

極限公式に現れる特殊函数と相互法則について II

吉田敬之 (京都大学)

HiroYuki Yoshida (Kyoto University)

この論考は数理解析研究所講究録 1091(1999 年) に書いた論文の続編である。その後著書 Absolute CM-periods, AMS 2003 を出版してこの論文の内容も完全に著書に含まれているが、敢えて書いておかなかった問題がある。この問題をはっきり述べるのがこの論考の目的である。

§0. Motivation

F は n 次の総実代数体, K は F の総虚 2 次拡大体とする。 χ は K に対応する F の Hecke 指標とする。

Conjecture (Colmez, Yoshida).

$$\exp\left(\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right) \sim \pi^n \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\text{id}, \text{id}) \sim \pi^n \left(\prod_{\Phi} p_K(\Phi, \Phi)\right)^{1/2^{n-1}}.$$

ここに $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $a \sim b$ は $b \neq 0, a/b \in \overline{\mathbb{Q}}$ を表す。 J_K は K から $\mathbb{C}$ の中への同型全体の集合を表す。 p_K は志村の周期記号である。 また Φ は K の全ての CM-type の上を走る。 この予想については [Y2], p. 184, p. 133 を参照されたい。 またより一般的な予想の特別の場合であることを注意しておく。

$n = 1, F = \mathbb{Q}$ のときは予想は

$$\exp\left(\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right) = \frac{1}{d} \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{w\chi(a)/2h} \sim \pi p_K(\text{id}, \text{id})^2$$

を与える。 これは Chowla-Selberg formula としてよく知られている関係である。 ここに虚 2 次体 K の判別式を $-d$ とし, h は K の類数, w は K に含まれる 1 の冪根の数である。

以下では Conjecture を証明する手段について考える。

§1. A limit formula

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$T(u) = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad N(u) = u_1 u_2 \dots u_n$$

とおく。 $\mathcal{O}_F$ により F の整数環を表し, $E_F = \mathcal{O}_F^\times$ は F の単数群とする。 F の regulator を R_F , different を $\mathfrak{d}_F$, 判別式を D_F で表す。

$$V = \mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F \setminus \{(0, 0)\}$$

とおく. 複素上半平面を $\mathfrak{H}$, 正の実数全体の集合を $\mathbf{R}_+$ と書く. Eisenstein 級数を

$$E(z, s) = \sum_{(c,d) \in V/E_F} \frac{N(y)^s}{N(|cz + d|)^{2s}}$$

によって定義する. ここに $s \in \mathbf{C}$, $z \in \mathfrak{H}$, $y = \text{Im}(z) \in \mathbf{R}_+$ である. $E(z, s)$ は全 s 平面に有理型に解析接続され, $s = 1$ での simple pole を除いて正則である. 以下簡単のため F の類数は 1 であると仮定する. このとき極限公式は¹

$$(1) \quad E(z, s) = -2^{n-2} R_F s^{n-1} \left[1 + (2n\gamma + 2n \log 2\pi - 2 \log D_F - \frac{D_F^{1/2} \gamma_F}{2^{n-2} R_F} - h(z) + \log N(y)) s \right] + O(s^{n+1}), \quad s \rightarrow 0,$$

$$(2) \quad h(z) = \frac{D_F}{2^{n-2} \pi^n R_F} \left[\zeta_F(2) N(y) + \pi^n D_F^{-3/2} \sum_{0 \neq b \in \mathfrak{o}_F^{-1}} |N(b)|^{-1} \sigma_1(bd) \exp(2\pi i(T(bx) + T(|by|))) \right]$$

で与えられる. ここに記号の意味は次の通りである. γ は Euler 定数, $\zeta_F(s)$ は F の Dedekind ゼータ函数を表し, Euler 定数の一般化 γ_F を

$$\zeta_F(s) = \frac{2^{n-1} D_F^{-1/2} R_F}{s-1} + \gamma_F + O(s-1), \quad s \rightarrow 1$$

で定義する. $N(b)$ は b のノルムである. d は F の differential idele を表し,

$$\sigma_1(bd) = \prod_{\mathfrak{p} | (b)\mathfrak{d}_F} (1 + N(\mathfrak{p}) + \cdots + N(\mathfrak{p})^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}((b)\mathfrak{d}_F)})$$

は divisor function である. また $x = \text{Re}(z) \in \mathbf{R}^n$ である.

