

飽和現象を記述する弱非線型 拡散方程式の一例

大阪市立大 理 尾高 惟倫

1. 問題

次の様な弱非線型拡散方程式に対する初期値問題

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \frac{1}{4}|x|^2 u + f(u) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq u(x, t) \leq 1 & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \end{cases}$$

にたいし $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$$

に対応する定常問題

$$(1.2) \quad \begin{cases} -\Delta w + \frac{1}{4}|x|^2 w = f(w) & x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq w(x) \leq 1 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

を考える。非線型項 $f(u)$ は次の仮定をみたす。

仮定 1. (i) $f(u) \in C^2[0, 1]$

(ii) $f(0) = f(1) = 0$

(iii) $f''(u) < 0 \quad u \in (0, 1)$

(1.1) の解 $u(x, t)$ の $t \rightarrow \infty$ としての漸近挙動と (1.2) の解 $w(x)$ の間の関係を調べる事が問題である。現象との関連を言えば、(1.2) の特別な場合

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 w + \frac{1}{4} x^2 w = f(x) (1-w^2) w & x \in R^1 \\ 0 \leq w(x) \leq 1 & x \in R^1 \end{cases}$$

が第 II 種超伝導体中の seath (鞘, ササ) と呼ばれる状態を記述するモデルとして提唱されている。(D. Saint-James and P. G. de Gennes [1], K. Maki and T. Tsuneto [2]) の場合 $w(x)$ は 1 次元的なサンプル中の表面からある距離だけ中に入, 右所を原点として、適当な単位ではか, 2 座標 x の所での超伝導の度合いを表わしている。 $w(x)$ は

Ginzburg - Landau ([3]) の order parameter と呼ばれる複素数値関数の絶対値であり、 $w(x)=0$ の所は正常状態であり $w(x)=1$ の所は完全に超伝導状態にある。そして超伝導の度合いに応じて 0 と 1 の間の値を取る。

(1.3) において $f(x) > 0$ が十分大の時 $x=0$ が最大値

と取り $|x|$ が大きくなるにつれて急速に 0 に近づく様な解 $u(x)$ が存在する期待ができる。この仮定 1 の下で

$$(1.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解 $u(x, t)$ は初期値 $u_0(x)$ が連続であり、 $0 \leq u_0(x) \leq 1$, $u_0(x) \not\equiv 0$ $x \in \mathbb{R}^n$ ならば

$$(1.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ における compact - 集合収束}$$

が知られる。 (Ikeda-Kametaka [4], Masuda [5])

(1.1) での解が大きくなるのを抑える項 $-\frac{1}{4}|x|^2 u$ が入っている、この項の影響が (1.4) に対する結論 (1.5) などの様な変更を受けるだろうか? というのが興味のあるところである。以下に用いられる論法は Fujita [6], Pazy and Rabinowitz [7] 等が用いたものと同じであり、この場合特有の工夫を少し必要とする。

2. 準備

(1.2) の線型化として

$$(2.1) \quad -\Delta \varphi + \frac{1}{4}|x|^2 \varphi = \lambda \varphi \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を得る。 $n=1$ なる (2.1) は Weber の微分方程式と等価

なり $\lambda = j + \frac{1}{2}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$(2.2) \quad \varphi(x) = D_j(x) = H_j(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} = (-1)^j e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^j e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

が解である。 ところで $D_j(x)$ は j 次 Weber 函数、 $H_j(x)$

は j 次 Hermite 多項式である。

$$(2.3) \quad \{ \varphi_j(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} (j!)^{-\frac{1}{2}} D_j(x) ; j=0, 1, 2, \dots \} : \text{C.O.N.S. in } L^2(\mathbb{R})$$

が知られる。 n を一般に自然数とすると

$$N^+ = \{ j = (j_1, \dots, j_n) ; j_i : \text{非負整数 } i=1, \dots, n \}$$

$$|j| = j_1 + \dots + j_n \quad \text{と約束する}$$

$$(2.4) \quad \varphi_j(x) = \varphi_{(j_1, \dots, j_n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{4}} [j_1! \dots j_n!]^{-\frac{1}{2}} D_{j_1}(x_1) \dots D_{j_n}(x_n)$$

は $\lambda = |j| + \frac{n}{2}$ に対応する (2.1) の解である。

$$(2.5) \quad \{ \varphi_j(x) ; j \in N^+ \} : \text{C.O.N.S. in } L^2(\mathbb{R}^n)$$

である。 (2.1) の最小固有値 $\lambda = \frac{n}{2}$ に対応する固有空間

は 1 次元であり、

$$(2.6) \quad \psi_0(x) = e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$$

ψ_0 base とする。 $\psi_0(x)$ は

$$(2.7) \quad -\Delta \psi_0 + \frac{1}{4}|x|^2 \psi_0 = \frac{n}{2} \psi_0$$

と可なり、 $\max_{\mathbb{R}^n} \psi_0(x) = 1$, $\psi_0(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}^n$ であり
 3 事と注意しておく。 $f'(0) > \frac{n}{2}$ α とする (2.1) は super-critical
 という、この時

$$(2.8) \quad f(\delta_0) = \frac{n}{2} \delta_0, \quad 0 < \delta_0 < 1$$

なる δ_0 が唯一つ決まる。 Mehler の公式と等しい

$$(2.9) \quad \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x) H_j(y) \frac{z^j}{j!} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \frac{z^2}{1-z^2} + 2xy \frac{z}{1-z^2} \right]$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |z| < 1$$

が知られている。(Mehler [8], Hille [9] または小松
 勇作 [10])

3. 結論

定理 1 (subcritical case)

$0 \leq f'(0) \leq \frac{n}{2}$ の場合 (1.2) の解は $w(x) \equiv 0$ のみである。

2、 $0 \leq u_0(x) \leq 1$ $x \in \mathbb{R}^n$ なる任意の $u_0(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (1.1) の解 $u(x, t)$ の漸近挙動は

$$(3.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ における一様収束}$$

が成り立つ。

定理 2 (super critical case)

$f'(0) > \frac{n}{2}$ の場合 (1.2) は自明な解 $w(x) \equiv 0$ 以外に $C^2(\mathbb{R}^n)$ の中で唯一つの非自明解 $w(x)$ を持つ。

$$(3.2) \quad \delta_0 e^{-\frac{1}{4}|x|^2} < w(x) < 1 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ただし δ_0 は (2.8) で定義されたもの。

$$(3.3) \quad w(x) = O(|x|^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \quad \text{for } \frac{n}{2} \geq 0$$

