

多体問題における Smale の 結果について

広大 理 大槻 舒一

§0 序

多体問題に関して多くの研究があるが [2, 3, 5], ここで問題にするのは、この問題を *Hamiltonian system* として捉えて、その *integral manifold* の型とその上の運動の型とを決定する事である。そこには安定性の問題、周期解の存在の問題、エルゴード性の問題も含まれている。従来、この本来の問題は *metrical theory* と *topological theory* との両端に分割されており、それぞれは理論的に完結していても、そこから追究は本来の問題を射程距離におくことができなかった。この間において、Arnold、Moser、その他の研究は特筆すべきものがあった。複雑な近似法を用いて、Arnold による Kalmogorab-Arnold の定理の証明、それを用いて Leon torich による制限三体問題の Lagrange point の安定性の証明、Moser [6] による解析性を落した一般化である。その他にも個別的に良い結果

が多数得られているが、問題を大域的なものとして見返した時、得られているのは、*integrable case* の Liouville-Arnold の定理[4]、*geodesic flow* に関する Anosov の定理など、そう多くは見られない。ここで紹介しようとする事柄は、平面運動の場合の多体問題の *integral manifold* の型に決定する方法とその結果である。[1] これを見ると、少なくとも *integral manifold* の型を位相的に決定する方法としては有力なものであるが、どうしてもその上の運動の問題が消えてしまっている感がある。我々としては、この Smale の仕事を歓迎するが、*integrable case* の様に *integral manifold* とその上の運動とを統合的に求める事が出来る方法が望ましいと思っている。

§1 問題の定式化

M をリーマン多様体、 $\pi: TM \rightarrow M$ を *tangent bundle*、 $V: M \rightarrow \mathbb{R}$ を微分可能な函数、 $K: TM \rightarrow \mathbb{R}$ を $K(x, v) = K(v) = K_x(v, v)$ $v \in T_x M$ (ここに K_x はリーマン計量) に定義される函数とする。

以上によりこれは *Hamiltonian system* になっている、 M 上に *flow* が定義されている。 G を M 上に作用し、 K と V を不変にする群とする。この時 (M, K, V, G) を対称性をもつ力学系と呼ぶことにする。 $\mathfrak{g}$ は G のリー環、 $\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ の内積に關する dual とするとき、 $X \in \mathfrak{g}$ に対し $(M$ 上) *vector field*

$\alpha(x)$ が対応し (すなわち写像 $\alpha_x: \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$ が存在する)、
 α_x の双対写像を $J_x: T_x^* M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ とすると、写像 $J: T^* M \rightarrow \mathfrak{g}^*$
 が定義される。 $J = J_1 \circ K^*$ と置き、また $E = K + \nabla \circ \pi$ と置
 くと、 J と K はこの system のオービットになっている。

(E, J は古典力学において、全エネルギー、角運動量と呼ば
 れているものに对应している)

ここで Smale の提示した問題を述べよう。

問題 写像 $E \times J: TM \rightarrow \mathbb{R} \times \mathfrak{g}^*$ の大域的な性質を調べよ。

$E \times J$ が *locally trivial* でなくなような $\mathbb{R} \times \mathfrak{g}^*$ の点の集合
 Σ を *bifurcation set* と呼び、 $I_{c,p} = (E \times J)^{-1}(c, p)$, $c \in \mathbb{R}$, $p \in \mathfrak{g}^*$
 を *integral manifold* と呼ぶ事にすると、これは少なくとも
 次の問題を言っている。

問題 $E \times J$ の *bifurcation set* と *integral manifold* とを
 求めよ。

Smale の主要な結果である平面上の n 体問題は、

$$M = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid x_i \in \mathbb{R}^2, \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0\}$$

$$TM = M \times M, \quad K(x, v) = K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v_i\|^2$$

$$V(x) = - \sum_{i < j} m_i m_j / \|x_i - x_j\|, \quad J(x, v) = J_x(v) = \sum_{i=1}^n m_i x_i \times v_i$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) = \mathbb{S}^1, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^* = \mathbb{R} \quad \text{と置いたものである。}$$

(ここで $\mathbb{R}^2$ は 2次元ユークリッド空間、 $m_i > 0$ は質点の質量であ
 る。また $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in M \mid x_i = x_j, i \neq j\}$ とすると ∇ は

$M-\Delta$ 上で定義され (1) 実際の相空間としては $T = T(M-\Delta)$
 $= (M-\Delta) \times M$ を考える (1) 3

以後この場合だけを扱う事にする。

3.2 bifurcation set

平面の n 体問題の bifurcation set を求めるためには相対平衡点という概念が必要である。

定義 $x = (x_1 \cdots x_n) \in M-\Delta$; 相対平衡点 ($x \in Re$ と書く)

