

双複素数による平均曲率零部分多様体の表現について

大阪市立大学・数学研究所 橋本 要

Kaname Hashimoto

Osaka City University Advanced Mathematical Institute

1 はじめに

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間を $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$ であらわす. $\mathbb{R}^{2,1}$ 内において誘導計量がリーマン計量およびローレンツ計量を与える曲面をそれぞれ空間的曲面および時間的曲面という. さらに, 空間的曲面, 時間的曲面それぞれにおいて平均曲率が恒等的に消えているとき, 空間的極大曲面および時間的極小曲面といい, $\mathbb{R}^{2,1}$ 内において, このような曲面は平均曲率零曲面と呼ばれている. $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面と類似の性質が成り立つことが知られているが, 顕著に異なる性質の1つとして特異点の存在がある. 平均曲率曲面に現れる特異点の1つに折り目特異点がある. 曲面が局所的に実解析的写像 $F: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^{N_+, N_-}$ で $F(x, y) = F(x, -y)$ を満たすものであらわされるときに折り目特異点をもつ曲面という. すなわち, $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の折り目特異点とは, 特異点集合をなす曲線の両翼が完全に重なってしまっている状態のものを指す. 2枚重ねであることから, 反正則対合に関する同変性によって表すことができる. 近年, 折り目特異点の null 曲線や光的直線を介しての平均曲率零曲面の型変化について盛んに研究が進められている ([13], [12], [7], [3], [4], [5], [6], [9], [20], [1], etc.). 本稿では加藤信氏 (大阪市立大学) との共同研究 [8] の内容に基づき平均曲率零曲面の型変化についての, 双複素拡張を利用した考察について述べる.

平均曲率零曲面を調べる上で強力な重要な道具の1つとして, Weierstrass 型の表現公式 [13], [19] が知られている.

空間的極大曲面

$$X(z) = \operatorname{Re} \int^z (1 + g^2, i(1 - g^2), -2g)\eta, \quad ds^2 = (1 - |g|^2)^2 |\eta|^2$$

時間的極小曲面

$$\check{X}(\check{z}) = \operatorname{Re} \int^{\check{z}} (2\check{g}, j(1 - \check{g}^2), -(1 + \check{g}^2))\check{\eta}, \quad ds^2 = (1 - |\check{g}|^2)^2 |\check{\eta}|^2$$

$\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的極大曲面に関しては第1基本形式が $ds^2 = (1 - |g|^2)^2 |\eta|^2$ で表されるので特異点集合は $\{z \in M \mid |g(z)|_{\mathbb{C}} = 1\}$ である. 一方, 時間的極小曲面に関しては $j^2 = 1$ を満

たすパラ複素数 $\tilde{z} = x + jy$ を用いて表される. したがって, g は正則関数で η は正則 1 次形式であり, $\check{g}$ はパラ正則関数で $\check{\eta}$ はパラ正則 1 次形式である. この場合, 第 1 基本形式が $ds^2 = (1 - |\check{g}|^2)|\check{\eta}|^2$ で表されるので特異点集合は $\{\tilde{z} \in \check{M} \mid |\check{g}(\tilde{z})|_{\mathbb{D}} = 1\}$ である.

一次変換して, $g, \check{g} \in \mathbb{R}$ で特異点を持つように取り替えると, $\mathbb{R}^{2,1}$ 内において表現公式は

$$\text{空間的極大曲面} \quad X(z) = \text{Re} \int^z (1 - g^2, 2g, 1 + g^2) f dz$$

$$\text{時間的極小曲面} \quad \check{X}(\tilde{z}) = \text{Re} \int^{\tilde{z}} (1 - \check{g}^2, 2\check{g}, 1 + \check{g}^2) \check{f} d\tilde{z}$$

とそれぞれ複素数, パラ複素数が表れない形に書き換えることができる. さらに, 特異点集合自身の定義域における局所座標も実軸上にとれば, 折り目特異点を持つための条件もそれぞれ,

$$\begin{aligned} \text{(空間的)} \quad \text{折り目特異点} &\iff \begin{cases} g(\bar{z}) = \overline{g(z)} \\ f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \end{cases} \iff \begin{cases} g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \\ f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \end{cases} \\ \text{(時間的)} \quad \text{折り目特異点} &\iff \begin{cases} \check{g}(\bar{z}) = \overline{\check{g}(\tilde{z})} \\ \check{f}(\bar{z}) = \overline{\check{f}(\tilde{z})} \end{cases} \iff \begin{cases} \check{g}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \\ \check{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

と平易な形で表されることになる. さらに実軸上で $g = \check{g}$, $f = \check{f}$ とすると, 実軸上で実解析的につながる事がわかる. このため, 折り目特異点や, それによって誘導される平均曲率零曲面の計量の型変化を考察するためには, 特異点集合が $g, \check{g} \in \mathbb{R}$ と表される形の公式の方が, より適していると思われる.