が成り立つ。 $x \in \mathbb{R}^n$ かつ $0 \leq u_0(x) \leq 1$

$$(3.4) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{4}|x|^2} u_0(x) > 0 \quad \text{or } = +\infty$$

なる任意の $u_0(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (1.1) の解 $u(x, t)$ の漸近挙動は

$$(3.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = w(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ における一様収束}$$

である。ただし $w(x)$ は前章で述べた (1.2) の非自明解である。

注意 定理 2 において (3.4) が成り立ちない場合、即ち

$$(3.6) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{-\frac{\mu}{4}|x|^2} u_0(x) = 0$$

の場合には対応する (1.1) の解 $u(x, t)$ の漸近挙動はかんじ

$$(3.7) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \leq w(x)$$

$$(3.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \geq 0$$

以上の情報から得られるかどうかはわからない。

以下定理 1 の証明は省略、定理 2 のみ証明する。

4. 基本解

(1.1) の線型化に当る次の様な初期値問題を考える。

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (\mu + \frac{\mu}{4}|x|^2) u + F(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\mu > 0$ は $\mu > 0$ と $\mu = 0$ とである。初期値 $u_0(x)$ 及び右辺 $F(x, t)$

は次の様な仮定をみたすものとする。

- 仮定 4.1 (i) $u_0(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq u_0(x) \leq 1$ $x \in \mathbb{R}^n$
 (ii) $F(x, t) : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder 連続, $0 \leq F(x, t) \leq F$
 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ なる $F > 0$ が存在する。

以後 (4.1) の解といふ場合

$$(4.2) \quad u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

$$(4.3) \quad 0 \leq u(x, t) \leq U(t) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \quad \text{なる}$$

局所有限函数 $U(t)$ が存在する。

なる制限をみたす $u(x, t)$ がある様式 (4.1) をみたし初期条件を

$$(4.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n = \text{or } \text{compact-な集合}$$

の意味をみたすものに限ることにする。

定義 4.1

$$(4.5) \quad U(x, y, t; \mu, n) = \sum_{j \in \mathbb{N}^+} \varphi_j(x) \varphi_j(y) e^{-(|x| + \frac{n}{2} + \mu)t}$$

ただし (4.5) の右辺は $\forall t_0 > 0$ に対し $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty)$ で絶対一様収束する。(4.5) より次の命題を得る。

命題 4.1

$$(4.6) \quad U(x, y, t; \mu, n) = e^{-\mu t} \prod_{k=1}^n U(x_k, y_k, t; 0, 1)$$

Mehler の公式 (2.9) より

$$\begin{aligned} (4.7) \quad U(x, y, t; 0, 1) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi \sinh t}} \exp \left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2) \coth t + \frac{1}{2}xy \operatorname{cosech} t \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi \sinh t}} \exp \left[-\frac{|x-y|^2}{4 \sinh t} \right] \exp \left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2) \tanh \frac{t}{2} \right] \end{aligned}$$

が従うから (4.6) と合わせ2次の命題を得る。

命題 4.2

$$(4.8) \quad U(x, y, t; \mu, n) = e^{-\mu t} \left[\frac{1}{4\pi \sinh t} \right]^{\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{|x-y|^2}{4 \sinh t} \right] \exp \left[-\frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2) \tanh \frac{t}{2} \right]$$

$U(x, y, t; \mu, n)$ は次の補題が成り立つ という意味で (4.1) の基本解である。以後混乱はないと思うので n は省略する。

$$U(x, y, t; \mu, n) = U(x, y, t; \mu) \quad \text{と書く。}$$

補題 4.1

仮定 4.1 の下で初期値問題 (4.1) の解は唯一のものである。

次式が与えられる。

$$(4.9) \quad u(x, t) = \int_{R^n} U(x, y, t; \mu) u_0(y) dy \\ + \int_0^t \int_{R^n} U(x, y, t-s; \mu) F(y, s) dy ds$$

先づ解の一様性を証明しよう。 $u_0(x) \equiv 0$, $F(x, t) \equiv 0$ の時 (4.1) の解は $u(x, t) \equiv 0$ であることをいえる。以下、

$$v_\varepsilon(x, t) = e^{-\varepsilon|x|^2} u(x, t) \quad (\varepsilon > 0) \text{ は次の方程式を満たす。}$$

$$(4.10) \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} = \Delta v_\varepsilon + 4\varepsilon \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_k} - \left[(\mu - 2n\varepsilon) + \left(\frac{1}{4} - 4\varepsilon^2 \right) |x|^2 \right] v_\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ を十分小さく取ると (4.10) 右辺の中の $[\quad] > 0$ である。今 $v_\varepsilon(x, t) \not\equiv 0$ とすると次の様な $(x_0, t_0) \in R^n \times (0, \infty)$ が取れようと思ふ。すなわち、

$$(4.11) \quad \begin{cases} v_\varepsilon(x_0, t_0) = \max_{x \in R^n} v_\varepsilon(x, t_0) > 0 \\ v_\varepsilon(x_0, t) < v_\varepsilon(x_0, t_0) \quad (0 \leq t < t_0) \end{cases}$$

したがって、 x_0, t_0 において

$$(4.12) \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \geq 0, \quad \Delta v_\varepsilon \leq 0, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_k} = 0 \quad \forall k, \quad v_\varepsilon > 0$$

(4.10) と (4.12) は両立しない。したがって、 $v_\varepsilon(x, t) \equiv 0$ である。

あり $u(z, t) \equiv 0$ である。後半の部分の (4.7) によって
 ある $u(z, t)$ が (4.1) の解になる事は以下に示される命
 題のうち適当なものといくつか組み合わせるとわかる。標
 準的対話だから詳細は略。 (4.5), (4.8) より次の命題が従
 う。

