

概均質ベクトル空間の L 関数

立教大理 佐藤文広 (Fumihito Sato)

§0. 本講究録所収の川中・行着両氏による概均質ベクトル空間の Gauss 和についての研究 ([川中・行着]) を、概均質ベクトル空間のゼータ関数についての標準的な議論と組み合わせると、直ちに概均質ベクトル空間に付随する L 関数の関数等式についての結果を得ることが出来る。この結果は、正定値 2 次形式の L 関数についての [Stark] の結果の一般化を与えている。以下 [川中・行着] への補足としてこのことを説明する。

§1. (G, ρ, V) を $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間、 S を ρ の特異点集合とする。以下、 (G, ρ, V) の $\mathbb{Z}$ -structure を一つ固定しておく。また、Zeta 関数としては一変数のものだけを考えることにして、[Sato-Shintani] に従って次の仮定をおく：

$$(1.1) \quad \begin{cases} G : \text{reductive}, \\ S : \text{絶対既約超曲面}. \end{cases}$$

(G, ρ, V) の既約相対不変式をとって $f(v)$ とおく。 $f(v)$ は $\mathbb{Z}$ -係数と仮定してよい。 $\phi: G \rightarrow GL(1)$ を $f(v)$ に対応する G の $\mathbb{Q}$ -有理指標とす。 G^+ で $G_{\mathbb{R}}$ の単位元連結成分を表わし, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の G^+ -軌道分解を

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \dots \cup V_\nu$$

とす。ゼータ関数・L関数を定義するために,

(1.2) $\forall \chi \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$ について, $G_\chi = \{g \in G; \rho(g)\chi = \chi\}$ の単位元連結成分 (代数群としての) は自明でない $\mathbb{Q}$ -有理指標を持たない,

と仮定する。

自然数 N をとって

$$\Gamma = \Gamma(N) = \{g \in G_{\mathbb{Z}} \cap G^+; \rho(g) \equiv 1_n \pmod{N}, \phi(g) = 1\}$$

$$(n = \dim V)$$

とおく。 $\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を N を法とする Dirichlet 指標として, $m \in \mathbb{Z}$, $(m, N) \neq 1$ に対しては $\chi(m) = 0$ と定義することとて χ を $\mathbb{Z}$ 上の関数に拡張しておく。

さて, (G, ρ, V) に付随する L 関数, Zeta integral, Local zeta functions at ∞ を次のように定義する:

$$\text{L 関数: } L_j(s, \chi) = \sum_{v \in T \setminus V_j \cap V_{\mathbb{Z}}} \mu(v) \chi(f(v)) |f(v)|^{-s}$$

$$(1 \leq j \leq \nu, s \in \mathbb{C}),$$

$$\text{Zeta integral: } Z_{\chi}(\Phi; s) = \int_{G^+/\Gamma} |\phi(g)|^s \sum_{v \in V_{\mathbb{Z}} - S} \chi(f(v)) \Phi(\rho(g)v) dg$$

$$(dg: G^+ \text{ の Haar measure, } \Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}), s \in \mathbb{C}),$$

$$\text{Local zeta at } \infty: \zeta_{\infty, j}(\Phi; s) = \int_{V_j} |f(v)|^s \Phi(v) dv$$

$$(dv: V_{\mathbb{R}} \text{ の標準的な Euclid 測度,}$$

$$\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}), s \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq \nu).$$

ここで, L 関数の定義に現れる $\mu(v)$ は,

$$G_v^+ = \{g \in G^+; \rho(g)v = v\}, \quad T_v = T \cap G_v^+$$

において,

$$\mu(v) = \int_{G_v^+/T_v} dv_v, \quad dv_v = G_v^+ \text{ の Haar 測度}$$

によって定義される。 $\mu(v)$ は仮定 (1.2) により有限である。

又, dv_v の正規化の仕方は, [Sato-Shintani, p.146] 参照。

$N=1$, 従って χ が自明な Dirichlet 指標のとき $L_j(s, \chi)$ は,

(G, ρ, V) に付随した通常のゼータ関数に他ならない。このとき

$\zeta_j(s)$ と記すことにする。

(1.3 : L 関数の積令表示) $\zeta_1(s), \dots, \zeta_v(s)$ は $\operatorname{Re} s$ が十分大きいとき絶対収束すると仮定する。このとき $L_j(s, \chi)$, $Z_\chi(\mathbb{Q}; s)$ も同じ範囲で絶対収束し,

$Z_\chi(\mathbb{Q}; s) = \sum_{j=1}^v L_j(s, \chi) \cdot \zeta_{\omega, j}(\mathbb{Q}; s - \frac{n}{d})$ ($n = \dim V$, $d = \deg f$) が成立つ。

(注意) 仮定(1.2)の下では, $\zeta_i(s)$ は $\operatorname{Re} s > n/d$ で絶対収束すると予想される。(cf. [Sato-Shintani, p154, Remark 1], [Sato I, §4, p455, Remark], [Sato II, p80, Remark 2]).

