

非線型楕円型固有値問題における

正の解の Bifurcation について

東大 理 長崎 憲一

§0 序

本稿では、楕円型境界値問題に関する非線型固有値問題における Bifurcation の一例を示す。

D を滑らかな境界 ∂D をもつ $\mathbb{R}^N$ の有界領域とする。この時取扱う問題は

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} Lu(x) = \lambda f(x, u(x)) & x \in D \\ Bu(x) = g(x, u(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

の形で表わされる。ここで L は 2 階一樣楕円型作用素、 B は第 3 種境界作用素であり、常に $\varphi(x) \in C^1(\bar{D})$ に対して

$$\begin{cases} Lu(x) = \varphi(x) & x \in D \\ Bu(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases} \quad \text{の解作用素が positive operator}$$

となっている。

この時、非線型項が $f(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \bar{D}$, $g(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \partial D$ を満たすならば、 (P_λ) は任意の λ に対して、常に 0 を解にもつ

ことは明らかであるが、 $f(x, u)$, $g(x, u)$ が § 1 で述べる仮定を満足する時、 (P) の正の解の Bifurcation に関する次の定理が導ける。境界条件に非線型項を含まない問題に関しては、H. B. Keller [4], P. H. Rabinowitz [8] により、類似の結果が示されている。

定理 次の固有値問題 (E_0) の最小固有値を μ_0 とする。

$$(E_0) \begin{cases} L\varphi(x) = \lambda f_u(x, 0) \varphi(x) & x \in D \\ B\varphi(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

この時、 $0 < \lambda \leq \mu_0$ に対する (P) の非負解は 0 だけである。 $\mu_0 < \lambda$ に対する (P) の非負解は 0 と正の解 $u_\lambda(x)$ の 2 つだけである。更く、 $u_\lambda(x)$ は λ に関して $[\mu_0, \infty)$ において $C_2(\bar{D})$ ノルムで連続である。但し $u_{\mu_0}(x) \equiv 0$ とする。

§ 1 仮定

作用素 L , B

$$Lu(x) \equiv - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}) + a_0(x) u(x) \quad x \in D$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^{1+d}(\bar{D}), \quad a_0(x) \in C^d(\bar{D}) \quad (*)$$

任意の $\mathbb{R}^N$ の単位ベクトル $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a > 0 \quad x \in \bar{D} \quad \text{である。}$$

$$B u(x) \equiv \beta(x) u(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \equiv \beta(x) u(x) + \sum_{i,j=1}^N n_i(x) a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \quad x \in \partial D$$

$\beta(x) \in C^{1/2}(\partial D)$ であり, $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ は $x \in \partial D$ における単位外法線ベクトルである。

更に次の (I) 又は (II) が満たされている。

$$(I) \quad a_0(x) \geq 0 \quad x \in D \quad \text{かつ} \quad \beta(x) > 0 \quad x \in \partial D$$

$$(II) \quad a_0(x) > 0 \quad x \in D \quad \text{かつ} \quad \beta(x) \geq 0 \quad x \in \partial D$$

非線型項 $f(x, u), g(x, u)$

$$(f-1) \quad f(x, u), f_u(x, u) \in C^d(\bar{D} \times \mathbb{R}^+) \quad \text{但し } \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$$

$$(f-2) \quad f(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \bar{D}$$

$$(f-3) \quad f_u(x, 0) > 0 \quad x \in \bar{D} \quad \text{であり, } x \in \bar{D} \text{ を固定した時, } f_u(x, u) \text{ は } u \text{ に関して狭義単調減少である。}$$

$$(f-4) \quad \text{正数 } M \text{ が存在して, } u \geq M \quad \text{である時} \\ f(x, u) < 0 \quad x \in \bar{D} \quad \text{である。}$$

$$(g-1) \quad g(x, u) \in C^{1/2}(\partial D \times \mathbb{R}^+)$$

$$(g-2) \quad g(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \partial D$$

$$(g-3) \quad g_u(x, 0) \equiv 0 \quad x \in \partial D \quad \text{であり, } x \in \partial D \text{ を固定した時, } \frac{g(x, u)}{u} \text{ は } u \text{ に関して単調非増加である。}$$