命題 4.3

$$(4.13) \quad U(x, y, t; \mu) = U(y, x, t; \mu) > 0, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$(4.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, y, t; \mu) = \Delta_x U(x, y, t; \mu) - \left(\mu + \frac{1}{4}|x|^2\right) U(x, y, t; \mu)$$

$$(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$(4.15) \quad U(x, y, t; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, z, t-s; \mu) U(z, y, s; \mu) dz$$

$$(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad 0 < s < t$$

命題 4.4

$\theta \in \mathbb{R}^1$, $x, z \in \mathbb{R}^n$ 及び $1 - \theta \tanh t > 0$ ならば $\exists t_0 > 0$ 1 =
 対 $\forall$ 次式が成り立つ。

$$(4.16) \quad \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) e^{\frac{\theta}{4}|y-z|^2} dy$$

$$= e^{-\mu t} \left[\frac{1}{\cosh t - \theta \sinh t} \right]^{\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{4} \frac{|x|^2 \tanh t - \theta \{|x|^2 + |z|^2 - 2\langle x, z \rangle \cosh t\}}{1 - \theta \tanh t} \right]$$

$$\text{E 例 } \langle x, z \rangle = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n$$

(4.6) に注意すると (4.16) は $n=1$, $\mu=0$ の場合に証明されようが、この場合

$$(4.17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$$

の計算に帰着する。以下命題 4.4 の系と 1 次の命題が続く。先ず (4.16) 2° $z=0$, $\theta=-1$ とおく事にしよう

命題 4.5

$$(4.18) \quad \int_{\mathbb{R}^n} U(z, y, t; \mu) e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy = e^{-\frac{1}{4}|z|^2 - (\frac{n}{2} + \mu)t}$$

$$(4.19) \quad e^{-\frac{1}{4}|z|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) (\frac{n}{2} + \mu) e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy ds$$

次に (4.16) 2° $z=0$, $\theta=0$ とおく事にしよう

命題 4.6

$$(4.20) \quad U_1(x, t; \mu) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) dy \\ = e^{-\mu t} \left[\frac{1}{\cosh t} \right]^{\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{4}|x|^2 \tanh t \right] \\ \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ における compact 領域}$$

$$(4.21) \quad \int_t^\infty U(x, s; \mu) ds \leq \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} + \mu} e^{-(\frac{n}{2} + \mu)t} \exp\left[-\frac{1}{4}|x|^2 \tanh t\right]$$

次に (4.16) $z'' z = 0$ とおいて z を θ の微分したものと

$\theta = 0$ とおいて (4.20) の μ と $\frac{n}{2}$ と比較すると

命題 4.7

$$(4.22) \quad \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) (\mu + \frac{1}{4}|y|^2) dy$$

$$= e^{-\mu t} \left[\mu + \frac{n}{2} \tanh t + \frac{1}{4}|x|^2 \operatorname{sech}^2 t \right] \left[\frac{1}{\cosh t} \right]^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}|x|^2 \tanh t\right]$$

$\xrightarrow[t \rightarrow +0]{} \mu + \frac{1}{4}|x|^2$ $x \in \mathbb{R}^n$ における compact 一様収束.

命題 4.8

$$(4.23) \quad 1 = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) (\mu + \frac{1}{4}|y|^2) dy ds$$

上式を証明しよう。(4.13), (4.14) より

$$(4.24) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_y U(x, y, t; \mu) dy = 0$$

に注意すると (4.23) の右辺の t にかんする導関数は 0 であるから、

(4.23) の右辺は t にかんする定数である。 $t \rightarrow +0$

と示すこと (4.20) より左辺は 1 であることがわかる。

命題 4.9

$$(4.25) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial t} U(x, y, t; \mu) \right| dy \leq \left[n \coth t + \mu + \frac{n}{4} + \frac{3}{8} |x|^2 \right] U_1(x, t; \mu)$$

$$(4.26) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x U(x, y, t; \mu)| dy \leq \left[n \coth t + 2\mu + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} |x|^2 \right] U_1(x, t; \mu)$$

$$(4.27) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} U(x, y, t; \mu) \right| dy \leq \frac{2}{\sqrt{\rho \sinh t}}$$

(4.25) の証明しよう。

$$(4.28) \quad U^{-1}(x, y, t; \mu) \frac{\partial}{\partial t} U(x, y, t; \mu)$$

$$= - \left[\mu + \frac{n}{2} \coth t - \frac{1}{4} |x-y|^2 \frac{\coth t}{\sinh t} + \frac{1}{8} (|x|^2 + |y|^2) \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \right]$$

であるから、

$$(4.29) \quad \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) \frac{1}{4} |y-x|^2 dy$$

$$= \tanh t \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{4} |x|^2 \tanh t \cdot \left(\frac{\sinh t}{\cosh t + 1} \right)^2 \right] U_1(x, t; \mu)$$

もしこれが (4.25) を示せば事になるから (4.27) は (4.16)

で $z=x$ と置き θ を一回微分したのち $\theta=0$ とおけば得ら

れる。最後に (4.16) を得るのと同様の計算を行い、

$$(4.30) \quad \max_{\xi \in \mathbb{R}^1} \int_{|\eta - \xi| \leq x} e^{-\eta^2} d\eta = \int_{|\eta| \leq x} e^{-\eta^2} d\eta \quad (x > 0)$$

に注意すれば次の不等式を得る。

命題 4.10

任意の $R > 0$ に対し

$$(4.31) \quad \int_{\bigcup_{k=1}^n \{y; |y_k| > R\}} U(x, y, t; \mu) e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy \\ \geq \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|\eta| \leq \frac{R}{2} \sqrt{1 + \coth t}} e^{-\eta^2} d\eta \right]^n e^{-\frac{1}{4}|x|^2 - (\frac{n}{2} + \mu)t}$$

5. Green 函数

(1.2) の線型化に当る次の様な問題を考えよう。

$$(5.1) \quad -\Delta w + (\mu + \frac{1}{4}|x|^2) w = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

右辺 $F(x)$ は次の仮定をみたす。

仮定 5.1 $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder 連続, $0 \leq F(x) \leq F$
 $x \in \mathbb{R}^n$ 对し $F > 0$ がある。

以後 (5.1) の解といふ、左の場合 $w(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ であり、

$$(5.1) \text{ を満たし、さらに } W > 0 \text{ があり、} 0 \leq w(x) \leq W$$

$x \in \mathbb{R}^n$ なるものに限り事がある。(4.8) より次に右辺の積分が $x+y$ のとき意味を持つ事がわかる。

定義 5.1

$$(5.2) \quad G(x, y; \mu) = \int_0^\infty U(x, y, t; \mu) dt$$

$G(x, y; \mu)$ は次の神題が成り立つという意味で (5.1) に対する Green 函数である。

神題 5.1

仮定 5.1 の下で (5.1) の解は唯一である。また与えられる。

$$(5.3) \quad w(x) = \int_{R^n} G(x, y; \mu) F(y) dy$$

解の一意的性の証明は神題 4.1 の場合と同じ考えで出来る。

(5.3) が (5.1) の解を与える事は前節の結果と次にかかける命題のうちのいくつかより従う。先ず (4.13), (4.14) より次の命題が従う。

命題 5.1

$$(5.4) \quad G(x, y; \mu) = G(y, x; \mu) > 0 \quad (x, y) \in R^n \times R^n, x \neq y$$

$$(5.5) \quad -\Delta_x G(x, y; \mu) + (\mu + \frac{1}{4}|x|^2) G(x, y; \mu) = 0, \quad x \in R^n - \{y\}$$