$\Leftrightarrow \varphi_t(x) = (\varphi_t(x_1) \cdots \varphi_t(x_n))$ を R^2 上の 1-param 回転群から導びかれた運動とすると、この運動が system としての運動になっている。

(すなわち全体の相対位置を保ちながら回転運動をしている状態がある。)

$\bar{Re} = Re/[S^1, R^1]$ を位置関係が相似的な相対平衡点を同一視したものとする。(解析的平衡点というのは $\bar{Re}$ の元を指す場合が多い)

$\bar{Re}$ に関して $n=2, 3$ の場合は古典的にすべて求まっている

命題

(a) $n=2$, $\bar{Re}$; 1 点

(b) $n=3$, $\bar{Re}$; 5 点 (3 つの Euler point と 2 つの Lagrange point)

(この他に任意の n に対し、 $n!/2$ 位の共線的相対平衡点の存在が Moulton によって示されている)

相対平衡点を見つける簡単な方法がある。(これは古典例に隠れた形で用いられていた)

定理 2.1 (Euler-Lagrange)

平面上の n 体問題において、 $S_K = \{z \in M \mid K(z) = 1\}$,

$V_S = V / S_{K-1}$ とすると、

$z \in S_{K-1}$ が相対平衡点 $\iff z$ は V_S の critical point

この定理の証明は簡単な回転座標系に関する定理を用いる。
この定理によって次の bifurcation set に関する定理が証明できる。

定理 2.2

平面上の n 体問題において

(a) $E \times J$ の critical point : $\Sigma' = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}_e} \Sigma_\alpha$

ここで $\Sigma_\alpha = \{(-\nabla(Pz^2), P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid P \neq 0, z \in \alpha, K(z) = 1\}$

(b) bifurcation set $\Sigma = \Sigma' \cup \{c=0\} \cup \{P=0\}$

この様に bifurcation set と相対平衡との関係を明確に示したのは Smale が最初であろう。(Birkhoff [2] などにもこの事を暗示する様な事を言っているが、解析的手法でキツクリ

た事を言うのは困難な事である。特にこの点を境にして
integral manifold の topological type が変る事によって、
differential topology の発展を待たねばならなかった。）

§ 3 integral manifold

平面上の n 体問題の場合の integral manifold $I_{c,p}$ に関する
結果を書き下し（みよ）。

定理 3.1

(A) $p=0$

(i) $c \geq 0$, $I_{c,p} \simeq S(E(S_k - \Delta)) \times \mathbb{R}^+$ (diffeo)

(ii) $c < 0$, $I_{c,p} \simeq E(S_k - \Delta)$ (diffeo)

(B) $p \neq 0, c \geq 0$

$I_{c,p} \simeq E(S_k - \Delta)$ (diffeo)

(C) $p \neq 0, c < 0$

$I_{c,p} \simeq \beta_k(Q_{c,p})$ ($k=2n-2$) (homeo)

ここで、 $E(S_k - \Delta)$ は $S_k - \Delta$ 上の $J_2^{-1}(0)$ を fibre とする fibre
bundle (fibre に計量が入り Riemannian vector space bundle
になる) , $S(E(S_k - \Delta))$ は $E(S_k - \Delta)$ に附随する unit
sphere bundle , $Q_{c,p} = \mathcal{L}_p^{-1}(-\infty, c] \subset S_k - \Delta$, $(x_p(z) = -V(Pz)^2)$
 $\beta_k(Q_{c,p})$ は $S^{k-1} \times Q_{c,p}$ を $Q_{c,p}$ にかき 1 点に潰して得ら

れる manifold である。

注 (A)(B)において、この diffeo は C に関して smooth になっている。 (C)においては、 $(C, P) \in \Sigma$ において C に関して smooth な diffeo であるが、 $(C, P) \in \Sigma$ においては、homeo しか言えない。

この様に $E(S_k - \Delta)$ を基礎として、必要な歪めたり、潰すという様な位相的な操作を行って integral manifold を求めようとするのが Smale の基本的な方法である。

定理 3.1 を用いれば $n=2, 3$ の場合は、 V に関する若干の仮定（すなわち m_i に関する仮定）があれば、integral manifold $I_{C,P}$ の位相的な型は求まるが、見ようものではないし、解析で得られている結果との対比が容易ではない。