後の計算の便宜上、次の関数を導入しておく。

$$q(x; u, v) = \int_0^1 f_u(x; \Delta u + (1-\Delta)v) d\Delta \quad (x, u, v) \in \bar{D} \times \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+$$

(f-1~4) により、 $q(x; u, v)$ は次の性質をもつ。

$$(q-1) \quad q(x; u, v) \in C^1(\bar{D} \times \bar{\mathbb{R}}^+ \times \bar{\mathbb{R}}^+)$$

$$(q-2) \quad f(x, u) - f(x, v) = q(x; u, v)(u - v)$$

$$q(x; u, v) = q(x; v, u)$$

$$(q-3) \quad u_1 \geq u_2 \geq 0, \quad v_1 \geq v_2 \geq 0 \quad \text{の時}$$

$$q(x; u_1, v_1) \leq q(x; u_2, v_2) \quad \text{であり、等号が成立す}$$

るのは $u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2$ の時に限る。

§2 主な補題

§3 の結論を証明する為に必要な3つの補題を示す。特に補題 2.2 は、最も基本的なものであり、その証明法は H. Amann [2] が "monotone method" と呼ぶものである。

定義 2.1

$\hat{u}(x), \bar{u}(x) \in C^2(\bar{D})$ が

$$\begin{cases} L\hat{u}(x) \geq \lambda f(x, \hat{u}(x)) & x \in D \\ B\hat{u}(x) \geq g(x, \hat{u}(x)) & x \in \partial D \end{cases} \quad \begin{cases} L\bar{u}(x) \leq \lambda f(x, \bar{u}(x)) & x \in D \\ B\bar{u}(x) \leq g(x, \bar{u}(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

を満たす時, $\hat{u}(x)$, $\bar{u}(x)$ をそれぞれ (P_λ) の upper solution, lower solution と呼ぶ。

$u(x) \in C^2(\bar{D})$ が (P_λ) の解であり、 $u(x) \geq 0 \quad x \in \bar{D}$ 又は $u(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ を満たす時、 $u(x)$ を (P_λ) の非負解、正の解と呼ぶ。

補題 2.2

$\hat{u}(x)$, $\bar{u}(x) \in C^2(\bar{D})$ がそれぞれ (P_λ) の upper, lower solution であり、更に $\hat{u}(x) \geq \bar{u}(x) \quad x \in \bar{D}$ である時、

$$\Omega + \lambda f_u(x, u) > 0 \quad x \in \bar{D}, u \in [\min_{\bar{D}} \bar{u}, \max_{\bar{D}} \hat{u}]$$

$$\omega + g_u(x, u) > 0 \quad x \in \partial D, u \in [\min_{\partial D} \bar{u}, \max_{\partial D} \hat{u}] \quad \text{を満たす}$$

$\Omega, \omega \geq 0$ を選び、次の Iteration を考える。

$$\begin{cases} L v_{n+1}(x) + \Omega v_{n+1}(x) = \lambda f(x, v_n(x)) + \Omega v_n(x) & x \in D \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} B v_{n+1}(x) + \omega v_{n+1}(x) = g(x, v_n(x)) + \omega v_n(x) & x \in \partial D \end{cases} \quad (2.2)$$

$v_0(x) = \hat{u}(x)$, $v_0(x) = \bar{u}(x)$ とおいて得られる関数列をそれぞれ $\{\hat{v}_n(x)\}$, $\{\bar{v}_n(x)\}$ とする。この時 $\{\hat{v}_n(x)\}_{n \geq 1}$, $\{\bar{v}_n(x)\}_{n \geq 1}$ は $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ に含まれ、 $\{\hat{v}_n(x)\}$ は単調減少列であり、 (P_λ) の解 $\hat{u}(x)$ に上から、又 $\{\bar{v}_n(x)\}$ は単調増加列であり、 (P_λ) の解 $\bar{u}(x)$ に下から収束する。これは $C^2(\bar{D})$ にあける収束でもある。

更に (P_λ) の解 $v(x) \in C^2(\bar{D})$ が $\bar{u}(x) \leq v(x) \leq \hat{u}(x) \quad x \in \bar{D}$ を満たすならば、

$$\bar{v}(\alpha) \leq v(\alpha) \leq \hat{v}(\alpha) \quad \alpha \in \bar{D} \quad \text{が成り立つ。}$$