(4.18) また (4.19) より

命題 5.2

$$(5.6) \quad \left(\frac{n}{2} + \mu\right) \int_{\mathbb{R}^n} G(z, y; \mu) e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy = e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

(4.23) から $t \rightarrow \infty$ と $y \rightarrow z$

命題 5.3

$$(5.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(z, y; \mu) \left(\mu + \frac{1}{4}|y|^2\right) dy = 1$$

(4.31) の両辺を t に対して $(0, \infty)$ で積分して

命題 5.4

$\forall R > 0$ に対して次の様な $\delta > 0$ が取れる。

$$(5.8) \quad \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{y: |y_k| > R\}} G(z, y; \mu) e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy \geq \delta e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

命題 5.5

$\forall p \in \mathbb{R}^1$, $\forall \mu > 0$ に対して μ と p のみによる定数 $C(\mu, p)$ が存在する。

$$(5.9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(z, y; \mu) (1 + |y|^2)^p dy \leq C(\mu, p) (1 + |z|^2)^{p-1}$$

(5.9) を証明しよう。 先ず μ, p のみによる定数 $C(\mu, p) > 0$

(5.10) より (5.9) を得た。証明終り。

定義 5.2

$$(5.11) \quad \begin{cases} G^{(1)}(x, y; \mu) = G(x, y; \mu) \\ G^{(j)}(x, y; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, z; \mu) G^{(j-1)}(z, y; \mu) dz \\ j = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

$$(5.12) \quad G^{(j)}(x; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} G^{(j)}(x, y; \mu) dy \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

と定義したとき (5.9) より次の命題が成る。

命題 5.6

μ と j のみに依存する定数 $C(\mu, j)$ があって

$$(5.13) \quad G^{(j)}(x; \mu) \leq C(\mu, j) (1 + |x|^2)^{-j} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

6. 定常問題

$F(w; \mu) = f(w) + \mu w$ とする。ここで $f(1) > 0$ とする。

$$(6.1) \quad F'(w; \mu) > 0 \quad w \in [0, 1)$$

が成り立つ。(1.2) は

$$(6.2) \quad \begin{cases} -\Delta w + (\mu + \frac{1}{4}|x|^2)w = F(w; \mu) & x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq w(x) \leq 1 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

と同値であり、さらに補題 5.1 による、

$$(6.3) \quad \begin{cases} w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) F(w(y); \mu) dy & x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq w(x) \leq 1 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

とも同値である。この節では定理 2.8 前半を証明する。

$f'(0) > \frac{n}{2}$ (supercritical) と考えようから (2.8) をみたす δ_0 を取れよう。 (6.3) に対する次の族を適当の逐次近似を考えよう。

$$(6.4) \quad \begin{cases} \bar{w}_0(x; \mu) \equiv 1 \\ \bar{w}_j(x; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) F(\bar{w}_{j-1}(y; \mu); \mu) dy \\ j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$(6.5) \quad \begin{cases} \underline{w}_0(x; \mu, \delta) = \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} & (0 < \delta \leq \delta_0) \\ \underline{w}_j(x; \mu, \delta) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) F(\underline{w}_{j-1}(y; \mu, \delta); \mu) dy \\ j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

先づ次の命題が成り立つ。

命題 6.1

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad 1 \equiv \bar{w}_0(x; \mu) &\geq \bar{w}_1(x; \mu) \geq \bar{w}_2(x; \mu) \geq \cdots \\
 &\cdots \geq \bar{w}_{j-1}(x; \mu) \geq \bar{w}_j(x; \mu) \geq \cdots \geq \bar{w}(x; \mu) \geq \\
 &\geq \underline{w}(x; \mu, \delta) \geq \cdots \geq \underline{w}_j(x; \mu, \delta) \geq \underline{w}_{j-1}(x; \mu, \delta) \geq \cdots \\
 &\cdots \geq \underline{w}_1(x; \mu, \delta) \geq \underline{w}_0(x; \mu, \delta) \equiv \delta e^{-\frac{1}{2}|x|^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{且つ } \bar{w}(x; \mu) = \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{w}_j(x; \mu), \quad \underline{w}(x; \mu, \delta) = \lim_{j \rightarrow \infty} \underline{w}_j(x; \mu, \delta).$$

命題 6.1 証明. (5.4) (5.7) 及び $F(1; \mu) = \mu \neq 1$

$$(6.7) \quad \bar{w}_1(x; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) \mu dy < 1 \equiv \bar{w}_0(x; \mu)$$

を得る。これより、(5.4), (6.1) は成り立つ。

$$(6.8) \quad \bar{w}_{j-1}(x; \mu) \geq \bar{w}_j(x; \mu) \quad j=1, 2, 3, \dots$$

が従う。これは (5.4), (5.6) から

$$(6.9) \quad F(w; \mu) \geq \left(\frac{3}{2} + \mu\right) w \quad 0 \leq w \leq \delta_0$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
 (6.10) \quad \underline{w}_1(x, \mu, \delta) &= \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) F(\delta e^{-\frac{1}{4}|y|^2}; \mu) dy \\
 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) \left(\frac{n}{2} + \mu\right) \delta e^{-\frac{1}{4}|y|^2} dy \\
 &= \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} = \underline{w}_0(x, \mu, \delta)
 \end{aligned}$$

を得る。 $1 \leq j \leq n$ に対して (6.8) を得るのと同様に $1 \leq j \leq n$ を得る。

$$(6.11) \quad \underline{w}_j(x, \mu, \delta) \geq \underline{w}_{j-1}(x, \mu, \delta) \quad j=1, 2, \dots$$

を得る。 又同様の議論より

$$(6.12) \quad 1 > \delta e^{-\frac{1}{4}|x|^2} \quad (0 < \delta \leq \delta_0)$$