次に, V の dual space を $V^\vee$, ρ の反値表現を $\rho^\vee$ とすると, $(G, \rho^\vee, V^\vee)$ も仮定(1.1), (1.2) を満たす $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間になる。 $(G, \rho^\vee, V^\vee)$ の $\mathbb{Z}$ -structure としては $V_\mathbb{Z}$ の dual lattice を $(V^\vee)_\mathbb{Z}$ とすることによって定まるものを考える。 $f^\vee, S^\vee, \phi^\vee, V_\mathbb{R}^\vee - S_\mathbb{R}^\vee = V_1^\vee \cup \dots \cup V_\nu^\vee$ は, それぞれ (G, ρ, V) の場合と同様に定義する。このとき, $V_\mathbb{R}^\vee - S_\mathbb{R}^\vee$ の G^+ -軌道の個数が ν と一致していることに注意しておく。又, $\phi^\vee(g) = \phi(g)^{-1}$ が成立っている。

加法的指標 $\psi: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$\psi(m) = \exp(2\pi i m/N) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

で定義する。概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の Gauss 和 E .

[川中・行春] によって,

$$F_{\psi}[\chi f](v^{\vee}) = \sum_{v \in V_{\mathbb{Z}}/N \cdot V_{\mathbb{Z}}} \chi(f(v)) \psi(\langle v^{\vee}, v \rangle) \quad (v^{\vee} \in V_{\mathbb{Z}}^{\vee}/N V_{\mathbb{Z}}^{\vee})$$

によって定義する。

ここで $(G, \rho^{\vee}, V^{\vee})$ に付随する L 関数・Zeta integral を定義するのだが、この場合には、 $\chi(f^{\vee}(v^{\vee}))$ を係数とするのではなく Gauss 和 $F_{\psi}[\chi f](v^{\vee})$ を係数とするものを考えるのである。

すなわち、

$$L_j^{\vee}(s, \chi) = \sum_{v^{\vee} \in \Gamma \backslash V_j^{\vee} \cap V_{\mathbb{Z}}^{\vee}} \mu^{\vee}(v^{\vee}) \cdot F_{\psi}[\chi f](v^{\vee}) \cdot |f^{\vee}(v^{\vee})|^{-s}$$

$$(1 \leq j \leq \nu, s \in \mathbb{C}),$$

$$Z_{\chi}^{\vee}(\Phi^{\vee}; s) = \int_{G^{\vee}/\Gamma} |\phi^{\vee}(g)|^s \sum_{v^{\vee} \in V_{\mathbb{Z}}^{\vee} - S^{\vee}} F_{\psi}[\chi f](v^{\vee}) \Phi(\rho^{\vee}(g)v^{\vee}) dg$$

$$(\Phi^{\vee} \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{\vee}), s \in \mathbb{C})$$

とおく。Local zeta functions at ∞ については、 (G, ρ, V) の場合と同様に

$$S_{\infty, j}^{\vee}(\Phi^{\vee}; s) = \int_{V_j^{\vee}} |f^{\vee}(v^{\vee})|^s \Phi^{\vee}(v^{\vee}) dv^{\vee}$$

$$(1 \leq j \leq \nu, \Phi^{\vee} \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{\vee}), s \in \mathbb{C})$$

とおく。

やはり、 $N=1$ 、 χ = 自明な Dirichlet 指標の場合には、 $L_j^{\vee}(s, \chi)$ は $(G, \rho^{\vee}, V^{\vee})$ に付随する通常のゼータ関数 $\zeta_j^{\vee}(s)$ に

帰着する。

(1.4: L関数の積分表示) $\zeta_1^v(s), \dots, \zeta_r^v(s)$ が $\operatorname{Re} s$ が十分大きいときに絶対収束するならば, $L_j^v(s, \chi), \zeta_\chi^v(\Phi^v; s)$ も同じ範囲で絶対収束し,

$$\zeta_\chi^v(\Phi^v; s) = \sum_{j=1}^r L_j^v(s, \chi) \cdot \zeta_{\omega_j}^v(\Phi^v; s - \frac{n}{d})$$