(証明) $\{\hat{v}_n(\alpha)\}$ について証明する。 $\{\bar{v}_n(\alpha)\}$ についても同様。

$$(i) \quad \hat{v}(\alpha) \geq \hat{v}_n(\alpha) \geq \bar{v}(\alpha) \quad \alpha \in \bar{D}$$

$$(ii) \quad \hat{v}_n(\alpha) \geq \hat{v}_{n+1}(\alpha) \quad \alpha \in \bar{D}$$

(i), (ii) は最大値原理を用いて、帰納法で証明出来る。

$\{\hat{v}_n(\alpha)\}$ は下に有界な単調減少列であるから、ある関数 $\hat{v}(\alpha)$ に各点収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{v}_n(\alpha) = \hat{v}(\alpha) \quad \alpha \in \bar{D} \quad (2.3)$$

(iii) $\hat{v}(\alpha)$ は (P_1) の解であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{v}_n - \hat{v}\|_{C^2(\bar{D})} = 0$ である。

(g-1) より、 $\tilde{g}(\alpha, u) \in C^{\text{ad}}(\bar{D} \times \mathbb{R}^+)$ かつ $\tilde{g}(\alpha, u) = g(\alpha, u)$ ($\alpha, u \in \partial D \times \mathbb{R}^+$)

である $\tilde{g}(\alpha, u)$ を選べる。

(2.1) (2.2) に [1] の L_p 評価を適用すると

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{W_p^2(D)} \leq C (\|\lambda f(\cdot, \hat{v}_n) + \Omega \hat{v}_n\|_{L_p(D)} + \|g(\cdot, \hat{v}_n) + \omega \hat{v}_n\|_{W_p^{1-\frac{1}{q}}(\partial D)} + \|\hat{v}_{n+1}\|_{L_p(D)})$$

$$\leq C' (\|\lambda f(\cdot, \hat{v}_n) + \Omega \hat{v}_n\|_{L_p(D)} + \|\tilde{g}(\cdot, \hat{v}_n) + \omega \hat{v}_n\|_{W_p^1(D)} + \|\hat{v}_{n+1}\|_{L_p(D)})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{g}(\alpha, \hat{v}_n(\alpha)) = \tilde{g}_{x_j}(\alpha, \hat{v}_n(\alpha)) + \tilde{g}_u(\alpha, \hat{v}_n(\alpha)) \frac{\partial \hat{v}_n(\alpha)}{\partial x_j} \quad \text{より、(i) の結果}$$

を考慮合わせると

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{W_p^2(D)} \leq C'' + C'' \|\hat{v}_n\|_{W_p^1(D)} \quad (2.4)$$

[1] より、任意の $\varepsilon' > 0$ に対して、正数 $C(\varepsilon')$ が存在

$$\text{し } \|u\|_{W_p^1(D)} \leq C(\varepsilon') \|u\|_{L_p(D)} + \varepsilon' \|u\|_{W_p^2(D)} \quad u \in W_p^2(D)$$

が成り立つ。 $\varepsilon' C'' = \varepsilon < 1$ とし、これを (2.4) に適用すれば

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{W_p^2(D)} \leq C_0 + \varepsilon \|\hat{v}_n\|_{W_p^2(D)} \quad (2.5)$$

(2.5) より n によらない正数 M_0 をとり

$\|\hat{v}_n\|_{W_p^2(D)} \leq M_0$ と出来る。ここで $p > \frac{N}{1-\alpha}$ をみたす p をとっておけば、Sobolev の埋め込み定理より、次の様な n によらない正数 M_1 が存在する。

$$\|\hat{v}_n\|_{C^{2+\alpha}(\bar{D})} \leq M_1 \quad (2.6)$$

(2.1) (2.2) に [6] の Schauder 評価を行ない、(2.6) の結果を考え合わせると、次の様な n によらない正数 M_2 をと

$$\|\hat{v}_{n+1}\|_{C^{2+\alpha}(\bar{D})} \leq M_2 \quad (2.7)$$

(2.7) と Ascoli-Arzelà の定理から、 $\{\hat{v}_{n+1}\}$ の任意の部分列は $C^2(\bar{D})$ で収束する部分列をもつが、この事実と (2.3) の結果を合わせると $\{v_n(x)\}$ 自身が $C^2(\bar{D})$ で $\hat{v}(x)$ に収束する。 $\hat{v}(x) \in C^2(\bar{D})$ であり、(P.) の解であることも明らかである。