より

$$(6.13) \quad \bar{w}_j(x, \mu) \geq \underline{w}_j(x, \mu, \delta) \quad j=0, 1, 2, \dots$$

を得るから (6.6) が示された。 証明終り。

$$(6.14) \quad F(w; \mu) \leq F(0; \mu) w \quad w \in [0, 1]$$

に注意すると (6.4) (5.11) (5.12) (5.13) より 次の命題を得る。

命題 6.2

$$(6.15) \quad \bar{w}_f(x; \mu) \leq (F(0; \mu))^{\delta} G^{(\delta)}(x; \mu) \leq C(p, \delta) (1 + |x|^2)^{-\delta}$$

$$f = 1, 2, 3, \dots$$

(6.4) (6.5) にあいて $f \rightarrow \infty$ と $\delta \rightarrow 0$

命題 6.3

$$(6.16) \quad \bar{w}(x; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) F(\bar{w}(y; \mu); \mu) dy$$

$$(6.17) \quad \bar{w}(x; \mu, \delta) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) F(\bar{w}(y; \mu, \delta); \mu) dy$$

(6.16), (6.17) より $\bar{w}(x; \mu)$, $\bar{w}(x; \mu, \delta)$ はともに連続函数である事がわかる。又 (6.6), (6.15) より

$$(6.18) \quad 0 \leq \bar{w}_f(x; \mu, \delta) \leq \bar{w}_f(x; \mu) \leq \bar{w}_1(x; \mu) \leq C(p, 1) (1 + |x|^2)^{-1}$$

$$f = 1, 2, 3, \dots$$

これから Dimi の定理と合わせて次の命題が続く。

命題 6.4

$$(6.19) \quad \lim_{f \rightarrow \infty} \bar{w}_f(x; \mu) = \bar{w}(x; \mu)$$

f にかんし単調減少、 $x \in \mathbb{R}^n$ にかんし一様収束、

$$(6.20) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} w_j(x; \mu, \delta) = w(x; \mu, \delta)$$

j はかんし単調増加、 $x \in R^n$ はかんし-様収束。

(5.4) に注意すると

$$(6.21) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2}|x|^2} w(x) > 0 \quad \alpha = +\infty$$

をみたす $(1, 2)$ の解 $w(x)$ に対し 2 次の様収 δ ($0 < \delta \leq \delta_0$) が取れり。

$$(6.22) \quad 1 \geq w(x) \geq \delta e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$$

(6.6) を得た α と同様の議論で

$$(6.23) \quad \bar{w}_j(x; \mu) \geq w(x) \geq w_j(x; \mu, \delta)$$

(6.23) により $j \rightarrow \infty$ とし結局次の命題を得る。

命題 6.5

(6.21) をみたす $(1, 2)$ の解 $w(x)$ に対し δ ($0 < \delta \leq \delta_0$) が取れり。

$$(6.24) \quad \bar{w}(x; \mu) \geq w(x) \geq w(x; \mu, \delta)$$

次の命題が-番重要である。

命題 6.6

$0 < \delta \leq \delta_0$. 仮定 4.1.1. δ と $\mu \geq |f'(1)|$ 仮定 4.1.2. μ に對して.

$$(6.25) \quad \bar{w}(x; \mu) \equiv w(x; \mu, \delta)$$

命題 6.6 証明. (6.16) の両辺に $F(w(x; \mu, \delta); \mu)$ をかけ
たものから (6.17) の両辺に $F(\bar{w}(x; \mu); \mu)$ をかけたもの
を引くと, x として $\mathbb{R}^n$ で積分すると Green 函数の対称
性 (5.4) より次式を得る.

$$(6.26) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \bar{w}(x; \mu) w(x; \mu, \delta) \left[\frac{F(w(x; \mu, \delta); \mu)}{w(x; \mu, \delta)} - \frac{F(\bar{w}(x; \mu); \mu)}{\bar{w}(x; \mu)} \right] dx = 0.$$

(6.26) の積分の意味を持つ事は次の様にして分かる。

$$2j+1 \geq [\frac{n}{2}] + 1 \quad \text{と} \quad 1 \leq (4.6), (6.15) \text{ 及び } (5.13) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (6.27) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(w(x; \mu, \delta); \mu) G(x, y; \mu) F(\bar{w}(y; \mu); \mu) dy dx \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\bar{w}_+(x; \mu); \mu) G(x, y; \mu) F(\bar{w}_+(y; \mu); \mu) dy dx \leq \\ & \leq (F(0; \mu))^2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{w}_+(x; \mu) G(x, y; \mu) \bar{w}_+(y; \mu) dy dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (F'(0, \mu))^{2j+2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G^{(j)}(x, \mu) G(x, y, \mu) G^{(j)}(y, \mu) dy dx \leq \\
&\leq (F'(0, \mu))^{2j+2} \int_{\mathbb{R}^n} G^{(2j+1)}(x, \mu) dx < \infty.
\end{aligned}$$

よって (6.26) の被積分関数は (6.6) と同様 1 より非負であり、
 1 より、2

$$(6.28) \quad \frac{F(\underline{w}(x, \mu, \delta); \mu)}{\underline{w}(x, \mu, \delta)} - \frac{F(\bar{w}(x, \mu); \mu)}{\bar{w}(x, \mu)} \equiv 0$$

を得るから、再び仮定 1 より (6.25) を得る。証明終り。

(6.24), (6.25) より (6.25) の両辺は δ, μ に無関係であり
 事実である。

$$(6.29) \quad \bar{w}(x, \mu) \equiv \underline{w}(x, \mu, \delta) = w(x)$$

と書くことができる。 (6.16) より $w(x)$ は積分方程式 (6.3) の
 解であり、従って求める問題 (1.2) の非自明解である。

次に (1.2) の解で非自明なもの $\tilde{w}(x)$ に対して求める $w(x)$
 に一致する事を示そう。 $\tilde{w}(x)$ も積分方程式 (6.3) を満た
 すから $\tilde{w}(x) \neq 0$ より実は $\tilde{w}(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$ である。

(6.24) を得たのと同様にし、

$$(6.30) \quad w(x) \geq \tilde{w}(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を得る。したがって、(6.25) を得るのと同じ論法で

$$(6.31) \quad w(x) \equiv \tilde{w}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を得る。(1.2) の非自明解の一意的が示された。定理 2