必要な方は原論文 [I] を見てもらいたい。

§4 定理 3.1 の略証

1 相空間 $T = T(M - \Delta) = (M - \Delta) \times M$ を極座標で表わすと $T = \mathbb{R}^+ \times (S_k - \Delta) \times M$ となる、このとき、

$$I_{C,P} = \{ (t, z, v) \in T \mid v \in J_{tz}^{-1}(P), K(v) = C - V(tz) \}$$

$\alpha_P(x)$ を 0 から $J_x^{-1}(P)$ への vector で、 K -norm に関して長さが最小なものとする。

$V_P(x) = V(x) + K(\alpha_P(x))$ と置くと、平面上の n 体問題の

場合は、 $V_p(x) = V(x) + p^2 \chi_k(x)$ 、となる。

(この $V_p(x)$ を amended potential と呼んで造った事は、
Smile の卓見じゃあない。)

$$I'_{c,p} = \{(t, z, u) \in T \mid u \in J_z^{-1}(0), K(u) = c - V_p(tz)\}$$

と置くと、 $(t, z, u) \rightsquigarrow (t, z, v - \alpha_p(tz) = u)$ の対応で

$$I_{c,p} \simeq I'_{c,p} \text{ (diffeo) となる。}$$

(この diffeo が証明の key point がある。 $I'_{c,p}$ において、
bundle structure が見しとれるじゃあない。)

2. $K(u) = c - V_p(tz) \geq 0$ があるから、 t, z に関して制
限がある事になる。

$V_p(tz) = c$ となる $t(c, p, z) > 0$ が存在するとき、それを
 $t_- \leq t_+$ とすると (存在するとしても高々2つ)、実は、

$$I'_{c,p} = \{(t, z, u) \in T \mid u \in J_z^{-1}(0), K(u) = c - V_p(tz), \\ z \in \Omega_{c,p}, t^- = t = t^+\}$$

(かならずしも t_-, t_+ が存在するとはかぎらないが $t_- \leq t = t_+$
を、 t_+ が存在しないとき $0 < t \leq t_+$ 、 t_+ が存在しない時は
 $t = t_+ = +\infty$ と解釈する。)

3. これから先は (A)(a) と (c) の場合で大きく分かれる。

$$p = 0, \text{ 又は } p \neq 0, c \geq 0 \Rightarrow \Omega_{c,p} = S_k - \Delta$$

$$p = 0, c \geq 0 \Rightarrow 0 < t < +\infty$$

$$p = 0, c < 0 \Rightarrow 0 < t = t_+ < +\infty$$

$$P \neq 0, C \geq 0 \Rightarrow 0 < t_- \leq t < +\infty$$

となつて (A) (B) の場合は見やすい。

4. $P \neq 0, C < 0$ の場合、 $Q_{C,P} \subsetneq S_K - \Delta$, $0 < t_- \leq t \leq t_+ < +\infty$ となつて複雑である。

E : S_K 上の bundle (fibre は $J_z^{-1}(0)$)

ξ : S_K 上の trivial line bundle, ξ_z は E_z に対して
法線方向のベクトル

この時、 $E + \xi$ (Whitney sum) は S_K 上の *trivializable vector space bundle* になつてゐる。

(すなわち $E + \xi \simeq \mathbb{R}^k \times S_K$)

$\tau(z) = \tau_p(z) = -P^2/2V(z)$ と置くと、 $l_p(z) = \tau_p(\tau_p(z), z)$ であるが、実は $l_p(z) = \min_{t \in \mathbb{R}^+} \tau_p(tz)$ となつてゐる。

($K(u) = C - \tau_p(tz) \geq 0$ であるから上の事が、 z が $Q_{C,P}$ に制限される理由である。)

$$\begin{array}{ccc} g_p : \mathbb{R}^+ \times (S_K - \Delta) & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ (t, z) & \longmapsto & (t - \tau_p(z), z) \end{array} \quad \text{diffeo}$$

$$f_p : (E + \xi) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{l} f_{p,z}(u, g_{p,z}(t)) = K(u) + \tau_p(tz), \quad t \in \mathbb{R}^+, z \in Q_{C,P} \\ \text{で定義される函数で、} S_K - \Delta \text{ 上で smooth である} \end{array} \right)$$

このとき $f_{p,z}^{-1}(C) = I'_{C,P}$ となつてゐるのである。

(実は $g_p f_p^{-1}(C) = I'_{C,P}$)

$f_p : \mathbb{R}^k \times (S_k - A) \rightarrow \mathbb{R}$ と考えると $f_p^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^k \times (S_k - A)$ を見るのはそう困難ではない。

Q.E.D

Reference

- [1] Smale, S ; Topology and Mechanics I ; Inven. Math. 10
305 ~ 331 (1970) , II , Inven. Math. 11, 45 ~ 64 (1970)
- [2] Birkhoff, G.D ; Dynamical systems ; Providence (1966)
- [3] Wintner, A ; The analytical foundations of celestial
mechanics ; Princeton, N. J Univ. Press (1941)
- [4] Arnold, V. I ; Small denominators and problems of
stability of motion in classical and celestial
mechanics ; Russian Math. Surveys 18
85 ~ 193 (1963)
- [5] Sternberg, S ; Celestial Mechanics I, II ; Benjamin (1969)
- [6] Moser, J ; Lecture on Hamiltonian systems