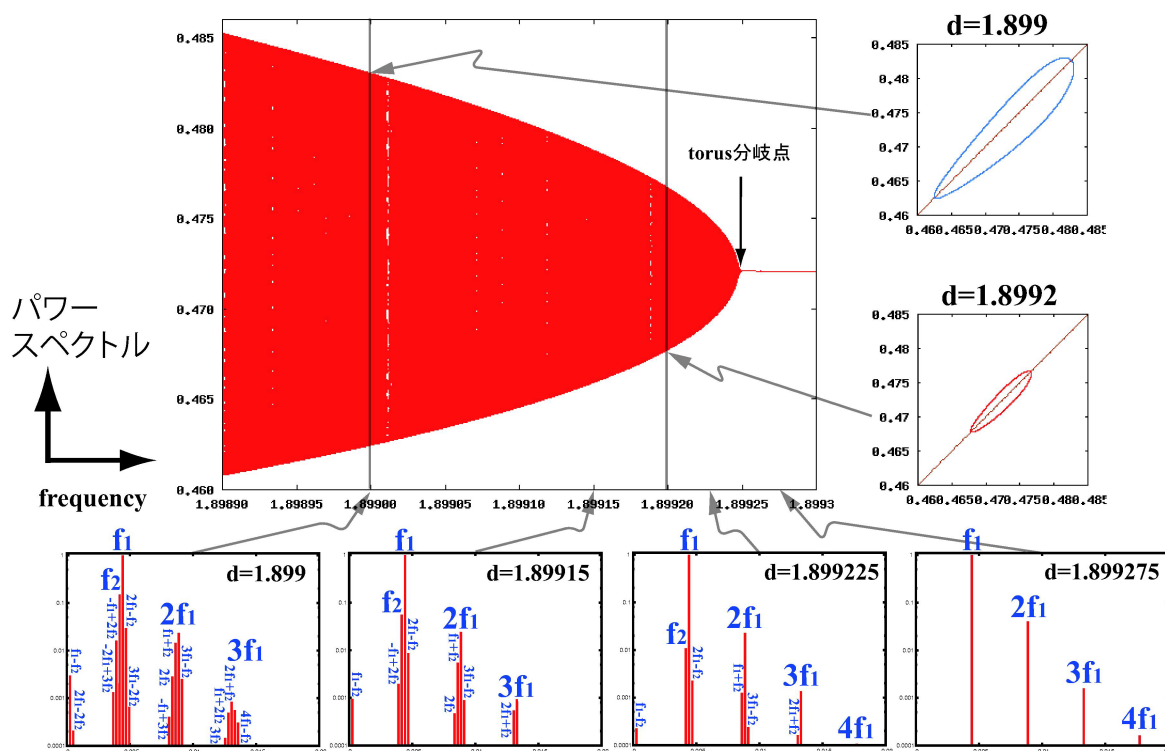


図 3.8: TB(B) 領域に現れる分岐点近傍のパルス波。時系列データの極大値に対する分岐図とリターンマップとパワースペクトルを表示する。

⁴極大値のリターンマップとは時系列の極大値を順に $x_1, x_2, \dots$ と表記するなら横軸に x_i 、縦軸に x_{i+1} をプロットした相関関係を表す図のことである。

参考文献

- [1] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J. Physiol. **117**, 1952, 500–544.
- [2] R. FitzHugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophysical J., **1**, 1961, 445–466.
- [3] J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. I. R. E., **50** (1962), 2061–2070.
- [4] A. T. Winfree, "Rotating chemical reaction", *Sci. Amer.*, **239**(6), 82–95 (1974), (サイエンス, 8, 1974, 80–94).
- [5] J. J. Tyson and P. C. Fife, *Target patterns in a realistic model of the Belousov-Zhabotinskii reaction*, J. Chem. Phys., **73**(5), 1980, 2224–2237.
- [6] S. P. Hastings, *On the existence of homoclinic and periodic orbits for the FitzHugh-Nagumo equations*, Quart. J. Math. Oxford, **27**(2), 1976, 123–134.
- [7] J. W. Evans, *Nerve axon equations: IV. The stable and unstable impulse*, Indiana Univ. Math. J., **24**, 1975, 1169–1190.
- [8] J. W. Evans, *Nerve axon equations: III. Stability of nerve impulse*, Indiana Univ. Math. J., **22**(6), 1972, 577–593.
- [9] C. K. R. T. Jones, *Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system*, Trans. A. M. S., **286** (2), 1984, 431–469.
- [10] E. Yanagida, *Stability of fast travelling pulse solutions of the FitzHugh-Nagumo equations*, J. Math. Biol., **22**, 1985, 81–104.
- [11] J. E. Pearson, *Complex patterns in a simple system*, Sciences, **261**, 1993, 189–192.
- [12] M. Mimura and M. Nagayama, *Nonannihilation dynamics in an exothermic reaction-diffusion system with mono-stable excitability*, Chaos, **7**(4), 1997, 817–826.
- [13] P. Gray and S. K. Scott, *Autocatalytic reactions in the isothermal continuous stirred tank reactor*, Chem. Engng. Sci., **38**, 1983, 29–43.
- [14] Y. Nishiura and D. Ueyama, *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D **130**, 1999, 73–104.

- [15] Y. Nishiura and D. Ueyama, *Spatio-temporal chaos for the Gray-Scott model*, Physica D **150**(3-4), 2001, 137–162.
- [16] S. -I. Ei, *The Motion of Weakly Interacting Pulses in Reaction-Diffusion Systems*, J. Dyn. Diff. Eqs., **14**(1), 2002, 85–137.
- [17] S. -I. Ei, Y. Nishiura and K. -I. Ueda, *2n-Splitting or Edge-Splitting? A Manner of Splitting in Dissipative Systems*, Japan J. Indus. Appl. Math., **18**(2), 2003, 181–205.
- [18] Y. Nishiura, T. Teramoto and K. -I. Ueda, *Scattering of traveling spots in dissipative systems*, Chaos, **15**(14), 2005, 1–10.
- [19] T. Teramoto, K. -I. Ueda and Y. Nishiura, *Breathing scatters in dissipative systems*, Prog. Theore. Phys. Suppl., **161**, 2006, 364–367.
- [20] V. Petrov, S. K. Scott and K. Showalter, *Excitability, wave reflection, and wave splitting in a cubic autocatalysis reaction-diffusion systems*, Phil. Trans. R. Sco. Lond., **A347**, 1994, 631–642.
- [21] K. Krisher and A. Mikhailov, *Bifurcation to travelling spots in reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. Lett., **73**, 1994, 3165–3168.
- [22] T. Ohta, J. Kiyose and M. Mimura, *Collision of propagating pulse in a reaction-diffusion system*, J. Phys. Soc. Jpn., **66**(5), 1997, 1551–1558.
- [23] S. -I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems*, Physica D, **165**, 2002, 176–198.
- [24] 三村昌泰編著, パターン形成とダイナミクス, 非線形・非平衡現象の数理4, 東京大学出版会, 2006.
- [25] T. Ikeda, H. Ikeda and M. Mimura, *Hopf bifurcation of travelling pulses in some bistable reaction-diffusion systems*, Methods Appl. Anal., **7**(1), 165–193 (2000).
- [26] M. Nagayama, K. -I. Ueda and M. Yadome, *Numerical approach for transient dynamics of periodic pulse solutions in a bistable reaction-diffusion system*, 投稿中