の (3.2) は (6.6) より、(3.3) は (6.6), (6.15) より従う。

以上で定理 2 の前半の証明を終る。

7. 非定常問題

$\mu > F(u; \mu)$ の前節と同じとし、引き続き $f'(0) > \frac{\mu}{2}$

(supercritical) の場合を考える事にする。問題 (1.1) は

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (\mu + \frac{1}{4}|x|^2)u + F(u; \mu) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \leq u(x, t) \leq 1 & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \end{cases}$$

と同値であり、これは補題 4.1 より

$$(7.2) \quad \begin{cases} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) u_0(y) dy \\ \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) F(u(y, s); \mu) dy ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq u(x,t) \leq 1 \\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \end{cases}$$

とも同値である。この節では定理の後半を証明する。次の様な逐次近似を考える。

$$(7.3) \quad \begin{cases} u_j(x,t;\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x,y,t;\mu) u_0(y) dy \\ \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x,y,t-s;\mu) F(u_{j-1}(y,s;\mu);\mu) dy ds \\ \quad j=1,2,3,\dots \\ u_0(x,t;\mu) \equiv u_0(x) \end{cases}$$

$$(7.4) \quad \begin{cases} \bar{u}_j(x,t;\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x,y,t;\mu) dy \\ \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x,y,t-s;\mu) F(\bar{u}_{j-1}(y,s;\mu);\mu) dy ds \\ \quad j=1,2,3,\dots \\ \bar{u}_0(x,t;\mu) \equiv 1 \end{cases}$$

$$(7.5) \quad \begin{cases} \underline{u}_j(x,t;\mu,\delta) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x,y,t;\mu) \delta e^{-\frac{1}{2}t|y|^2} dy \\ \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x,y,t-s;\mu) F(\underline{u}_{j-1}(y,s;\mu,\delta);\mu) dy ds \\ \quad j=1,2,3,\dots \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t; \mu, \delta) = \delta e^{-\frac{1}{4} \mu^2 t} \quad (0 < \delta \leq \delta_0) \end{array} \right.$$

命題 7.1

$$(7.6) \quad 1 \equiv \bar{u}_0(x, t; \mu) > \bar{u}_1(x, t; \mu) \geq \dots$$

$$\dots \geq \bar{u}_{j-1}(x, t; \mu) \geq \bar{u}_j(x, t; \mu) \geq \dots$$

$$\dots \geq \bar{u}(x, t; \mu) \geq w(x) \geq u(x, t; \mu, \delta) \geq \dots$$

$$\dots \geq u_j(x, t; \mu, \delta) \geq u_{j-1}(x, t; \mu, \delta) \geq \dots$$

$$\dots \geq u_1(x, t; \mu, \delta) \geq u_0(x, t; \mu, \delta) \equiv \delta e^{-\frac{1}{4} \mu^2 t}$$

$$\text{よって } \bar{u}(x, t; \mu) = \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu), \quad u(x, t; \mu, \delta) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu, \delta)$$

$w(x)$ は前節で存在を保證した (1.2) の唯一の非自明解。

命題 7.1 証明、 $u(x, t) \equiv w(x)$ は (1.1) の解とみなすことが
 3 補題 4.1 により

$$(7.7) \quad \begin{aligned} w(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) w(y) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) F(w(y), \mu) dy ds \end{aligned}$$

を得る。又 (7.4) より $j=1$ とすれば

$$(7.8) \quad \bar{u}_1(x, t; \mu) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) F(1; \mu) dy ds$$

を得るから、 $w(x) < 1$ に注意して (7.7) と (7.8) の右辺を比較する。

$$(7.9) \quad \bar{u}_1(x, t; \mu) \geq w(x)$$

を得る。又 $F(1; \mu) = \mu$ であるから (4.23) より

$$(7.10) \quad \bar{u}_1(x, t; \mu) \leq 1 \equiv \bar{u}_0(x, t; \mu)$$

(7.9), (7.10) を出発点として、 j による帰納法により

$$(7.11) \quad \bar{u}_{j-1}(x, t; \mu) \geq \bar{u}_j(x, t; \mu) \geq w(x) \quad j=1, 2, 3, \dots$$

を得る。一方 (7.5) より $j=1$ となる。

$$(7.12) \quad \underline{u}_1(x, t; \mu, \delta) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t; \mu) \delta e^{-\frac{\delta}{4}|y|^2} dy \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) F(\delta e^{-\frac{\delta}{4}|y|^2}; \mu) dy ds$$

を得るから、 $w(x) \geq \delta e^{-\frac{\delta}{4}|x|^2}$ に注意して (7.7) と (7.12) の右辺を比較して

$$(7.13) \quad w(x) \geq \underline{u}_1(x, t; \mu, \delta)$$

を得る。又 (6.9), (4.19) より

$$(7.14) \quad u_1(x, t; \mu, \delta) \geq \delta e^{-\frac{1}{2} |x|^2} =: u_0(x, t; \mu, \delta)$$

を得る。(7.13), (7.14) を出発点として、 j による帰納法により

$$(7.15) \quad w(x) \geq u_j(x, t; \mu, \delta) \geq u_{j-1}(x, t; \mu, \delta), \quad j=1, 2, 3, \dots$$

を得る。証明終り。

命題 7.2

$$(7.16) \quad \bar{u}_j(x, t; \mu) \leq \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!} (F'(0; \mu))^k t^k U_1(x, t; \mu) \\ + (F'(0; \mu))^j G^{(j)}(x; \mu) \quad j=1, 2, 3, \dots$$

特に $\forall t_0 > 0$ に対し μ, j, t_0 のみに依る定数 $C(\mu, j, t_0)$

があり、 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty)$ とすると

$$(7.17) \quad \bar{u}_j(x, t; \mu) \leq C(\mu, j, t_0) (1 + |x|^2)^{\frac{j}{2}}, \quad j=1, 2, 3, \dots$$

命題 7.2 証明、 j による帰納法で (7.16) を証明しよう。 $F(1; \mu) < F(0; \mu)$ に注意すると (7.8) より

$$(7.18) \quad \bar{u}_1(x, t; \mu) \leq U_1(x, t; \mu) + F'(0; \mu) G^{(1)}(x; \mu)$$

を得る。これは (7.16) が $j=1$ の場合正しいことを示している。
帰納法の仮定としてある自然数 j に対して (7.16) が成り立つとすると、まず (7.15) より

$$(7.19) \quad \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) U_1(y, s; \mu) dy = U_1(x, t; \mu)$$