$h(z)$ は調和函数であり, $h(z) - \log N(y)$ は変換 $z \rightarrow \gamma z$, $\gamma \in GL^+(2, \mathcal{O}_F)$ で不変である保型性を持ち, さらに Hecke 作用素の共通固有関数である. ここに²

$$GL^+(2, \mathcal{O}_F) = \{\gamma \in GL(2, \mathcal{O}_F) \mid \det \gamma \gg 0\}.$$

¹極限公式は伝統的には $E(z, s)$ の $s = 1$ での振る舞いを記述するが, $s = 0$ での振る舞いについて書いておいたほうが都合が良いことが多い. [Y2], Chapter V を参照されたい.

² $a \in F$ が総正であることを $a \gg 0$ で表す.

$n = 1, F = \mathbf{Q}$ の場合には

$$h(z) = -\log |\eta(z)|^4,$$

$$E(z, s) = -\frac{1}{2}[1 + (2 \log 2\pi + \log |\eta(z)|^4 + \log y)s] + O(s^2), \quad s \rightarrow 0$$

となる. ここに

$$\eta(z) = e^{2\pi iz/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})$$

は Dedekind の eta 函数である.

S により集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ から $\{1, -1\}$ への写像全体の集合を表す. $\delta \in S$ とする. $\delta'(i) = (1 - \delta(i))/2$ とおく. $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して

$$C_\delta(z) = (\dots, \delta(i)\rho^{\delta'}(z_i), \dots) \in \mathfrak{H}^n$$

とおく. ここに ρ は複素共役写像を表す. $C_\delta(z)$ の第 i 成分は $\delta(i) = 1$ のとき z_i , $\delta(i) = -1$ のとき $-\bar{z}_i$ である.

$$(3) \quad \sum_{\delta \in S} N(C_\delta(z)) = (2i)^n N(y)$$

が成り立つ.

$$(4) \quad H_\delta(z) = \frac{D_F}{2^{n-2}\pi^n R_F} \left[\frac{1}{(2i)^n} \zeta_F(2) N(C_\delta(z)) \right. \\ \left. + \pi^n D_F^{-3/2} \sum_{b \in \mathfrak{o}_F^{-1}, \text{sgn}(b)=\delta} \frac{\sigma_1(bd)}{|N(b)|} \exp(2\pi i(T(bx) + T(|by|))) \right]$$

とおく. ここに $\text{sgn}(b) = \delta$ の意味は明らかであろうが一応説明しておく. F から $\mathbf{R}$ の中への同型全体の集合を $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ とする. $\text{sgn}(b) = \delta$ は b^{σ_i} の符号が $\delta(i)$ の符号と一致していることを表す. (2) の右辺の第 2 項の和を b の符号に応じて分割したことになるから, (3) を用いて

$$(5) \quad h(z) = \sum_{\delta \in S} H_\delta(z)$$

を得る. $\delta_1 \in S$ を $\delta_1(i) = 1, 1 \leq i \leq n$ ととる. このとき

$$H(z) = H_{\delta_1}(z)$$

とおく. $H(z)$ は z の正則函数である.

Example 1. $F = \mathbb{Q}$ のとき

$$H(z) = -2 \log \eta(z), \quad h(z) = H(z) + \overline{H(z)}$$

である.

Example 2. $[F : \mathbb{Q}] = 2$ とする. このとき $H(z)$ は Hecke が Werke No. 20, §5 で考察した函数である. ϵ を F の基本単数とする. $N(\epsilon) = -1$ ならば

$$h(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) + \overline{H(z_1, z_2)} + H(\epsilon z_1, \epsilon' \bar{z}_2) + \overline{H(\epsilon z_1, \epsilon' \bar{z}_2)}$$

が成り立つ. ここに $\epsilon' = -1/\epsilon$ は ϵ の共役である.

§2. Arithmetic

函数 $h(z)$, $H(z)$ の CM-point における値について考察する.

