

## 土橋カusp特異点の無限小変形

東北大理 尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

§0. 序.  $(V, p)$  を  $n (\geq 2)$  次元正規孤立特異点とする。ここでは  $(V, p)$  が“カusp”と呼ばれる場合を考察する。

Hirzebruch は [H] で Hilbert modular 多様体  $(\mathbb{H}^n / \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}))^+$   $= (\mathbb{H}^n / \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})) \cup \{p_1, \dots, p_n\}$  を研究し,  $n=2$  のときカusp特異点  $p_i$  の最小特異点解消を与えた。ここに  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$  は上半平面,  $\mathcal{O}$  は総実  $n$  次代数体の整数環である。これが, カusp特異点の現われた最初である。土橋はこれを一般化して, tube 領域  $\mathcal{O}$  とある離散群  $G$  とを用いて,  $\mathbb{H}^n / \{p_i\} \cong \mathcal{O} / G$  となるような“土橋カusp特異点”を構成した [T1]。ここでは, tube 領域が第一種 Siegel 領域とも呼ばれることから,  $\mathbb{H}^n / \{p_i\} \cong \mathcal{O} / G$  で  $\mathcal{O}$  が第二種 Siegel 領域になっている正規孤立特異点  $(V, p)$  も“カusp”と呼ぶことを提案したい。

本論では, この拡張されたカusp特異点が正規孤立 Du Bois 特異点であることと,  $n \geq 3$  のときにはこれが equisingular であることを示す [O2]。

次に,  $(V, p)$  が  $n$  次元 Hilbert modular カスプ特異点のとき Freitag と Kiehl たより,  $n \geq 3$  ならば  $(V, p)$  は "rigid", つまり変形が自明であることが示された [FK]. ここで,  $n=3$  のとき土橋カスプ特異点は一般に rigid でないことを示す [O1]. この結果をもとに土橋は  $(V, p)$  の versal 族を構成した [T2].

## §1. カスプ特異点の構成

### 1.1. 第二種 Siegel 領域

$r \geq 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $n := r + m \geq 2$  を整数とし,  $N$  を階数  $r$  の自由  $\mathbb{Z}$ -加群とする.  $C \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  を開凸錐で  $\bar{C} \cap (-\bar{C}) = \{0\}$  なるものとする.  $H: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \longrightarrow N_{\mathbb{C}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  を Hermit 形式で

$$(i) \quad H(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 H(u_1, v) + \lambda_2 H(u_2, v), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, u_i, v \in \mathbb{C}^m$$

$$(ii) \quad \overline{H(u, v)} = H(v, u), \quad \overline{\phantom{x}} \text{ は複素共役を表わす.}$$

$$(iii) \quad H(u, u) \in \bar{C}, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad \bar{C} \text{ は } C \text{ の } N_{\mathbb{R}} \text{ における閉包.}$$

$$(iv) \quad H(u, u) = 0 \text{ ならば } u = 0.$$

を満たすものとする. このとき

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(H, C) := \{(z, u) \in N_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^m : \Im z - H(u, u) \in C\}$$

とおいて, これを  $H$  と  $C$  に付随した第二種 Siegel 領域という。

$$\text{群 } N(\mathcal{O}) := \{(a, c) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{C}^m\} \text{ が } \mathcal{O} \text{ 上に}$$

$$(a, c)(z, u) = (z + a + 2\sqrt{-1}H(u, c) + \sqrt{-1}H(c, c), c + u)$$

として作用することに注意しておく。

### 1.2. Lattice data.

$L \subset \mathbb{C}^m$  を階数  $2m$  の自由  $\mathbb{Z}$ -加群で, その商  $\mathbb{C}^m/L$  がコンパクトなものとする。  $\Gamma \subset \text{Aut}(N)$  を  $C$  を保つ部分群で, 更に次の条件を満たすものとする。

- $\Gamma$  は  $D := C/R_0$  上に固有不連続かつ固定点なしに作用する。
- 商  $D/\Gamma$  はコンパクト。
- 群準同型  $\Gamma \ni g \mapsto \tilde{g} \in GL_m(\mathbb{C})$  で  $gH(u, u) = H(\tilde{g}u, \tilde{g}u)$  かつ  $\tilde{g}L \subset L$  なるものがある。
- すべての  $l, l' \in L$  に対し,  $H(l, l') - H(l', l) \in \sqrt{-1}N$ 。

### 1.3. 構成.

$T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  を  $1$  次元代数的トーラスとする。  $N, L$  を  $N(\otimes)$  の部分群とみて

$$\begin{array}{ccc} \otimes / N & \subset & T_N \times \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \otimes / N \rtimes L & \subset & (T_N \times \mathbb{C}^m) / L \end{array}$$

を考える。  $(T_N \times \mathbb{C}^m) / L$  は Abel 多様体  $A := \mathbb{C}^m / L$  上の  $T_N$ -束になっている。 その推移関数は,  $u \in \mathbb{C}^m, l \in L$  に対し

$$\exp(2\pi(2H(u, l) + H(l, l))) \in T_N$$

である。但し,  $\exp: N_{\mathbb{C}} \rightarrow T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  とおいた。