このことは, 4 次元ニュートラル空間 $\mathbb{R}^{2,2}$ 内においても同様な考察が可能であり,

$$X(z) = \text{Re} \int^z (1 - g_I g_{II}, g_I + g_{II}, 1 + g_I g_{II}, g_I - g_{II}) f dz$$

を用いると, 折り目特異点を持つための条件は

$$g_I(\bar{z}) = \overline{g_I(z)}, \quad g_{II}(\bar{z}) = \overline{g_{II}(z)}, \quad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

と表される. 特にこの形は, 負定値領域の折り目特異点への退化の観察を容易にすることで有用である.

これらの記述において, 写像の共形性はどこにも用いられておらず, より一般に計量の型は特に限定しない $\mathbb{N}$ への写像について, 書き直してみると, 次のようになる.

$$\varphi^1(z), \dots, \varphi^N(z)$$

が, 実軸と共通部分を持つ $\mathbb{C}$ 内の領域で正則な関数とし,

$$\Phi(z) := (\varphi^1(z), \dots, \varphi^N(z)), \quad F(z) := \text{Re} \Phi(z)$$

と定める. このとき写像 F は

$$\varphi^1(\bar{z}) = \overline{\varphi^1(z)}, \dots, \varphi^N(\bar{z}) = \overline{\varphi^N(z)}$$

をみたすとき, 実軸上で折り目特異点を持つ. この考察はパラ複素数に置き換えても, そのまま通用し, 折り目特異点を越えた実解析的延長の先が, 共通の式を用いて表される.

2 双複素数

複素数とパラ複素数に関する写像を統一的に扱うために, 複素数とパラ複素数を含む代数として双複素数を考える. 双複素数 (bicomplex) 全体の集合 $\mathbb{B}$ とは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$\mathbb{B} := \{\tilde{z} = x_1 + i_1 x_2 + i_2 x_3 + j x_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

であり, i_1, i_2, j に対して次の関係式

$$i_1^2 = i_2^2 = -1, \quad i_1 i_2 = i_2 i_1 = j, \quad (j^2 = 1)$$

が成り立つ可換な結合代数である. このとき,

$$\mathbb{C}(i_1) := \{\zeta = x_1 + i_1 x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{C}(i_2) := \{z = x_1 + i_2 x_3 \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{D} := \{\tilde{z} = x_1 + j x_4 \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

とすると, $\mathbb{C}(i_1), \mathbb{C}(i_2), \mathbb{D}$ は $\mathbb{B}$ の部分空間となり, $\mathbb{C}(i_1), \mathbb{C}(i_2)$ の元は複素数であり $\mathbb{D}$ の元はパラ複素数とよばれる. $\mathbb{B} = \mathbb{C}(i_2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(i_1)$ または $\mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(i_1)$ である. 双複素数に関しては次の3つ共役が定まる.

$$\tilde{z}^{\dagger_1} := x_1 - i_1 x_2 + i_2 x_3 - j x_4 = \overline{\zeta_1} + i_2 \overline{\zeta_2},$$

$$\tilde{z}^{\dagger_2} := x_1 + i_1 x_2 - i_2 x_3 - j x_4 = \zeta_1 - i_2 \zeta_2,$$

$$\tilde{z}^{\dagger_3} := x_1 - i_1 x_2 - i_2 x_3 + j x_4 = \overline{\zeta_1} - i_2 \overline{\zeta_2} = \tilde{z}^{\dagger_1 \dagger_2}$$

さらに, 非負の実数値をとる絶対値 $|\tilde{z}|$ を次のように与えると

$$|\tilde{z}|^4 = \tilde{z} \tilde{z}^{\dagger_1} \tilde{z}^{\dagger_2} \tilde{z}^{\dagger_3} = \{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2\} \{(x_1 + x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2\},$$