が成り立つことに注意しておく。(7.4) より (6.14) に注意して上の仮定と (7.19) を使うと

$$\begin{aligned} (7.20) \quad \bar{u}_{j+1}(x, t; \mu) &= U_1(x, t; \mu) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) F(\bar{u}_j(y, s; \mu); \mu) dy ds \\ &\leq U_1(x, t; \mu) + F'(0; \mu) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{j+1} \frac{1}{k!} (F'(0; \mu))^k s^k U(x, y, t-s; \mu) U_1(y, s; \mu) dy ds \\ &\quad + F'(0; \mu) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) (F'(0; \mu))^j G^{(j)}(y; \mu) dy ds \\ &\leq U_1(x, t; \mu) + \sum_{k=0}^{j+1} (F'(0; \mu))^k U_1(x, t; \mu) \int_0^t \frac{1}{k!} s^k ds \\ &\quad + (F'(0; \mu))^{j+1} \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; \mu) G^{(j)}(y; \mu) dy. \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} (F(c, \mu))^k t^k U_1(x, t; \mu) + (F(c, \mu))^{j+1} G^{(j+1)}(x; \mu)$$

(7.20) は (7.16) から $j \leq j+1$ で置きかえても成り立つ事を示している。したがって (7.16) から全ての自然数 j に対して正しい事が示された。(7.17) は (7.16) より従う。証明終了。

命題 7.3

$$(7.21) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_j(x, t; \mu) \leq 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$(7.22) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_j(x, t; \mu, \delta) \geq 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

j にかんする帰納法で $\forall h > 0$ に対して

$$(7.23) \quad \bar{u}_j(x, t; \mu) - \bar{u}_j(x, t+h; \mu) \geq 0$$

を示すことが出来る。(7.21) を得る。(7.22) の証明も同様。

命題 7.4

$$(7.24) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu) = \bar{u}_j(x; \mu) \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

t にかんし単調減少, $x \in R^n$ にかんし一様収束。

$$(7.25) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu, \delta) = \bar{w}_j(x; \mu, \delta) \quad j=0, 1, 2, \dots$$

t はかんし単調増加、 $x \in \mathbb{R}^n$ にかんし一様収束、
 したがって $\bar{w}_j(x; \mu)$, $\bar{w}_j(x; \mu, \delta)$ は前節 (6.4), (6.5) で定義
 されたもの。

命題 7.4 証明、 (7.24) のみ証明可。 (7.25) の証明
 も同様である。 (7.21), (7.6) より $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu)$ が
 存在する事は明らかなのである。 $j=0$ の場合は自明。 $j=1$ の
 とき (7.24) が正しい事をいう。 (6.4), (6.4) より

$$(7.26) \quad \bar{u}_1(x, t; \mu) - \bar{w}_1(x; \mu)$$

$$= U_1(x, t; \mu) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) F(1; \mu) dy ds$$

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) F(1; \mu) dy ds$$

$$= U_1(x, t; \mu) - F(1; \mu) \int_t^\infty U_1(x, s; \mu) ds$$

(4.20), (4.21) より

$$(7.27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \bar{u}_1(x, t; \mu) - \bar{w}_1(x; \mu) \} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ 一様収束}$$

次にある自然数 f に対し (7.24) が正しく 2 級関数 $L \geq f+1$ に対し $L \geq f$ (7.24) が正しくなることを示す。 (6.4) (7.4) より

$$\begin{aligned}
 (7.28) \quad \bar{u}_{f+1}(x, t; \mu) - \bar{w}_{f+1}(x; \mu) &= \\
 &= U_1(x, t; \mu) - \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) F(\bar{w}_f(y; \mu); \mu) dy ds \\
 &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) [F(\bar{u}_f(y, t-s; \mu); \mu) - F(\bar{w}_f(y; \mu); \mu)] dy ds
 \end{aligned}$$

より、(4.20), (4.21) より (7.28) の右辺第1項、第2項が $t \rightarrow \infty$ とするとき一様に0に収束する。また、第3項が $t \rightarrow \infty$ とするとき0に一様収束する事を示す。帰納法の仮定を用いると $\forall \varepsilon > 0$ に対し $T > 0$ があり、

$$(7.29) \quad t-s > T, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対し } 1$$

$$|F(\bar{u}_f(y, t-s; \mu); \mu) - F(\bar{w}_f(y; \mu); \mu)| < \varepsilon$$

とできる。

$$\begin{aligned}
 (7.30) \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) [F(\bar{u}_f(y, t-s; \mu); \mu) - F(\bar{w}_f(y; \mu); \mu)] dy ds \\
 \leq \varepsilon \int_0^{t-T} \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) dy ds + F(1; \mu) \int_{t-T}^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, s; \mu) dy ds
 \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon G^{(1)}(x; \mu) + F(1; \mu) \int_{t-T}^{\infty} U_1(x, s; \mu) ds$$

であるから $t \rightarrow \infty$ とすると (4.21) より (7.30) の最後の項は 0 に一様収束する。したがって (5.7) より従って

$$G^{(1)}(x; \mu) < \frac{1}{\mu} \quad \text{又は (5.13) に注意すると}$$

$$(7.31) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \bar{u}_{j+1}(x, t; \mu) - \bar{u}_j(x, t; \mu) \} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{で一様収束}$$

が示された事になり、(7.24) の全ての自然数 j に対してなり立つ事がわかった。証明終り。

命題 7.5

$\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu) = \bar{u}(x, t)$ は μ に無関係であり、(1.1) の $u_0(x) \equiv 1$ に対応する解である。さらに

$$(7.32) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu) = \bar{u}(x, t)$$

j にかんし単調減少、 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ で一様収束。

$$(7.33) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x, t) \leq 0$$

$$(7.34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(x, t) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{で一様収束、}$$

命題 7.6

$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu, \delta) = u(x, t; \delta)$ は μ に無関係であり、

(1.1) の $u_0(x) = \delta e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ に対応する解がある。さらに

$$(7.35) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu, \delta) = u(x, t; \delta)$$

j にかんし単調増加, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ で一様収束,

$$(7.36) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t; \delta) \geq 0$$

$$(7.37) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t; \delta) = u_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ で一様収束.}$$

命題 7.5 のみ証明しよう。命題 7.6 の証明は同様に出来る。
 $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu) = \bar{u}(x, t; \mu)$ が存在する事は (7.6) より明らか。
 (7.4) により $j \rightarrow \infty$ と可なり $\bar{u}(x, t; \mu)$