今,  $\mathbb{C} \cup \{0\}$  の  $\Gamma$ -admissible rational partial polyhedral 分割  $\hat{\Delta}$  で  $\hat{\Delta} \bmod \Gamma$  が有限となるものとする。このとき

$$\begin{array}{ccc} T_N \times \mathbb{C}^m & \subset & T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T_N \times \mathbb{C}^m)/L & \subset & (T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m)/L \end{array}$$

となる。

$\Gamma$  の作用による商をとるために, “うまい”作用域をとりたい。そのために, 実解析的写像  $(T_N \times \mathbb{C}^m) \ni (t, u) \mapsto \text{ord}(t) - H(u, u) \in \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$  を拡張して,  $\Phi: (T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m) \rightarrow M_{\mathbb{C}}(N, \hat{\Delta})$  を作る。(トラス埋込に関する記号は [MO] に依る。) この写像は  $L$ -不変だから,  $(T_N \text{emb}(\hat{\Delta}) \times \mathbb{C}^m)/L \rightarrow M_{\mathbb{C}}(N, \hat{\Delta})$  が誘導され, これも同じ  $\Phi$  で表わす。この  $\Phi$  は,  $\Gamma$ -同変である。今,

$$\tilde{v} := \Phi^{-1}(\mathbb{C} \cap M_{\mathbb{C}}(N, \hat{\Delta}) \text{ 内部での閉包の内部})$$

$$\tilde{Y} := \tilde{v} \setminus \Phi^{-1}(\mathbb{C})$$

とおく。 $\Gamma$  は  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{Y}$  上に固有不連続かつ固定点なしに作用するから, その商を  $v := \tilde{v}/\Gamma$ ,  $X := \tilde{Y}/\Gamma$  とおく。

$X$  を contract して正規孤立特異点を作りたい, そのための核関数を利用する。 $(z, u) \in \infty$  に対し

$$\mathcal{E}(z, u) := \int_{\mathbb{C}^*} \exp(-\langle \text{Im } z - H(u, u), t \rangle) \det \Theta(t) \phi_{\mathbb{C}^*}(t)^{-1} dt$$

とみく。ここに,  $C^* = \{y \in N_R^* : \langle x, y \rangle > 0 \ \forall x \in \bar{C} \setminus \{0\}\}$  は  $C$  の  
 双対錐で,  $\phi_{C^*}$  は  $C^*$  の特性関数  $[V]$  である。  $\Theta(t) \in M_m(\mathbb{C})$  は  
 $\mathbb{C}^m$  の内積  $(\cdot, \cdot)$  を固定したとき

$$\langle H(u, v), t \rangle = (v, \Theta(t)u) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^m, t \in N_R^*$$

で定義される Hermit 対称行列である。更に,  $t \in C^*$  に対して  
 $\Theta(t)$  は正定値になる。  $\Psi$  は,  $\mathcal{O}$  上正値で, その Hessian は  
 正定値であり,  $N$ -,  $L$ -不変, 更に  $g \in \Gamma$  に対し

$$\Psi(gz, \tilde{g}u) = |\det g|^{-2} |\det \tilde{g}|^{-2} \Psi(z, u)$$

である。従って,  $\Psi$  は  $\mathcal{U} \setminus X$  上の関数とみなされる。  $X$  上で  
 $\Psi \equiv 0$  と定めると,  $\Psi$  は  $\mathcal{U}$  上 pluri-subharmonic かつ  $\mathcal{U} \setminus X$  上  
 strictly pluri-subharmonic となるので,  $X$  を contract することができる (cf. [GR]);  $\pi: (\mathcal{U}, X) \longrightarrow (V, p)$ .

注意 1.  $m=0$  のとき,  $(V, p)$  は土橋カスプ特異点に他なら  
 ない。

2.  $r=1$  のとき,  $\mathcal{O}$  は  $n=m+1$  次元超球と同型にな  
 り,  $\mathcal{C}$  のとき  $X$  は Abel 多様体  $A = \mathbb{C}^m/L$  と同型で,  $(V, p)$  は  
 $A$  上の affine cone になる。

## §2. 結果.

定理 2.1. §1 で構成された  $(V, p)$  について,

$$(R^i \pi_* \mathcal{O}_V)_p \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathcal{O}_X) \quad (i \geq 1),$$

$$R^i \pi_* \mathcal{O}_V(-X) = 0 \quad (i \geq 1).$$

特に,  $(V, p)$  は正規孤立 Du Bois 特異点である。

## 2.2. 無限小変形について.

ここで,  $(V, p)$  の変形とは, 複素解析空間の芽の間の平坦射  $f: (\mathcal{V}, 0) \rightarrow (\mathcal{T}, 0)$  と同型  $(V, 0) \xrightarrow{\sim} (f^{-1}(0), 0)$  の組の意味である。 $(V, p)$  の一次無限小変形とは,  $(V, p)$  の変形  $f: (\mathcal{V}, 0) \rightarrow (\mathcal{T}, 0)$  であって,  $\mathcal{T} = \text{Spec } \mathbb{C}\{\varepsilon\}/(\varepsilon^2)$  のこととする。我々の興味があるのは  $T_V := \text{Ext}_{\mathcal{O}_V}^1(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V)$  である。これは  $(V, p)$  の一次無限小変形の分類空間になっている。これを調べるために Schlessinger による次の定理が有効である:

比較定理 ([S7]).  $(V, p) \hookrightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$  を閉埋込とするとき,

$$0 \rightarrow T_V^1 \rightarrow H^1(V \setminus \{p\}, \mathcal{O}_V) \rightarrow H^1(V \setminus \{p\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d|_V})$$

は完全列である。

定理 2.2.  $n \geq 3$  のとき,

$$H^1(V, \mathcal{O}_V(-\log X)) \xrightarrow{\sim} T_V^1 \xrightarrow{\sim} H^1(V \setminus \{p\}, \mathcal{O}_V).$$

ここに  $\Theta_v(-\log X)$  は,  $X$  に沿って対数的極を持つ Kähler 微分の層  $\Omega_v^1(\log X)$  の双対層  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_v}(\Omega_v^1(\log X), \mathcal{O}_v)$  である。

注意.  $X$  の既約分解を  $X = \bigcup_i X_i$  とし,  $X_i$  の  $v$  における法層を  $N_{X_i/v}$  とすると,  $\Theta_v(-\log X) = \text{Ker}(\Theta_v \rightarrow \bigoplus_i N_{X_i/v})$  が成立する。更に,  $H^i(\Theta_v(-\log X)) = \text{Ker}(H^i(\Theta_v) \rightarrow \bigoplus_i H^i(N_{X_i/v}))$  が成立し, 従って  $H^i(\Theta_v(-\log X))$  は  $v$  の一次無限小変形でどの  $X_i$  も消えないものの分類空間である (cf. [W])。

定理 2.3.  $m=0$  のとき, すなわち  $(V, p)$  が土橋カスプ特異点のとき,

$$H^i(\Gamma, \Theta_v(-\log X)) \cong H^i(\Gamma, N_c) \quad (i \geq 1).$$

ここに右辺は  $\Gamma \subset \text{Aut}(N)$  の作用による群 cohomology である。

定理 2.4 ([O1]). 錐  $C$  がより低次元の錐の直積に分解するとき, つまり  $C = C_1 \times \cdots \times C_s$  ( $s \geq 2$ ) と書けるとき,

$$H^1(\Gamma, N_c) = 0.$$

定理 2.5 ([O1]).  $r=3$  のとき,

$$3(1 - \chi(D/\Gamma)) \geq \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, N_c) \geq -3\chi(D/\Gamma).$$

ここに,  $\chi(D/\Gamma)$  は閉曲面  $D/\Gamma$  の Euler 数である。

注意 1.  $(V, p)$  が土橋カスプ特異点のとき, Hilbert modular カスプでなければ, すなわち  $D/\Gamma$  が実トーラスでなければ,  $\chi(D/\Gamma) < 0$  であることが [T<sub>1</sub>] により判る。従って, その時には, 定理 2.2 と 2.5 により  $\dim_{\mathbb{C}} T^1_V > 0$ , つまり  $(V, p)$  が "rigid" でないことが判る。

2. 最近, 土橋は 定理 2.5 の精密化  $\dim_{\mathbb{C}} H^1(P, N_{\mathbb{C}}) = -3\chi(D/\Gamma)$  を示し, 土橋カスプ特異点の versal 族を構成した [T<sub>2</sub>]。

これらの定理の証明については [O<sub>1</sub>], [O<sub>2</sub>] を参照。

### 参考文献

- [BS] C. Bănică and O. Stănăşilă, Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces, Editura Academiei, Bucuresti and John & Sons, London, New York, Sydney and Toronto, 1976.
- [FK] E. Freitag and R. Kiehl, Algebraische Eigenschaften der lokalen Ringe in den Spitzen der Hilbertschen Modulgruppen, Inventiones Math. 24(1974), 121-148.
- [GR] R. C. Gunning and H. Rossi, Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J., 1965.
- [MO] T. Oda, Lectures on Torus Embeddings and Applications



(Based on joint work with K. Miyake), Tata Inst. of Fund. Res., Bombay, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

- [O1] S. Ogata, Infinitesimal deformations of Tsuchihashi's cusp singularities, to appear in Tohoku Math. J.
- [O2] S. Ogata, Infinitesimal deformations of generalized cusp singularities, preprint.
- [Sa] I. Satake, Numerical invariants of arithmetic varieties of  $\mathbb{Q}$ -rank one, preprint.
- [S] M. Schlessinger, Rigidity of quotient singularities, *Inventiones Math.* 14(1971), 17-26.
- [T1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, *Tohoku Math. J.* 35(1983), 607-639.
- [T2] H. Tsuchihashi, Deformation of three dimensional cusp singularities, preprint.
- [W] J. M. Wahl, Equisingular deformations of normal surface singularities I, *Ann. of Math.* 104(1976), 325-356.
- [V] E. B. Vinberg, Theory of homogeneous convex cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* 12(1967), 303-368.
- [H] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, *Enseign. Math.* 19(1973), 183-281.