

Diophantus 近似における問題

Colorado 大 W.M. Schmidt

(1) Littlewood 予想 について。

$$\liminf q \|\alpha q\| \cdot \|\beta q\| = 0 \quad \text{for } \alpha, \beta$$

ただし $\|\alpha\|$ は α から 最も近い整数までの距離

① $q \|\alpha q\| \cdot \|\beta q\| < 1$ は簡単である。何故なら

Dirichlet により $|\alpha - \frac{p}{q}|, |\beta - \frac{p'}{q}| < \frac{1}{q^2}$ なる

p, p', q が存在するから $\|\alpha q\|, \|\beta q\| < q^{-\frac{1}{2}}$

よゐ、Davenport (1960) が次を証明している

$$\exists \alpha, \beta \quad \liminf \max (q^{\frac{1}{2}} \|\alpha q\|, q^{\frac{1}{2}} \|\beta q\|) > 0$$

$$\exists \alpha, \beta \quad \liminf \max (q^m \|\alpha q\|, q^{1-m} \|\beta q\|) > 0$$

ただし $0 \leq m \leq 1$

問題 (1a) 次の両方を同時に成立させる α, β は存在?

$$\liminf \max (q^{\frac{1}{3}} \|\alpha q\|, q^{\frac{2}{3}} \|\beta q\|) > 0$$

$$\liminf \max (q^{\frac{2}{3}} \|\alpha q\|, q^{\frac{1}{3}} \|\beta q\|) > 0$$

(2) α を degree d の代数的数と取り。

周知の通り Roth が $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ は有限個の解しか持たぬことを証明した。

問題(2a) この不等式を改良して

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2(\log q)^K} \quad \text{にせよ。}$$

すなわち Roth により $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C(\alpha, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}$ と存在定数 $C(\alpha, \varepsilon)$ が存在するが、この $C(\alpha, \varepsilon)$ は non-effective である。一方 Liouville による $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C(\alpha)}{q^d}$ では、 $C(\alpha)$ は effective な定数である。もちろん Roth の定理を effective にすることが究極目標であるが、それは難しく見える。そこで

Feldman (1971) は示した。

$$d \geq 3 \text{ の時} \quad |\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C(\alpha)}{q^{d-\delta(\alpha)}} \quad \text{ここで定数 } C(\alpha)$$

および $\delta(\alpha)$ は effective である。もちろんこれは、Liouville 定理の小ささを少し大きく改良であるが、願わくば、

問題(2b) 上の $\delta(\alpha)$ を $d = \deg \alpha$ だけに depend するようにせよ。

すなわち Siegel (1921) は二変数多項式 $f(x, y) = 0$ で定義される代数曲線が、有限個しか整数点を持たないことを示した。そこには $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\alpha}}$ なる不等式が有限個の解しか持たぬことを用いた。ただし、彼の結果は effective である。

は分かった。 Σ の曲線の genus を g とするとき、

Baker と Coates が 解の大きさに関する effective な上界を与えた ($g=1$ の時)。

問題 2c $g > 1$ ならどうか。

β を algebraic な数とし、その Height を $H(\beta)$ とする。 $H(\beta)$ は β の定義方程式の係数の絶対値の最大のもの、Leveque がこれを証明した。 α を代数的数とし、 K を代数体とする時

$|\alpha - \beta| < \frac{1}{H(\beta)^{2+\varepsilon}}$ を満たす $\beta \in K$ は有限個しかない。

一方 Schanuel は $K \ni \alpha, \beta$ 2' $\alpha \neq \beta$ とするとき

$$|\alpha - \beta| > \frac{1}{(H(\alpha)H(\beta))^{2+\varepsilon}} \text{ if } |\log H(\alpha) - \log H(\beta)| \geq c(k, \varepsilon)$$

を証明した。これに因りて、

問題 2d $|\alpha - \beta| > \frac{c(k, \varepsilon)}{(H(\alpha)H(\beta))^{2+\varepsilon}}$ を証明せよ。

(3) Roth はこれを証明した。

α を $\deg \alpha = d$ な代数数とする。すると、 $\deg \beta \leq d$ な代数数 β 2' $|\alpha - \beta| < \frac{1}{H(\beta)^{2d+\varepsilon}}$ を満たすものは有限個しか存在しない。Wirsing はこれを改良して、 $2d+\varepsilon$ を $d+1+\varepsilon$ で置き換えることが出来ることを証明した。

問題 3a $|\alpha - \beta| < \frac{c(\alpha)}{H(\beta)^{d+1}}$ を満たす β ($\deg \beta \leq d$) は無限個あることを言え。 ($d+1-\varepsilon$ なら provable かも知れない)

この予想は、Wirsing は $|\alpha - \beta| < \frac{C(\alpha)}{H(\beta)^{\frac{d+1}{2}}}$ の時には成立することを示した。