が成立つ。

概均質ベクトル空間の Zeta 関数の関数等式の証明の一つの柱は, Poisson の和公式であった。L 関数に対しては, 次の形のものを用いる。

(1.5: Poisson の和公式) $\Phi \in \mathcal{S}(V_R)$ の Fourier 変換を,

$$\Phi^v(v^v) = \int_{V_R} \Phi(v) \exp(2\pi i \langle v, v^v \rangle) dv \quad (\in \mathcal{S}(V_R^v))$$

と定義する。 このとき,

$$\sum_{v \in V_{\mathbb{Z}}} \chi(f(v)) \Phi(p(q)v) = N^{-n} \phi(q)^{-\frac{n}{d}} \sum_{v^v \in V_{\mathbb{Z}}^v} \tilde{f}_\chi[\chi f](-v^v) \Phi^v(p^v(q) \frac{v^v}{N})$$

が成立つ。

この等式は, $\chi(f(v))$ の値が $v \pmod{N}$ のみで定まることに注意すれば, 通常の Poisson の和公式から直ちに得られる。

次に概均質ベクトル空間の理論の基本定理である Local

zeta functions at ∞ の満たす関数等式について復習する。

$f^v(\text{grad})$ は V_R 上の定数係数偏微分作用素で

$$f^v(\text{grad}) \exp(\langle v, v^v \rangle) = f^v(v^v) \exp(\langle v, v^v \rangle)$$

を満たすものだとする。このとき

$$f^v(\text{grad}) P(v)^s = b(s) \cdot P(v)^{s-1}$$

を満足する s の d 次多項式 $b(s)$ ((G, p, V) の b 関数) が存在する。 b 関数を

$$b(s) = b_0 \cdot \prod_{i=1}^d (s + \alpha_i)$$

と因数分解し,

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^d \Gamma(s + \alpha_i + 1) \quad (P\text{-factor})$$

と置く。

(1.6: Local functional equations [Sato-Shintani, Theorem 1, p142])

$\exp(-\pi\sqrt{-1})$ に関する高々 d 次の多項式 $u_{ij}(s)$ ($1 \leq i, j \leq v$) が存在し, $\forall \Phi \in \mathcal{S}(V_R)$ について

$$\begin{aligned} \int_{\infty, i} (\Phi; s - \frac{n}{d}) &= \gamma(s - \frac{n}{d}) (2\pi)^{-d/2} |b_0|^{-1} \exp(\frac{d\pi s \sqrt{-1}}{2}) \\ &\times \sum_{j=1}^v u_{ij}(s) \int_{\infty, j}^v (\Phi^v; -s) \quad (1 \leq i \leq v) \end{aligned}$$

が成立つ。ここで Φ^v は (1.5) で定義された Φ の Fourier 変換である。

(1.3), (1.4), (1.5), (1.6) を用いて [Sato-Shintani,

pp.152-154 と p.169 Remark 2] と同様の議論を行って次の定理が得られる。

定理 1. (1) $L_j(s, X), L_j^v(s, X)$ ($1 \leq j \leq \nu$) は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される。さらに

$b(s - \frac{n}{d}) L_j(s, X), b(s - \frac{n}{d}) L_j^v(s, X)$ は entire functions である。

(2) 次の関数等式が成立つ：

$$L_i^v(\frac{n}{d} - s, X) = (2N\pi)^{-ds} \cdot |b_0|^s \cdot \exp(\frac{d\pi s \sqrt{-1}}{2}) \\ \times \gamma(s - \frac{n}{d}) \cdot \sum_{j=1}^{\nu} u_{j,i}(s) L_j(s, X) \quad (1 \leq i \leq \nu).$$

Remark. 以上の議論は一変数のゼータ関数に限られるわけではなく, [Sato-1] で考察されている多変数ゼータ関数の場合にも容易に一般化される。又同様の考え方で, 概均質ベクトル空間に付随する Hurwitz-Lerch 型の Zeta 関数を構成できる。

さて, 定理 1 によって L 関数の解析接続の問題は片づいた。又, ある種の関数等式を満足していることもわかった。以上は概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論における routine work である。次の問題は, L 関数と関数等式で結びつけられてゐる $L_j^v(s, X)$ が, 再び普通の L 関数と同じタイプのもの

として書き表わすことができるかということである。言いか
えれば, Gauss 和 $\sum_{f \in \mathcal{F}} [Xof]$ が, Dirichlet 指標と f^v の合成によ
って記述されるかということ, これこそ [川・仲・行春] が
解答を与えている問題である。

スローカン的に説明すると, セータ関数に対しては

相対不変式の複素中の Fourier変換の公式 (Local functional equations)	$\Rightarrow$	セータ関数 の関数等式
--	---------------	----------------