補題の最後の部分は、 $\bar{v}_n(x) \leq v(x) \leq \hat{v}_n(x) \quad x \in \bar{D}$ を帰納的に示し、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\bar{v}(x) \leq v(x) \leq \hat{v}(x) \quad x \in \bar{D} \quad \text{は示される。 (証3)}$$

注意 2.3

[1] の Theorem 12.1 (Compactness theorem) によれば、上で求めた解 $\hat{v}(x)$ 、 $\bar{v}(x)$ は $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ に属する。

補題 2.4

$\delta \geq 0$ の時, 次の固有値問題

$$(E_\delta) \begin{cases} Lu(x) = \lambda f_u(x, 0) u(x) & x \in D \\ (B + \delta) u(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

の最小固有値 μ_δ は単純固有値であり, 対応する固有関数として $\varphi_\delta(x) > 0$ $x \in \bar{D}$, $\|\varphi_\delta\|_{C^1(\bar{D})} = 1$ なる $\varphi_\delta(x)$ をとれる。

更に $\lim_{\delta \downarrow 0} \mu_\delta = \mu_0$ である。

$$(\text{証明}) \quad \varphi \in C^1(\bar{D}) \text{ に対する } \begin{cases} Lu(x) = f_u(x, 0) \varphi(x) & x \in D \\ (B + \delta) u(x) = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

の解作用素を K_δ とすれば, $C^1(\bar{D})$ 上の compact operator である。

かつ [5] の意味での u_0 -positive operator である。よって

[5] §2 の結果を適用すれば, 補題の前半は容易に示される。

更に K_δ が K_0 に一様収束することを利用して

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mu_\delta = \mu_0 \text{ は証明される。} \quad (\text{証 3})$$

補題 2.5 (一般最大値原理 [7] Chapter 2 Theorem 10)

$h(x) \in C(\bar{D})$, $w(x), u(x) \in C^2(\bar{D})$ が

$$(L + h)[w(x)] \geq 0 \quad x \in D \quad \text{かつ} \quad w(x) > 0 \quad x \in \bar{D},$$

$$(L + h)[u(x)] \leq 0 \quad x \in D \quad \text{を満たしている時, } \frac{u(x)}{w(x)} \text{ は } D$$

で定数でない限り, D において非負最大値をとり得ない。

又, $\frac{u(x)}{w(x)}$ が境界 ∂D 上の点 P において非負最大値をとれば,

$\frac{u(x)}{w(x)}$ が定数でない限り、点 P における $\frac{u(x)}{w(x)}$ の外方向微分の値は正である。

§ 3 正の解の存在と非存在

補題 3.1

$\lambda > 0$ の時、 $v(x) \in C^2(\bar{D})$ が (P_λ) の非負解ならば、

$$0 \leq v(x) \leq M \quad x \in \bar{D} \quad \text{が成り立つ。}$$

但し M は §1 (f-4) に現われるものである。

定理 3.2

$0 < \lambda \leq \mu_0$ の時、 (P_λ) の非負解は 0 だけである。

(証明) 0 以外の非負解が存在したと仮定すれば、

$$L v(x) - \lambda f(x, v(x)) = L v(x) - \lambda q(x; v(x), 0) v(x) = 0 \quad x \in D \quad (3.1)$$

ここで (E_0) の固有函数 $\varphi_0(x)$ を考えると、

$$\begin{aligned} L \varphi_0(x) - \lambda q(x; v(x), 0) \varphi_0(x) &= \mu_0 q(x; 0, 0) \varphi_0(x) - \lambda q(x; v(x), 0) \varphi_0(x) \\ &= \{(\mu_0 - \lambda) q(x; 0, 0) + \lambda(q(x; 0, 0) - q(x; v(x), 0))\} \varphi_0(x) \geq 0 \quad x \in D \quad (3.2) \end{aligned}$$

