

## $(q, t)$ -Hook Formulae

名古屋大学多元数理科学研究科  
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

### 1 はじめに

Young 図形とその上の標準盤などの概念を一般化する 1 つの方向として, Young 図形を半順序集合と見なすというものがある.  $P$  を有限半順序集合とする.  $\#P = n$  であるとき, 全単射  $\tau: P \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n = \#P$ ) で順序を保つもの, つまり, 条件

$P$  において  $x \leq y$  ならば,  $\mathbb{Z}$  において  $\tau(x) \leq \tau(y)$  である

をみたすものを,  $P$  の **linear extension** と呼ぶ. また, 写像  $\sigma: P \rightarrow \mathbb{N}$  (ここで,  $\mathbb{N}$  は非負整数全体のなす集合である) で条件

$P$  において  $x \leq y$  ならば,  $\mathbb{Z}$  において  $\sigma(x) \geq \sigma(y)$  である

をみたすものを,  **$P$ -partition** という.  $P$ -partition 全体のなす集合を  $\mathcal{A}(P)$  と表し,  $\sigma \in \mathcal{A}(P)$  に対して  $|\sigma| = \sum_{v \in P} \sigma(v)$  とおく. このとき, linear extension の個数  $e(P)$  や  $\mathcal{A}(P)$  の母関数

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^{|\sigma|}$$

に興味がある.

例えば, 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  に対して, その Young 図形 (Ferrers 図形) を

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{P}^2 : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

(ここで,  $\mathbb{P}$  は正整数全体のなす集合である) とおいて定義する.  $D(\lambda)$  は,  $i \leq k$  かつ  $j \leq l$  であるとき  $(i, j) \geq (k, l)$  と順序を定めることによって, 半順序集合となる. このとき,  $D(\lambda)$  の linear extension,  $D(\lambda)$ -partition はそれぞれ,  $D(\lambda)$  を枠とする標準盤, 逆平面分割 (reverse plane partition) に他ならない. さらに,  $v = (i, j) \in D(\lambda)$  に対して,  $D(\lambda)$  の部分集合

$$H_{D(\lambda)}(i, j) = \{(i, j)\} \cup \{(i, l) \in D(\lambda) : l > j\} \cup \{(k, j) \in D(\lambda) : k > i\}$$

を  $v$  における**鉤** (hook) といい,  $h_{D(\lambda)}(v) = \#H_{D(\lambda)}(v)$  を**鉤の長さ** (hook length) という. このとき,

**定理 1.1.**  $\lambda$  を  $n$  の分割とする.

(1) (Frame–Robinson–Thrall [3])  $D(\lambda)$  の linear extension の個数は,

$$e(D(\lambda)) = \frac{n!}{\prod_{v \in D(\lambda)} h_{D(\lambda)}(v)} \quad (1)$$

で与えられる.

(2) (Stanley [12])  $D(\lambda)$  を枠とする逆平面分割の母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(D(\lambda))} z^{|\sigma|} = \frac{1}{\prod_{v \in D(\lambda)} (1 - z^{h_{D(\lambda)}(v)})} \quad (2)$$

で与えられる.

このような鉤公式は, 根つき木, 変形 Young 図形やこれらの一般化である  $d$ -complete な半順序集合などに対しても成り立つことが知られている. つまり, このような半順序集合  $P$  については,

$$e(P) = \frac{n!}{\prod_{v \in P} h_P(v)}, \quad (3)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^{|\sigma|} = \frac{1}{\prod_{v \in P} (1 - z^{h_P(v)})} \quad (4)$$

となる正整数  $h_P(v)$  ( $v \in P$ ) が存在する. ここで, (3) は (4) から導かれることに注意しておく. 実際, 一般の半順序集合  $P$  に対して,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^{|\sigma|} = \frac{W_P(z)}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^n)}$$

(ここで,  $n = \#P$  である) となる多項式  $W_P(z)$  が存在し,  $W_P(1) = e(P)$  となる. よって, (4) の形の鉤公式が成り立つならば,

$$W_P(z) = \frac{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^n)}{\prod_{v \in P} (1 - z^{h_P(v)})}$$

となるので,  $z \rightarrow 1$  の極限を考えることにより, (3) が得られる.

この報告では, (4) の形の鉤公式の  $(q, t)$  変形を考える. つまり,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} W_P(\sigma; q, t) z^{|\sigma|} = \prod_{v \in D(\lambda)} \frac{(tz^{h_P(v)}; q)_\infty}{(z^{h_P(v)}; q)_\infty}$$

(ここで,  $(a; q)_\infty = \prod_{i \geq 0} (1 - aq^i)$  である) の形の  $\mathcal{A}(P)$  の重みつき母関数の等式 (とその多変数版) を考察する.

以下では, §2 で多変数鉤公式をもつ半順序集合を定式化し,  $d$ -complete な半順序集合について解説する. そして, §3, §4 で 2 通りの  $(q, t)$  変形 (予想) を与える. §3 の  $(q, t)$  変形は  $d$ -complete な半順序集合に対してしか考えられないが, §4 の  $(q, t)$  変形は鉤公式をもつ半順序集合すべてに対して考えられる.