⑤ power series において $d=2$ まで分る (1) 分る。

(4) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を real algebraic number とする。

$$|\alpha_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \text{なる } q,$$

$p_1, \dots, p_n$ が無限に存在することは、Dirichlet により証明された。また、 $|\alpha_i - \frac{p_i}{q}| > \frac{C^*}{q^{1+\frac{1}{n}+\varepsilon}}$ なる定数 $C^* = C^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ が存在することは近年 Schmidt により証明された。また C を $f(x, y) = 0$ でおえらる代数曲線とする。 f は整数係数で $\deg f = d$ とする。有理点 $(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q})$ が曲線 C 上にない時、この点から C への距離 $\geq \frac{C}{q^d}$ と存在ことは Liouville の方法に従って簡単に証明できることが出来る。

問題 4a この不等式を $\frac{C}{q^{3+\varepsilon}}$ と出来るか。

問題 4b C 上の点 (α, β) に対し、 $(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q})$ はどの位近づくことが出来るか。

(5) Non-linear な問題

Heilbronn (1948) はこれを証明した。

もし $N > N(\varepsilon)$ ならば、 $\forall \alpha \quad \exists q \leq N \quad \|\alpha q^2\| < N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$

⑥ Dirichlet の定理はもっとも $\|\alpha q\| < N^{-1}$ がある。

問題 5a $N > N(\varepsilon)$, $\forall \alpha \exists q \leq N$ such $\|\alpha q^2\| < N^{-1+\varepsilon}$

② = これは extremely difficult であろう。

$\liminf q^{\frac{1}{2}} \|\alpha q^2\| = 0$ は 少し 易しい であろう。

問題 5(a) $\Rightarrow \bmod p$ の 最小平方非剰余 $\ll p^{\varepsilon}$

と 存在 することが 分る, 2 113。 Burgess が $\ll \frac{1}{p^{4\sqrt{\varepsilon}}}$ なる

ことは 証明 して いる。

問題 5b $N > N(\varepsilon)$ $\forall \alpha \exists q \leq N$ such $\|\alpha q^3\| < N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}$

② = これは 上 下 易しい が 未知 である。

$$\|\alpha q^3 + \beta q^2\| < N^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \quad \text{とか} \quad \|\alpha q^3 + \beta q\| < N^{-\frac{1}{5}+\varepsilon}$$

は 証明 出来る。

± 2 Davenport は $Q(x_1, \dots, x_n)$ は indefinite 二次形式で $n \geq 16$ なる時、 $|Q(x)| < \varepsilon$ なる 整数 $x \neq 0$ が存在 する ことを 証明 した。

$$Q \sim_{\text{real}} x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 \quad \text{と 存。 2 113 時、}$$

十分 大 なる $C_1(\varepsilon)$ と $N_1(\varepsilon)$ が 存在 して、 $r, s \geq C_1(\varepsilon)$

かつ $N \geq N_1(\varepsilon)$ なる 時、

$$|x| \leq N \quad \text{かつ} \quad |Q(x)| < N^{-2+\varepsilon}$$

なる x が 存在 する と 思われる。

問題 5c 上を 証明 せよ。

② も 上 が 成立 すれば best possible である。 何故 存す

$$|x_1^2 + \dots + x_r^2 - \alpha(\overbrace{x_{r+1}^2 + \dots + x_{r+s}^2}^y)| > \frac{1}{y} > \frac{C}{N^2} \quad \text{だから}$$

② $C(X_1, \dots, X_n)$ を cubic form とする時、Pitman が、 $m \geq m^*$ ならば、 $|C(\alpha)| < \varepsilon$ が 整数解を持つことを証明した。ここで m^* は 5000 位の定数である。これを $|C(\alpha)| < N^{-3+\varepsilon}$ くらいには出来たのだろうか。

問題 5d $F(X_1, \dots, X_n)$ を degree d の form とする。
 $m \geq m_0(d)$ ならば $\forall \varepsilon$ に対し、 $|F(\alpha)| < \varepsilon$ が 整数解をもつことを証明せよ。

(注) 上は $d=5$ でも分るらしい。

問題をもう少し特殊化して、 d を奇数とし、

$$a_1 X_1^d + \dots + a_n X_n^d = 0 \quad \text{なる方程式を考える。}$$

$m \geq N(d)$ の時、これが non-trivial 解を持つことは分るが、Birch は、 $m > N(d, \varepsilon)$ ならば $|\alpha| \leq \max(|a_i|)^{\frac{1}{d}+\varepsilon}$ なる解の存在を示した。

問題 5e : 上は $\frac{1}{d} + \varepsilon$ を単に ε とせよ。

以上が Schmidt 教授の講演のありまじである。実は、もう少し問題を出されたのであるが、意味不明のため省略した部分もある。また、上に述べた問題のいくつかは、conjecture として出されたものもあり、必ずしも正しい命題であるとは限らないことを付記しておく。要を得ない所があると考えれば、全 2 筆記者の至らぬところと思われたい。(藤原正彦 記)