$q(x; 0, 0) = f_u(x, 0)$ に注意し、(q-3) (f-3) 補題 2.4 を用いれば (3.2) が得られる。

$-\lambda q(x; v(x), 0)$ を補題 2.5 の $h(x)$ と考えれば、(3.1) (3.2) より $\frac{v(x)}{\varphi_0(x)}$ は D で定数か、又は ∂D 上でしか最大値をとる

得ない。まず $v(x) = \alpha \varphi_0(x)$ (α は正の定数) とすれば、
 $x \in \{x \in D \mid v(x) > 0\} \neq \emptyset$ に対しては、(3.2) を α 倍することにより $\lfloor v(x) - \lambda q(x, v(x), 0) \rfloor v(x) > 0$ が導かれるが、これは (3.4) と矛盾する。よって、 $\frac{v(x)}{\varphi_0(x)}$ は境界上の点 $x = x_0$ で正の最大値をとると仮定出来る。補題 2.5 によれば、 $\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{v(x)}{\varphi_0(x)} \right) \Big|_{x=x_0} > 0$ となるはずであるが、これに $B\varphi_0(x_0) = 0$, $Bv(x_0) = g(x_0, v(x_0))$ を代入、計算すれば、
 $g(x_0, v(x_0)) > 0$ を得るが、これは (g-3) に矛盾する。
 結局、 $0 < \lambda \leq \mu_0$ の時 0 以外の非負解は存在しない。

(証了)

定理 3.3

$\mu_0 < \lambda$ の時、 (P_λ) の正の解 $v_\lambda(x)$ が存在し、 (P_λ) の非負解は 0 と $v_\lambda(x)$ 以外には存在しない。

(証明) (P_λ) の正の解の存在を示す為には、補題 2.2 を用いれば、 (P_λ) の lower solution $\bar{u}_\lambda(x)$, upper solution $\hat{u}_\lambda(x)$ の中で $0 < \bar{u}_\lambda(x) \leq \hat{u}_\lambda(x)$ $x \in \bar{D}$ を満たす pair を見つければ十分である。 $\hat{u}_\lambda(x) \equiv M$ ととれることは (f-4), (g-3) によってもわかる。 (E_δ) の固有関数を用いて、 $\bar{u}_\lambda(x) \equiv \varepsilon \varphi_\delta(x)$ の形で求めることを考える。

$\mu_0 < \lambda$ の時には、補題 2.4 によっても、適当な正数 δ をとり $\mu_\delta < \lambda$ と出来る。この時、

$$L\bar{u}_\lambda(x) - \lambda f(x, \bar{u}_\lambda(x)) = \mu_\delta f_u(x, 0) \varepsilon \varphi_\delta(x) - \lambda f(x, \varepsilon \varphi_\delta(x))$$

$$= \{(\mu_\delta - \lambda) q(x; \varepsilon \varphi_\delta(x), 0) + \mu_\delta (q(x; 0, 0) - q(x; \varepsilon \varphi_\delta(x), 0))\} \varepsilon \varphi_\delta(x) \quad x \in D$$

上の式の $\{ \}$ の内部は $\varepsilon \downarrow 0$ の時 $(\mu_\delta - \lambda) f_u(x, 0)$ に一様収束するので、正数 ε_1 を次の様に選べる。 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ である任意の ε に対し、 $\bar{u}_\lambda(x) \equiv \varepsilon \varphi_\delta(x)$ は

$$L\bar{u}_\lambda(x) - \lambda f(x, \bar{u}_\lambda(x)) \leq 0 \quad x \in D \quad (3.3)$$

をみたす。

$$B\bar{u}_\lambda(x) - g(x, \bar{u}_\lambda(x)) = -\delta \bar{u}_\lambda(x) - g(x, \bar{u}_\lambda(x)) = \left(-\delta - \frac{g(x, \varepsilon \varphi_\delta(x))}{\varepsilon \varphi_\delta(x)}\right) \varepsilon \varphi_\delta(x) \quad x \in \partial D$$

(g-3) より、正数 ε_2 が存在して $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ ならば

$$-\delta - \frac{g(x, \varepsilon \varphi_\delta(x))}{\varepsilon \varphi_\delta(x)} \leq 0 \quad x \in \partial D \quad \text{である。故に } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \text{ の時}$$

$$B\bar{u}_\lambda(x) - g(x, \bar{u}_\lambda(x)) \leq 0 \quad x \in \partial D \quad (3.4)$$