双複素数も零因子の集合 $\mathcal{S}$ をもつ:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\tilde{z} \mid |\tilde{z}| = 0\} \\ &= \{\tilde{z} \mid x_1 - x_4 = x_2 + x_3 = 0 \text{ or } x_1 + x_4 = x_2 - x_3 = 0\} \\ &= \{(1+j)(x_1 + i_1 x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\} \cup \{(1-j)(x_1 + i_1 x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\} \\ &= (1+j)\mathbf{C}(i_1) \cup (1-j)\mathbf{C}(i_1) = (1+j)\mathbf{B} \cup (1-j)\mathbf{B}. \end{aligned}$$

複素数 i_1, i_2 , パラ複素数 j に関して双複素数版のオイラーの公式を表す事ができる.

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= r e^{i_1 \theta_1 + i_2 \theta_2 + j \theta_3} \quad (\tilde{z} \notin \mathcal{S}), \quad r = |\tilde{z}|, \\ e^{i_1 \theta_1} &= \cos \theta_1 + i_1 \sin \theta_1, \quad e^{i_2 \theta_2} = \cos \theta_2 + i_2 \sin \theta_2, \quad e^{j \theta_3} = \cosh \theta_3 + j \sinh \theta_3\end{aligned}$$

このとき, それぞれの角度の情報は共役を用いて表す事もできる:

$$r^2 e^{2i_1 \theta_1} = \tilde{z} \tilde{z}^{\dagger_1}, \quad r^2 e^{2i_2 \theta_2} = \tilde{z} \tilde{z}^{\dagger_2}, \quad r^2 e^{2j \theta_3} = \tilde{z} \tilde{z}^{\dagger_3}.$$

$(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{Z}^2 / ((\pi, \pi)\mathbf{Z} + (\pi, -\pi)\mathbf{Z})$ であり, $j = i_1 i_2 = e^{i_1 \pi(N_1+1/2) + i_2 \pi(N_2+1/2)}$ ($N_1, N_2 \in \mathbf{Z}, N_1 + N_2 : \text{even}$) をみたす. 双複素関数を次のようにおくと

$$\tilde{w}(\tilde{z}) = u_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + i_1 u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + i_2 u_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + j u_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

自然に微積分を導入することができ, 特に, $\tilde{w}(\tilde{z})$ の双複素微分は複素関数の複素微分の自然な拡張として定まる. $\tilde{w}_{\tilde{z}} = \tilde{w}_{x_1} = \tilde{w}_{x_2}/i_1 = \tilde{w}_{x_3}/i_2 = \tilde{w}_{x_4}/j$. この場合の双複素数版 Cauchy-Riemann 方程式は次をみたす:

$$\left\{ \begin{array}{llll} (u_1)_{x_1} &= & (u_2)_{x_2} &= & (u_3)_{x_3} &= & (u_4)_{x_4}, \\ (u_2)_{x_1} &= & -(u_1)_{x_2} &= & (u_4)_{x_3} &= & -(u_3)_{x_4}, \\ (u_3)_{x_1} &= & (u_4)_{x_2} &= & -(u_1)_{x_3} &= & -(u_2)_{x_4}, \\ (u_4)_{x_1} &= & -(u_3)_{x_2} &= & -(u_2)_{x_3} &= & (u_1)_{x_4}. \end{array} \right.$$

双複素正則関数として次も成り立つ.

$$\begin{aligned}(u_l)_{x_1 x_1} + (u_l)_{x_2 x_2} &= (u_l)_{x_3 x_3} + (u_l)_{x_4 x_4} = (u_l)_{x_1 x_3} + (u_l)_{x_2 x_4} \quad (l = 1, 2, 3, 4) \\ &= (u_l)_{x_1 x_4} - (u_l)_{x_2 x_3} = (u_l)_{x_1 x_1} + (u_l)_{x_3 x_3} = (u_l)_{x_1 x_1} - (u_l)_{x_4 x_4} = 0.\end{aligned}$$

