

縮退した半線型方程式系の iteration による 非負解の構成について

九大・工・応用理学) 大内 忠

§ 1.

非線型放物型方程式に対しては, $\sup$ norm による評価が得られ, それによ, て Cauchy 問題の大域解の存在が示せる場合がある,

Mimura [2] において, ある種の化学反応方程式系に対して, 差分法を用いることにより 非負解の大域的存在が示された. 以下において, この方程式系の非負大域解を iteration とアプロオリ評価を用いることにより構成する. 放物型方程式の基本解, その性質等が重要な役割を演ずる. ここで用いた方法は, 境界条件をつけたも~~とも~~^{場合に}使える.

簡単のため 境界条件なしの ^{場合に} Cauchy 問題について, その概略を示す,

§ 2

考察する初期値問題は $\{(I. V. P.)$ と略記する}

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} = -d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4$$

d_i は非負の定数

$$u_i(x, t_0) = \varphi_i(x) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$$

まず, 初期条件に対する仮定は $\varphi_i(x) \geq 0$ かつ 有界,

$\varphi_3(x), \varphi_4(x)$ 局所 Hölder 連続. (*)

非負解を構成する iteration

第 0 近似

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial t} = \Delta u_1^0$$

$$\frac{\partial u_2^0}{\partial t} = \Delta u_2^0$$

$$u_i^0(x, t_0) = \varphi_i(x)$$

$$\frac{\partial u_3^0}{\partial t} = \frac{\partial u_4^0}{\partial t} = 0$$

$\varphi_i(x)$ ($i=3,4$) の Hölder 連続性は, 積分方程式の解が微分方程式の解となるための条件. また有界な解を差える.

第 n 近似 ($n \geq 1$)

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial t} = \Delta u_1^n - d_1 u_1^n u_4^{n-1} - d_2 u_1^n u_3^{n-1} \quad (I_n - 1)$$

$$\frac{\partial u_2^n}{\partial t} = \Delta u_2^n - d_3 u_2^n u_4^{n-1} + d_2 u_1^n u_3^{n-1} \quad (I_n - 2)$$

$$\frac{\partial u_3^n}{\partial t} = d_3 u_2^{n-1} u_4^n - d_2 u_1^{n-1} u_3^n \quad (I_n - 3)$$

$$\frac{\partial u_4^n}{\partial t} = -d_1 u_1^{n-1} u_4^n - d_3 u_2^{n-1} u_4^n \quad (I_n - 4)$$

$$u_i^n(x, +0) = \varphi_i(x)$$

近似列 $\{u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n\}$ について次のことが成り立つ

lemma 2-1

$u_i^n(x, t)$ はすべて 非負有界である. すなわち

$$\sum_{i=1}^4 \sup_x |u_i^n(x, t)| \leq 2 \sum_{i=1}^4 \sup_x |\varphi_i(x)|$$

$$(I_n - 1) \sim (I_n - 4) \text{ は基本解 } \square(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \in$$

用いて, 積分方程式に直すと,

$$u_1^n = e^{t\Delta} \varphi_1 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (d_1 u_1^n u_4^{n-1} + d_2 u_1^n u_3^{n-1}) ds$$

$$u_2^n = e^{t\Delta} \varphi_2 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (d_3 u_2^n u_4^{n-1} - d_2 u_1^n u_3^{n-1}) ds$$

$$u_3^n = \varphi_3 + \int_0^t (d_3 u_2^{n+1} u_4^n - d_2 u_3^{n+1} u_3^n) ds$$

$$u_4^n = \varphi_4 - \int_0^t (d_1 u_1^{n+1} u_4^n + d_3 u_2^{n+1} u_4^n) ds$$

$$\text{c.c.} \quad e^{t\Delta} g = \int_{\mathbb{R}^n} U(t, x, y) g(y) dy$$

difference $u_i^{n+1} - u_i^n$ を評価することにより (lemma 2.1 を用いる) と

lemma 2-2

$u_i^n(x, t)$ は $\mathbb{R}^n \times [0, T_0]$ $T_0 = \frac{1}{18kM}$ で一様収束する。
 $3. \quad k = \max(d_1, d_2, d_3) \quad M = \sum_{i=1}^4 \sup_x |\varphi_i(x)|$

また 次のことも成り立つ

lemma 2-3

(I.V.P) の有界な解は一様である

lemma 2-4

(I.V.P) の nonnegative solution に対して (7 次のアッ
 リオリ) 評価が成り立つ。もし解が $t \in [0, T]$ に存在す

$$\text{す} \rightarrow \sum_{i=1}^4 \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]} |u_i(x,t)| \leq C \sum_{i=1}^4 \sup_x |u_i(x, +0)|$$

よって 次の存在定理を得る

Theorem

(I. V. P) の nonnegative bounded solution は文域的に存在する. 但し $\varphi_1(x) \geq 0$ かつ有界 $\varphi_2(x), \varphi_3(x)$ は locally Hölder 連続

§ 3

放物型方程式の正則性や, 基本解の性質を使えば, 解の正負が定まることがわかる.

Reference

[1] Friedman, A

Partial differential equations of parabolic type
Prentice Hall 1964)

[2] Mimura, M

On the Cauchy problem for simple degenerate
diffusion system

(Publ. R. I. M. S. vol 5 - No. 1)
1969. p112 p20