次に正数 ε_3 を、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ ならば次の式が成り立つ様に選ぶ。
$$0 < \varepsilon \varphi_\delta(x) \leq M \quad x \in \bar{D} \quad (3.5)$$

$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ とおけば、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ の時 $\bar{u}_\lambda(x) \equiv \varepsilon \varphi_\delta(x)$,

$\hat{u}_\lambda(x) \equiv M$ が求めたい解 pair となるので、補題 2.2 より

得られる解を $\bar{v}_\lambda(x)$, $\hat{v}_\lambda(x)$ は

$$0 < \bar{u}_\lambda(x) \leq \bar{v}_\lambda(x) \leq \hat{v}_\lambda(x) \leq \hat{u}_\lambda(x) \equiv M \quad x \in \bar{D} \quad \text{をみたす。}$$

次に $\bar{v}_\lambda(x) \equiv \hat{v}_\lambda(x) \quad x \in \bar{D}$ であることを示す。

$$L\hat{v}_\lambda(x) - \lambda f(x, \hat{v}_\lambda(x)) = 0 \quad x \in D$$

$$L\bar{v}_\lambda(x) - \lambda f(x, \bar{v}_\lambda(x)) = 0 \quad x \in D$$

上の2式の差をとり、 $w_\lambda(x) = \hat{v}_\lambda(x) - \bar{v}_\lambda(x)$ とおけば、

$$L w_\lambda(x) - \lambda q(x; \hat{v}_\lambda(x), \bar{v}_\lambda(x)) w_\lambda(x) = 0 \quad x \in D \quad (3.6)$$

一方, $\hat{v}_\lambda(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ であり, かつ

$$\begin{aligned} L \hat{v}_\lambda(x) - \lambda q(x; \hat{v}_\lambda(x), \bar{v}_\lambda(x)) \hat{v}_\lambda(x) \\ = \lambda (q(x; \hat{v}_\lambda(x), 0) - q(x; \hat{v}_\lambda(x), \bar{v}_\lambda(x))) \hat{v}_\lambda(x) > 0 \quad x \in D \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.6) (3.7) より, $\frac{w_\lambda(x)}{\hat{v}_\lambda(x)}$ に補題 2.5 が適用出来て, 定理

3.2 の証明と同じ手順で $\frac{w_\lambda(x)}{\hat{v}_\lambda(x)} \equiv 0$ つまり $\bar{v}_\lambda(x) \equiv \hat{v}_\lambda(x)$

が示せる。この解を $v_\lambda(x)$ と表わす。

最後に (P_λ) の非負解は 0 と $v_\lambda(x)$ だけであることを示す。

$v(x) \in C(\bar{D})$ を (P_λ) の非負解とする。 $v(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ であ

るならば, 存在を示す証明の lower solution $\varepsilon \varphi_\delta(x)$ の ε を

十分小さく定め, $\varepsilon \varphi_\delta(x) \leq v(x) \quad x \in \bar{D}$ と出来る。一方

補題 3.1 より $v(x) \leq M \quad x \in \bar{D}$ であるから, 結局

$\bar{v}_\lambda(x) \leq v(x) \leq \hat{v}_\lambda(x) \quad x \in D$ となり, 補題 2.2 の後半

より $v(x) \equiv v_\lambda(x)$ が導かれる。ある $x_0 \in \bar{D}$ に対して

$v(x_0) = 0$ と仮定すれば, $0 \leq v(x) \leq M \quad x \in \bar{D}$ より

$0 \leq v(x) \leq v_\lambda(x) \quad x \in \bar{D}$ に注意して, 次の式を得る。

$$\begin{aligned} L v(x) - \lambda q(x; v_\lambda(x), 0) v(x) \\ = \lambda (q(x; v(x), 0) - q(x; v_\lambda(x), 0)) v(x) \geq 0 \quad x \in D \end{aligned} \quad (3.8)$$

一方 $v_\lambda(x) > 0 \quad x \in \bar{D}$ かつ

$$L v_\lambda(x) - \lambda q(x; v_\lambda(x), 0) v_\lambda(x) = 0 \quad x \in D \quad (3.9)$$

であるので, $-\frac{v(x)}{v_\lambda(x)}$ に補題 2.5 が適用出来る。 $-\frac{v(x)}{v_\lambda(x)}$ が