3 平均曲率零曲面の双複素拡張

$\varphi^n(\tilde{z})$ を $\mathbb{B}$ の領域 Ω 上の双複素正則関数とし, $\Phi := (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^N)$ とする. さらにこの Φ の $\mathbb{C}(i_1)^N$ への射影を F とする:

$$\begin{aligned}F : \mathbb{B} \supset \Omega &\rightarrow \mathbb{C}(i_1)^N \\ \tilde{z} &\mapsto \Phi_1(\tilde{z}) + i_1 \Phi_2(\tilde{z}) = {}^t(\varphi_1^1 + i_1 \varphi_2^1, \varphi_1^2 + i_1 \varphi_2^2, \dots, \varphi_1^N + i_1 \varphi_2^N)(\tilde{z}).\end{aligned}$$

F は ζ_1, ζ_2 ($\tilde{z} = \zeta_1 + i_2 \zeta_2$) に関して正則である. $\mathbb{C}(i_1)^N$ を $\mathbb{R}^{2N_+, 2N_-}$ ($N = N_+ + N_-$) とみなし標準計量

$$ds^2 := \sum_{n=1}^{N_+} \{(du_1^n)^2 + (du_2^n)^2\} - \sum_{n=N_++1}^{N_++N_-} \{(du_1^n)^2 + (du_2^n)^2\}$$

を入れると, そのタイプに関わらずこの写像 F の平均曲率ベクトル場は零となる.

3.1 折り目特異点における延長

$\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^N$ が $\dagger_2$ 同変性

$$\varphi^1(\tilde{z}^{\dagger_2}) = \varphi^1(\tilde{z})^{\dagger_2}, \dots, \varphi^N(\tilde{z}^{\dagger_2}) = \varphi^N(\tilde{z})^{\dagger_2}$$

をみたすとするとき, $F|_{\mathbb{C}(i_2)}$, $F|_{\mathbb{D}}$ は実軸上で折り目特異点を持ち, 互いに実解析的延長となっている.

定理 3.1. $\Phi(\tilde{z}^{\dagger_2}) = \Phi(\tilde{z})^{\dagger_2} + C$ ($C \in \mathbb{B}^N$) をみたすと仮定する. このとき, $F|_{\mathbb{C}(i_2)}$, $F|_{\mathbb{D}}$ について次のことが成り立つ.

- $F(\Omega \cap \mathbb{R})$ 上の *generic* な点で共通の折り目特異点をもつ.
- 折り目特異点を越えて実解析的延長となる.
- 折り目特異点上の点 $F(x_1) \in \mathbb{C}(i_2)^N$ の近傍における像の曲面の正則性は

$$\text{rank } \langle \Phi_{\tilde{z}}(x_1), \Phi_{\tilde{z}\tilde{z}}(x_1) \rangle = 2$$

のとき保証される.

3.2 完備でない end を超える延長

一般に平均曲率零曲面の計量の型変化は, 折り目特異点をなす null 曲線か, または光的直線のいずれかに限って表れることが知られている [12]. 光的直線まで Weierstrass データが延長可能な場合, 正則な関数 g が直線全体にわたって連続的に同じ値をとることは, 定数となる場合を除いて起こりえないので, この直線は, 定義域における 1 点だが, 完備でない end として広がったものでなければならない.

定理 3.2. $\Phi(\tilde{z}^{\dagger_2}) = \Phi(\tilde{z})^{\dagger_2} + C$ ($C \in \mathbb{B}^N$) をみたすと仮定する.

Φ が $\tilde{z} = \tilde{q}$ で K 位の極を持ち, かつ主要部が奇数次の項からなるとすると

$$\Phi(\tilde{z}) = \sum_{k=1; k:\text{odd}}^K \frac{1}{(\tilde{z} - \tilde{q})^k} C_k + \Phi_{\text{hol}}(\tilde{z})$$

とローラン展開することが出来る. ここで, $0 \neq C_K \in \mathbb{C}(i_1)^N$, $k = 1, \dots, K$; k は奇数, Φ_{hol} は双複素正則関数とする.