は積分方程式 (7.2) をみたす事がわかる。したがって

(1.1) の $u_0(x) \equiv 1$ に対応する解がある。(1.1) の解の一意的性より $\bar{u}(x, t; \mu) = \bar{u}(x, t)$ は μ に無関係である事がわかる。
 $\bar{u}(x, t)$ は連続である事がわかる。さらに (7.6)

(7.17) と Dini の定理 により $0 < t_0 < t_1$ に対し

$$(7.38) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{u}_j(x, t; \mu) = \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \text{ で一様収束}$$

次に $\bar{u}(x, t)$ がみたす (7.2) で $u_0(x) \equiv 1$ としたものと (7.4) より

$$(7.39) \quad \bar{u}_j(x, t; \mu) - \bar{u}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) \left[F(\bar{u}_j(y, s; \mu), \mu) - F(\bar{u}(y, s; \mu), \mu) \right] dy ds$$

$$\leq F(1, \mu) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} U(x, y, t-s; \mu) dy ds$$

$$\leq F(1, \mu) \int_0^t U_1(x, s; \mu) ds$$

これより, (4.20) あり.

$$(7.40) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \{ \bar{u}_j(x, t; \mu) - \bar{u}(x, t) \} = 0$$

かつ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 一様収束.

又 (7.6), (7.21), (7.24) より (6.19) あり

$$(7.41) \quad \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \{ \bar{u}_j(x, t; \mu) - u(x) \} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ 一様収束.}$$

(7.38), (7.40) より (7.41) あり (7.32), (7.34) を得る.

(7.33) は (7.32), (7.21) あり従う。証明終り。

(7.6) を得たのと同様に 2 次の命題を得る。

命題 7.7

$$(7.42) \quad \delta e^{-\frac{1}{4}t|x|^2} \leq u_0(x) \leq 1 \quad x \in \mathbb{R}^n$$

なる任意の連続関数 $u_0(x)$ に対して (7.3) の解は

$$(7.43) \quad u_j(x, t; \mu, \delta) \leq u_j(x, t; \mu) \leq \bar{u}_j(x, t; \mu), \quad j=1, 2, \dots$$

を成す。

命題 7.8

(7.42) を仮定すると $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu) = u(x, t)$ が存在し μ に無関係である。さらに $u(x, t)$ は (1.1) の解であり、次の事が成り立つ。

$$(7.44) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \text{ 一様収束.}$$

$$(7.45) \quad \underline{u}(x, t; \delta) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$$

$$(7.46) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ 一様収束.}$$

命題 7.8 証明.

$$(7.47) \quad m_j(t; \mu) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u_{j+1}(x, t; \mu) - u_j(x, t; \mu)|$$

$j = 0, 1, 2, \dots$

と $\alpha < \infty$ (7.3), (4.20) より次の評価を得る。

$$(7.48) \quad \begin{cases} m_j(t; \mu) \leq F'(0; \mu) \int_0^t m_{j-1}(s; \mu) ds, & j = 1, 2, 3, \dots \\ m_0(t; \mu) \leq 1 \end{cases}$$

ここで $\alpha > 2$

$$(7.49) \quad M_k(t; \mu) = \sum_{j=0}^k m_j(t; \mu)$$

とあるのは (7.48) より

$$(7.50) \quad M_k(t; \mu) \leq 1 + F'(0; \mu) \int_0^t M_{k-1}(s; \mu) ds, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

より

$$(7.51) \quad M(t; \mu) = 1 + F'(0; \mu) \int_0^t M(s; \mu) ds$$

のなめらかな解の唯一つである。

$$(7.52) \quad M(t; \mu) = \exp[F'(0; \mu)t]$$

である。 (7.50), (7.51) を比較すると

$$(7.53) \quad M_k(t; \mu) \leq M(t; \mu)$$

を得る。したがって、 $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu) = u(x, t; \mu)$ が存在して、 $t_1 > 0$ に対して

$$(7.54) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x, t; \mu) = u(x, t; \mu)$$

$(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_1]$ で一様収束、

(7.54) より (7.3) には u が $j \rightarrow \infty$ とすると $u(x, t; \mu)$ は積分方程式 (7.2) を満たす事がわかる。したがって (1.1) の解である。(1.1) の解の一意性により $u(x, t; \mu) = u(x, t)$ は μ と無関係である事がわかる。(7.43), (7.32), (7.34),

(7.35) 及び (7.37) より (7.44) を得る。又 (7.44),
 (7.43), (7.32) 及び (7.35) より (7.45) が従う。(7.45)
 (7.34) 及び (7.37) より (7.46) が従う。証明終り。

最後に (7.42) の制限定理 2 の仮定 (3.4) の如くゆ
 るべき事が出来るという事は (4.31) に注意すればよい。

以上で定理 2 の証明を完了する。

参考文献

- [1] D. Saint-James and P. G. de Gennes : Onset of superconductivity
 in decreasing fields, Phys. Letters 7 ('63) 306-308.
- [2] K. Maki and T. Tsuneto : Pauli paramagnetism and superconducting
 state, Prog. Theor. Phys. 31 ('64) 945-956.
- [3] V. L. Ginzburg and L. D. Landau : On the theory of super-
 conductivity (in Russian), Zh. eksper. teor. Fiz. 20 ('50) 1064-1082.
- [4] N. Ikeda and Y. Kametaka : (to appear).
- [5] K. Masuda : On the growth of solutions of nonlinear diffusion
 equation $u_t = \Delta u + F(u)$, (to appear).
- [6] H. Fujita : On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and
 $v_t = \Delta v + e^v$, Bull. A. M. S. 75 ('69) 132-135.
- [7] A. Pazy and P. H. Rabinowitz : A nonlinear integral equation
 with applications to neutron transport theory, Arch. Rat. Mech.
 Anal. 32 ('69) 226-246. ibd. 35 ('69) 409-410.

- [8] F. G. Mehler : Reihenentwicklungen nach Laplaceschen
Funktionen höherer Ordnung, Joul. f. Math. 66 (1866) 161-176.
- [9] E. Hille : A class of reciprocal functions, Annals of Math.
27 ('26) 427-464.
- [10] 小松勇作 : 特殊函数演習, 朝倉書店.

なお [1], [2], [3] は 日本物理学会発行 物理学論文選
集 153 超伝導 にもある。特に [3] の日本語訳もあ
る。