という図式が成立していたが, L 関数に対しては

相対不変式の複素中の Fourier変換の公式 + 相対不変式と Dirichlet 指標 の合成の $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{N}\mathbb{Q}_\ell$ 上の Fourier変換 (Gauss 和の計算).	$\Rightarrow$	L 関数 の関数等式
--	---------------	---------------

となっているのである。

§2. この節では、[川中・行春]で取扱われている場合を考察する。すなわち、§1の仮定に加えて

$$(2.1) \begin{cases} (G, \rho, V) : \text{既約正則擬均質ベクトル空間 (に自然な} \\ \quad \text{Z-structure を入れたもの)} . \\ N = p : \text{十分大きな素数} \end{cases}$$

を仮定する。

(G, ρ^V, V^V) に付随する “真” L 関数を

$$L_j^*(s, X) = \sum_{v \in T \mid V_{\mathbb{Z}}^V \cap V_j^V} \mu^V(v) \cdot \chi(f^V(v)) |f^V(v)|^{-s}$$

で定義する。定理1によって $\mathbb{Q}$ 上の有理型関数に解析接続されることは保証されている。

このとき、[川中・行春]の結果を用いると定理1は次のように精密化される。

定理 2. $m_f(\text{ord } X) = 0$ ならば、 $L_j(s, X)$, $L_j^*(s, \theta_X \otimes X^{-1})$ は s の 整関数であり, 関数等式

$$\begin{aligned} L_{\frac{n}{d}-s}^*(s, \theta_X \otimes X^{-1}) &= (\varepsilon_{X, \psi} \cdot (\theta_X \otimes X)(-1)^d) \cdot p^{n/2} \\ &\quad \times (2p\pi)^{-ds} |b_0|^s \exp\left(\frac{d\pi s \sqrt{-1}}{2}\right) \cdot \gamma(s - \frac{n}{d}) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^v u_{j,1}(s) \cdot L_j(s, X) \end{aligned}$$

が成立する。 ここで [川中・行春] の記号はこゝでとり直しに用いた。

[略証] [川中・行着] の定理 5(i), 及び有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の Fourier 変換に関する Planchrel の定理から, $m_f(\text{ord } X) = 0$ ならば,

$$F_p[\chi \circ f](v^\vee) = 0 \quad \text{if} \quad f^\vee(v^\vee) \equiv 0 \pmod{p}$$

が得られる。この事実と [川中・行着] 定理 5(i) とから直ちに

$$L_j^\vee(s, X) = \varepsilon_{\chi, \psi} \cdot (\theta_X \otimes X)(-1)^d \cdot p^{n/2} L_j^*(s; \theta_X \otimes X^{-1})$$

が出る。定理 1 の関数等式もこの式を用いて書き直せば、求める関数等式を得る。さらに、このとき、Poisson の和公式 (1.5) の両辺において, $v \in V_{\mathbb{Z}} \cap S$, $v^\vee \in V_{\mathbb{Z}}^\vee \cap S^\vee$ に対応する項の寄与は 0 であることに注意すれば, L 関数が整関数であることがわかる。■

Remark (1) 具体例については, [Stark], [Chen] を参照。

(2) $m_f(\text{ord } X) \neq 0$ のときは, $f^\vee(v^\vee) \equiv 0 \pmod{p}$ となる $v^\vee$ について, $F_p[\chi \circ f](v^\vee)$ は生き残り得る。[川中・行着] の予想 4 は、そのような $v^\vee$ について何も主張していない。従って、このときには

$$L_j^\vee(s, X) = \text{定数倍} \cdot L_j^*(s, \theta_X \otimes X^{-1}) + (*)$$

となるが, $(*)$ については良くわからない。また同じ理由によって, χ が non-trivial な Dirichlet 指標でも $m_f(\text{ord } X) \neq 0$

であれば、 L 関数は整数とは限らず、極を持ち得る。その最も簡単な例として、

$$n = 2m + 1$$

$$f(v) = v_1^2 + \dots + v_n^2$$

$$\chi = \left(\frac{\cdot}{p}\right) : \text{Legendre symbol}, \quad \text{ord}(\chi) = 2$$

の場合を考えてみよう。このとき、 $m_f(2) = 1 \neq 0$ であり、 L 関数は $s = \frac{1}{2}$ で 1 位の極を持っている。

《参考文献》

[Chen] Fonction zêta associée à un espace préhomogène et sommes de Gauss, preprint.

[川中・行春] 概均質ベクトル空間の Gauss 和, 本講究録, pp. - .

[Sato-I] Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, Tôhoku Math. J. 34(1982), 437-483.

[Sato-II] _____ II: A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35(1983), 77-99.

[Sato-Shintani] On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100(1974), 131-170.

[Stark] L-functions and character sums for quadratic forms (I), Acta Arith. 16 (1968), 35-50.