このとき, $F|_{\mathbb{C}(i_2)}$, $F|_{\mathbb{D}}$ は C_K に平行な直線を挟んで互いに実解析的延長となっている. また, 直線上の *generic* な点における像の曲面の正則性は

$$\max\{\text{rank}\langle C_K, (\Phi_{\text{hol}})_{\tilde{z}\tilde{z}}(\tilde{q}) \rangle, \text{rank}\langle C_K, (\Phi_{\text{hol}})_{\tilde{z}}(\tilde{q}) \rangle\} = 2 \quad (K = 1)$$

$$\max\{\text{rank}\langle C_K, (\Phi_{\text{hol}})_{\tilde{z}\tilde{z}}(\tilde{q}) \rangle, \text{rank}\langle C_K, C_{K-2} \rangle\} = 2 \quad (K \geq 3, K \text{ は奇数})$$

のとき保証される.

ここで, 写像 Φ として, $\tilde{g}, \tilde{f}$ を $\Omega \subset \mathbb{B}$ 上双複素正則関数とし

$$\Phi(\tilde{z}) = \int^{\tilde{z}} ((1 - \tilde{g}^2)\tilde{f}, 2\tilde{g}\tilde{f}, (1 + \tilde{g}^2)\tilde{f})d\tilde{z}$$

で与えられものを考える. このとき, $\Phi = \Phi_1 + i_1\Phi_2 + i_2\Phi_3 + j\Phi_4$ であり, $\tilde{X} = \Phi_1 + i_1\Phi_2$ と表すことにする. この $\tilde{X}|_{\mathbb{C}(i_2)}$ と $\tilde{X}|_{\mathbb{D}}$ がそれぞれ空間的極大曲面と時間的極小曲面となる条件は双複素数の共役 $\dagger_1, \dagger_3$ を用いて

- $\tilde{X}|_{\mathbb{C}(i_2)}$ ($\mathbb{R}^{2,1}$ への射影) が空間的極大曲面

$$\iff \begin{cases} \tilde{g}(\tilde{z}^{\dagger_1}) = \tilde{g}(\tilde{z})^{\dagger_1} \\ \tilde{f}(\tilde{z}^{\dagger_1}) = \tilde{f}(\tilde{z})^{\dagger_1} \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{g}(\mathbb{C}(i_2)) \subset \mathbb{C}(i_2) \\ \tilde{f}(\mathbb{C}(i_2)) \subset \mathbb{C}(i_2) \end{cases}$$

- $\tilde{X}|_{\mathbb{D}}$ ($\mathbb{R}^{2,1}$ への射影) が時間的極小曲面

$$\iff \begin{cases} \tilde{g}(\tilde{z}^{\dagger_3}) = \tilde{g}(\tilde{z})^{\dagger_3} \\ \tilde{f}(\tilde{z}^{\dagger_3}) = \tilde{f}(\tilde{z})^{\dagger_3} \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{g}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \\ \tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{2,1}$ または, $\mathbb{R}^{2,2}$ 内の空間的極大曲面や時間的極小曲面への実解析的延長は, 定理 3.1, 3.2 の特別な場合とみなすことができる.

3.3 零因子を超える延長

一般に, 時間的極小曲面においては, パラ複素数の零因子が存在し, この一部は一般には完備な end となって表れることが多い. 一方, 双複素拡張においては零因子の集合 $S = (1 + j)\mathbb{C}(i_1) \cup (1 - j)\mathbb{C}(i_1)$ が余次元 2 であるため, これによって定義域が分断させられることはない.

定理 3.3. 時間的極小曲面において, 零因子を超えて, end を回り込んでの実解析的延長が定まる.

パラ複素平面 $\mathbb{R} + j\mathbb{R}$ 内の回転で繋げない点どうしは回り込んだ

「 $\mathbb{R} + i_2\mathbb{R}$ 」内の回転 + 「 $i_2\mathbb{R} + j\mathbb{R}$ 」と平行な平面内の回転

に置き換えられ, end を回り込んでの延長が常に一意的に定義されることがわかる.

3.4 具体例

折り目特異点をなす null 曲線と光的直線に沿った型変化を伴う平均曲率零曲面の例を紹介する. Weierstrass データ $(\tilde{g}, \tilde{f})$ として,

$$\tilde{g} = -\tilde{z}^2, \quad \tilde{f} = \frac{-1}{\tilde{z}^2}$$

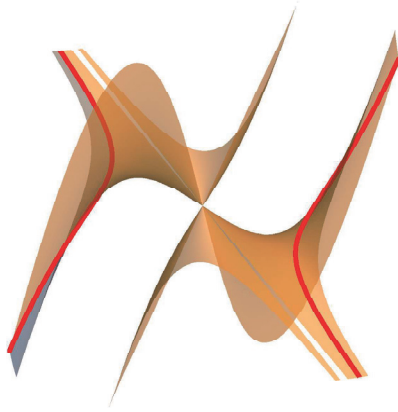
とする. このとき空間的極大曲面, 時間的極小曲面は次のように与えられ, 像の曲面は滑らかに延長される.