Theorem. K は F の総虚 2 次拡大体とする. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_{h_K}$ を K のイデアル類を代表する分数イデアルとする.

$$\mathfrak{A}_i = \omega_{i,1} \mathcal{O}_F \oplus \omega_{i,2} \mathcal{O}_F, \quad w_i = \omega_{i,1} / \omega_{i,2}$$

とおく. K の CM-type Φ_i を

$$\operatorname{Im}(w_i^\sigma) > 0, \quad \forall \sigma \in \Phi_i$$

ととる. このとき $(w_i^\sigma)_{\sigma \in \Phi_i}$ は $\mathfrak{h}^n$ の点を定めるが, 簡単のためこの点を w_i と書く. このとき

$$\begin{aligned} \frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)} &= n\gamma + n \log 4\pi - \frac{1}{2} \log |D_K| - \frac{D_F^{1/2} \gamma_F}{2^{n-1} R_F} \\ &\quad - \frac{1}{h_K} \sum_{i=1}^{h_K} (h(w_i) - \log(N(\operatorname{Im}(w_i)))) \end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで F の類数は 1 と仮定して公式を書いたが, 一般の場合の証明は, [Y2], Chapter V, Theorem 2.5 を参照されたい.

この定理により, §0 の Conjecture は

$$(6_c) \quad \exp\left(-\frac{1}{h_K} \sum_{i=1}^{h_K} h(w_i)\right) \sim \exp\left(\frac{D_F^{1/2} \gamma_F}{2^{n-1} R_F} - n\gamma\right) \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \sigma),$$

或いは

$$(7_c) \quad \exp\left(-\frac{2^{n-1}}{h_K} \sum_{i=1}^{h_K} h(w_i)\right) \sim \exp\left(\frac{D_F^{1/2} \gamma_F}{R_F} - 2^{n-1} n\gamma\right) \prod_{\Phi} p_K(\Phi, \Phi)$$

と書ける. ここに式番号に subscript c を付けたのは予想式であることを意味する.

$F = \mathbf{Q}$ としよう. $p_K(\rho, \rho) \sim p_K(\text{id}, \text{id})$ により, (6_c) は

$$(8) \quad \left(\prod_{i=1}^{h_K} |\eta(w_i)|^4 \right)^{1/h_K} \sim p_K(\text{id}, \text{id})^2$$

と同値となる. 周知の関係

$$\eta(w_i)^2 \sim \eta(-\bar{w}_i)^2 \sim p_K(\text{id}, \text{id}), \quad \overline{\eta(w_i)} = \eta(-\bar{w}_i)$$

により (8) が従い, Chowla-Selberg formula が証明できた.

さて (7_c) の右辺と (5) を比べよう. ともに分解された形をしているが, 両者の間には自然な対応関係がある. 最も楽観的な形で予想を定式化してみよう.

Hope. K の CM-type Φ をとる. $\Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, $\sigma_i \in J_K$ とおく. $\delta \in S$ に対して CM-type を $\Phi(\delta) = \{\dots, \sigma_i \rho^{\delta'(i)}, \dots\}$ で定める. Theorem におけると同様に w_i から CM-type Φ_i を定め, $\Phi_i = \Phi(\delta_i)$, $\delta_i \in S$ と書く. このとき

$$\exp\left(-\frac{2^{n-1}}{h_K} \sum_{i=1}^{h_K} H_{\delta_i}(w_i)\right) \sim \exp\left(\frac{D_F^{1/2} \gamma_F}{2^n R_F} - \frac{n\gamma}{2}\right) p_K(\Phi, \Phi).$$

Conjecture とするには根拠が充分ではないので Hope としてある.

$H(z)$ と Eisenstein 級数との直接的関係を与えよう.

$$E_2(z, s) = \sum_{(c, d) \in V/E_F} N(cz + d)^{-2} N(|cz + d|)^{-s}, \quad z \in \mathfrak{H}^n, \quad s \in \mathbb{C}$$

とおく. $E(z, s)$ は全 s 平面正則に解析接続される.

$$E_2(z) = E_2(z, 0)$$

とおく. $n \geq 2$ ならば $E_2(z)$ は $GL^+(2, \mathcal{O}_F)$ についての weight $(2, 2, \dots, 2)$ の正則保型形式でその Fourier 展開は

$$(9) \quad E_2(z) = \zeta_F(2) + (2\pi i)^n D_F^{-3/2} \sum_{0 \ll b \in \mathfrak{o}_F^{-1}} \sigma_1(bd) \exp(2\pi i T(bz))$$

で与えられる. (4) と (9) を比べれば関係

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial z_1} H(z) = \frac{D_F}{2^{n-2} (2\pi i)^n R_F} E_2(z)$$

が得られる. (10) は $n = 2$ の場合に Hecke が Werke, p. 398 で注意している.
 $n = 1$ の場合には

$$E_2(z) = \zeta(2) + (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n z} - \frac{\pi}{2y}$$

と非正則項 $-\pi/2y$ が加わる. この場合は (10) に対応する関係は

$$\frac{\partial}{\partial z} H(z) = \frac{1}{\pi i} E_2(z) - \frac{i}{2y}$$

である.