$\bar{D}$ で最大値 0 をとることと合わせると、 $v(x) \equiv 0$ は容易に導ける。 (証 3)

定理 3.4

定理 3.3 で得た (P_λ) の正の解 $v_\lambda(x)$ は $[\mu_0, \infty)$ において、 λ に関して $C^2(\bar{D})$ ノルムで連続である。但し $v_{\mu_0}(x) \equiv 0$ と定める。

(証明) もし $\lambda = \lambda_0 > \mu_0$ において連続でないと仮定すれば、次の様な正数 η と $\{\lambda_k\}$ をとれる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_0, \quad \|v_{\lambda_k} - v_{\lambda_0}\|_{C^2(\bar{D})} > \eta \quad (3.10)$$

λ_k は λ_0 に十分近いと考えて良いから、定理 3.3 の存在証明における lower solution として k に対し一様 $\varepsilon_0 \varphi_0(x)$ をとり得る。つまり $0 < \varepsilon_0 \varphi_0(x) \leq v_{\lambda_k}(x) \quad x \in \bar{D}$ (3.11) と仮定出来る。

補題 2.2 証明 (iii) と全く同様に $\{\|v_{\lambda_k}\|_{C^2(\bar{D})}\}$ が一様有界であることが導かれ、Ascoli-Arzelà の定理により $\{v_{\lambda_k}(x)\}$ の部分列 $\{v_{\lambda_{k'}}(x)\}$ が $C^2(\bar{D})$ で収束するものがとれる。その極限を $\tilde{v}(x) \in C^2(\bar{D})$ とおけば、 $\lim_{k' \rightarrow \infty} \|v_{\lambda_{k'}} - \tilde{v}\|_{C^2(\bar{D})} = 0$ (3.12)

である。よって

$$(P_{\lambda_{k'}}) \begin{cases} L v_{\lambda_{k'}}(x) = \lambda_{k'} f(x, v_{\lambda_{k'}}(x)) & x \in D \\ B v_{\lambda_{k'}}(x) = g(x, v_{\lambda_{k'}}(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

において、 $k' \rightarrow \infty$ とすることにより、 $\tilde{v}(x)$ は (P_{λ_0}) の解で

あること、更に (3.11) (3.12) より (P_{λ_0}) の正の解であることが示される。正の解の一意性より $\hat{v}(x) \equiv v_{\lambda_0}(x)$ である。故に (3.10) と (3.12) は矛盾する。結局 $v_{\lambda}(x)$ は $\lambda > \mu_0$ で連続である。又、 $\lambda = \mu_0$ での非負解が 0 だけであることを考慮すれば $\lim_{\lambda \downarrow \mu_0} \|v_{\lambda}\|_{C^2(\bar{D})} = 0$ も同様に示せる。(証了)

注意 3.5

(P_{λ}) の代りに非線型固有値問題

$$(P_{\lambda}) \quad \begin{cases} Lu(x) = \lambda f(x, u(x)) & x \in D \\ Bu(x) = \lambda g(x, u(x)) & x \in \partial D \end{cases}$$

を考えても、今まで得たすべての結果が成り立つことは容易に確かめられる。

参考文献

- [1] S. Agmon, A. Douglis, & L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Comm. Pure. Appl. Math. 12 (1959) 623-727
- [2] H. Amann: On the existence of positive solutions of non-linear elliptic boundary value problems Indiana Univ. Math. J. 21 (1971) 125-146
- [3] H.B. Keller & D.S. Cohen: Some positive problems suggested by nonlinear heat generation J. Math. Mech. 16 (1967) 1361-1376

- [4] H.B. Keller : Positive solutions of some nonlinear eigenvalue problems J. Math. Mech. 19 (1969) 279 - 295
- [5] M. A. Krasnosel'skii : Positive solutions of operator equations Groningen : Noordhoff 1964
- [6] O. A. Ladyzhenskaya & N. N. Ural'tseva : Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press, New York 1968
- [7] M. H. Protter & H. F. Weinberger : Maximum principles in partial differential equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1967
- [8] P. H. Rabinowitz : A note on a nonlinear eigenvalue problem for a class of differential equations J. Differential Equations 9 (1971) 536 - 548