空間的極大曲面

$$\tilde{X}|_{\mathbb{C}(i_2)}(z) = \left(-\frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_3^2 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_3^2}, 2x_1, \frac{1}{3}x_1^3 - x_1x_3^2 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_3^2} \right)$$

時間的極小曲面

$$\tilde{X}|_{\mathbb{D}}(\tilde{z}) = \left(-\frac{1}{3}x_1^3 - x_1x_4^2 - \frac{x_1}{x_1^2 - x_4^2}, 2x_1, \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_4^2 - \frac{x_1}{x_1^2 - x_4^2} \right)$$



図における, 太い線は折り目特異点に対応している. また, 切れ目に見える直線は光的直線に対応しており, 実際は繋がっている.

4 謝辞

研究集会における講演の機会、および本稿の執筆の機会を与えてくださった兵庫県立大学の川久保哲教授に心より御礼申し上げます。

参考文献

- [1] S. Akamine: *Behavior of the Gaussian Curvature of Timelike Minimal Surfaces with Singularities*, arXiv:1701.00238, 2017.
- [2] J. Cockle: *On Certain Functions Resembling Quaternions and on a New Imaginary in Algebra*, London-Dublin-Edinburgh Philosophical Magazine, series 3, v. **33** (1848), 435–439.
- [3] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada, S.-D. Yang: *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [4] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada, S.-D. Yang: *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Osaka J. Math. **52** (2015), no. 1, 285–297; erratum in Osaka J. Math. **53** (2016), no. 1, 289–292.
- [5] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada: *Entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Q. J. Math. **67** (2016), no. 4, 801–837.
- [6] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada: *Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, Osaka J. Math. **54** (2017), no. 2, 249–272.
- [7] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, S.-D. Yang: *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 189–207.
- [8] K. Hashimoto, S. Kato: *Bicomplex extensions of zero mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^{2,1}$ and $\mathbb{R}^{2,2}$* , J. Geom. Phys. **138** (2019), 223–240.
- [9] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara, K. Yamada: *Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times*, Differential Geom. Appl. **52** (2017), 64–77.
- [10] T. Imaizumi: *Maximal surfaces with simple ends*, Kyushu J. Math. **58** (2004), no.

- 1, 59–70.
- [11] T. Imaizumi, S. Kato: *Flux of simple ends of maximal surfaces in $\mathbf{R}^{2,1}$* , Hokkaido Math. J. **37** (2008), no. 3, 561–610.
 - [12] V. A. Klyachin: *Surfaces of zero mean curvature of mixed type in Minkowski space* (in Russian), Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **67** (2003), no. 2, 5–20; translation in Izv. Math. **67** (2003), no. 2, 209–224.
 - [13] O. Kobayashi: *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space $\mathbf{L}^3$* , Tokyo J. Math. **6** (1983), no. 2, 297–309.
 - [14] J. J. Konderak: *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), no. 5, 319–332.
 - [15] H. B. Lawson Jr., M.-L. Michelsohn: *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp.
 - [16] M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac: *Bicomplex holomorphic functions. The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers*, Frontiers in Mathematics. Birkhauser/Springer, Cham, 2015. viii+231 pp.
 - [17] Z. Olszak: *A note about the torsion of null curves in the 3-dimensional Minkowski spacetime and the Schwarzian derivative*, Filomat **29** (2015), no. 3, 553–561.
 - [18] C. Segre: *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* (in Italian), Math. Ann. **40** (1892), no. 3, 413–467.
 - [19] H. Takahashi: *Timelike minimal surfaces with singularities in three-dimensional spacetime* (in Japanese), Master thesis, Osaka University (2012).
 - [20] M. Umehara, K. Yamada: *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications*, Lorentzian Geometry and Related Topics, (eds. M. A. Canadas-Pineto et al.), Springer (2017).