§3. Periods and cohomology

§2 の Hope についてはこれ以上考察を進めることができない. しかし関係 (10) は示唆的である. 類似の関係を用いて Eichler-志村型の周期積分から保型形式に付随した cohomology 類を直接構成できる. [Y2], Chapter V, §5 に書いておいたが, このアイデアはそれまで注意されたことがないと思うので, 簡単な場合について説明しよう.

$[F : \mathbb{Q}] = 2$ とし, Γ は $SL(2, \mathcal{O}_F)$ の合同部分群とする. F から $\mathbb{R}$ の中への同型を $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ とし, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して $\gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} a^{\sigma_i} & b^{\sigma_i} \\ c^{\sigma_i} & d^{\sigma_i} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$ とおく.

Γ についての weight $(2, 2)$ の保型形式 h をとる. 微分形式 $\mathfrak{d}(h) = h(z) dz_1 dz_2$ を考える. 基点 $(w_1, w_2) \in \mathfrak{H}^2$ をとって

$$H(z) = \int_{w_1}^{z_1} \int_{w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(h), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{H}^2$$

とおく. $H(z)$ は $\mathfrak{H}^2$ 上の正則関数であり

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} H(z) = h(z)$$

を満たす. $\mathfrak{H}^2$ 上の正則関数全体がなすベクトル空間を $\mathcal{H}$ とし,

$$(\gamma\varphi)(z) = \varphi(\gamma^{-1}z), \quad \varphi \in \mathcal{H}, \quad \gamma \in \Gamma$$

によって, $\mathcal{H}$ を left Γ -module にする. h の保型性により, $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$(\gamma H)(z) = H(\gamma^{-1}(z)) = \int_{w_1}^{(\gamma^{(1)})^{-1}z_1} \int_{w_2}^{(\gamma^{(2)})^{-1}z_2} \mathfrak{d}(h) = \int_{\gamma^{(1)}w_1}^{z_1} \int_{\gamma^{(2)}w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(h)$$

であるから

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} (\gamma H - H) = 0$$

を得る. 故に

$$(12) \quad (\gamma H - H)(z_1, z_2) = f(\gamma; z_1) + g(\gamma, z_2)$$

と分解される. ここに $f(\gamma; z_1)$ は z_1 にのみ依存する正則函数, $g(\gamma; z_2)$ は z_2 にのみ依存する正則函数である. $f(\gamma; z_1), g(\gamma; z_2)$ を $\mathcal{H}$ に値をもつ Γ の 1-chain とみる. d により Γ の n -chain から $n+1$ -chain を作る coboundary 作用素を表す. (12) から明らかに

$$(13) \quad df(\gamma_1, \gamma_2; z_1) + dg(\gamma_1, \gamma_2; z_2) = 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$$

である. $df(\gamma_1, \gamma_2; z_1)$ は z_1 のみの函数, $dg(\gamma_1, \gamma_2; z_2)$ は z_2 のみの函数であるから, (13) により

$$(14) \quad df(\gamma_1, \gamma_2; z_1) = \text{constant} \in \mathbb{C}$$

が結論される. $df(\gamma_1, \gamma_2; z_1)$ は Γ の $\mathbb{C}$ に値をもつ 2-chain であるが, 作り方から明らかにこれは 2-cocycle である. この cohomology 類を $c(h) \in H^2(\Gamma, \mathbb{C})$ と書く. このように自然な方法で保型形式から cohomology 類を構成できる. $c(h)$ は基点の取り方によらず, また分解 (12) のとり方にもよらないことが証明できる. $c(h)$ を代表する 2-cocycle $\tilde{c}(h)$ を具体的に書けば

$$(15) \quad \tilde{c}(h)(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{(\gamma_1 \gamma_2)^{(1)} w_1}^{\gamma_1^{(1)} w_1} \int_{w_2}^{\gamma_1^{(2)} w_2} \mathfrak{d}(h), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$$

である.

文献

- [S] G. Shimura, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton Mathematical Series 46, Princeton University Press, 1998.
- [Y1] 吉田敬之, 極限公式に現れる特殊函数と相互法則について, 数理解析研究所講究録 1091 (1999), 45–53.
- [Y2] H. Yoshida, Absolute CM-periods, Mathematical Surveys and Monographs 106, American Mathematical Society, 2003.