## 2 鉤公式をもつ半順序集合と $d$ -complete な半順序集合

この節では、多変数鉤公式が成り立つような半順序集合を定式化し、その例である  $d$ -complete な半順序集合について説明する。

**定義 2.1.**  $P$  を半順序集合とする． $k$  を正整数とし， $z = (z_1, \dots, z_k)$  を変数とする．全射  $c: P \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  (彩色) と写像  $h: P \rightarrow \mathbb{N}^k$  (鉤の長さの多変数版) で，

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^\sigma = \frac{1}{\prod_{v \in P} (1 - z^{h(v)})} \quad (5)$$

(ここで， $z^\sigma = \prod_{v \in P} z_{c(v)}^{\sigma(v)}$  である) となるものが存在するとき， $P$  は  $k$  色つき鉤公式をもつ半順序集合 ( $k$ -colored hook length poset) であるという。

例えば，定理 1.1 (2) は，Young 図形  $D(\lambda)$  が 1 色つき鉤公式をもつ半順序集合であることを主張している．実は，次の定理により， $D(\lambda)$  は  $(\lambda_1 + \lambda'_1 - 1)$  色つき鉤公式をもつ半順序集合であることがわかる．ここで， $\lambda'$  は  $\lambda$  の共役分割である。

**定理 2.2.** (Gansner [5])  $\lambda$  を分割とするととき， $\mathcal{A}(D(\lambda))$  のトレース母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(D(\lambda))} z^{\text{tr}(\sigma)} = \prod_{v \in D(\lambda)} \frac{1}{1 - z^{[H_{D(\lambda)}(v)]}} \quad (6)$$

で与えられる．ここで，

$$z^{\text{tr}(\sigma)} = \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} z_{j-i}^{\sigma(i,j)}, \quad z^{[H_{D(\lambda)}(v)]} = \prod_{(i,j) \in H_{D(\lambda)}(v)} z_{j-i}$$

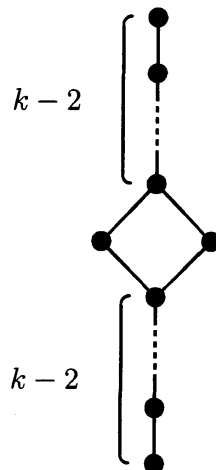
である．

Proctor [7], [8] は，Young 図形，変形 Young 図形などの一般化として  $d$ -complete な半順序集合の概念を導入した．そして，Peterson–Proctor [9] は  $d$ -complete な半順序集合に対して，多変数鉤公式を与えている．

$d$ -complete な半順序集合の定義を与えるために，半順序集合に関する用語を思い出ししておく．半順序集合  $P$  の 2 元  $x, y$  (ただし  $x \leq y$  とする) に対して， $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$  とおき，この形の  $P$  の部分集合を  $P$  の区間と呼ぶ．また， $\#[x, y] = 2$  であるとき (つまり， $x < y$  であり， $x < z < y$  となる元  $z \in P$  が存在しないとき)， $y$  は  $x$  をカバーするという． $P$  の Hasse 図が連結であるとき， $P$  は連結であるという．

**定義 2.3.**  $k$  を 3 以上の整数とする．

- (1)  $2k - 2$  個の元からなる半順序集合で，次の Hasse 図をもつものを  $d_k(1)$  と表し，**double-tailed diamond** と呼ぶ：



また,  $d_k(1)$  からその最大元を取り除いて得られる半順序集合を  $d_k^-(1)$  と表す.

(2)  $P$  を半順序集合とする.

(a)  $P$  の区間で  $d_k(1)$  と順序同型なものを  $d_k$  区間と呼ぶ.

(b)  $k \geq 4$  のとき,  $P$  の区間で  $d_k^-(1)$  と順序同型なものを  $d_k^-$  区間と呼ぶ.

(c)  $P$  の 3 個の元  $x, y, w$  からなる部分集合で,  $x, y$  がともに  $w$  をカバーするようなものを  $d_3^-$  区間と呼ぶ.

注意. 厳密に言えば,  $d_3^-$  区間は半順序集合の区間ではないが, Proctor [7], [8] の用語に従うことにする.

定義 2.4.  $P$  を有限半順序集合とする. 次の 3 つの条件 (D1), (D2), (D3) がすべての  $k$  に対して成り立つとき,  $P$  は  **$d$ -complete** であるという:

(D1)  $P$  の部分集合  $I$  が  $d_k^-$  区間ならば,  $I$  の極大元をすべてカバーする元  $v$  で,  $I \cup \{v\}$  が  $d_k$  区間となるものが存在する.

(D2)  $I = [w, v]$  が  $d_k$  区間であり,  $v$  が  $u$  を  $P$  においてカバーするならば,  $u \in I$  となる.

(D3)  $I, I'$  がともに  $d_k^-$  区間であり,  $w, w'$  がそれぞれの  $I, I'$  の最小元であるとき,  $I - \{w\} = I' - \{w'\}$  ならば,  $I = I'$  となる.

例 2.5. (a) 根つき木 (rooted tree), つまり, ただ 1 つの極大元をもち Hasse 図にサイクルを含まない連結な半順序集合は,  $d$ -complete な半順序集合である.

(b) double-tailed diamond  $d_k(1)$  は  $d$ -complete な半順序集合である.

(c) 分割  $\lambda$  に対して, その Young 図形  $D(\lambda)$  は  $d$ -complete な半順序集合である.

(d) ストリクトな分割  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  ( $\mu_1 > \dots > \mu_l > 0$ ) に対して, その変形 Young 図形

$$S(\mu) = \{(i, j) \in \mathbb{P}^2 : i \leq j \leq \mu_i + i - 1\}$$

は  $d$ -complete な半順序集合である. (半順序は Young 図形の場合と同様に定義する.)

次に,  $d$ -complete な半順序集合に対する鉤公式を述べるために, 彩色と鉤の長さ, その多変数版 (に対応する単項式) を導入する.

定義 2.6. 半順序集合  $P$  に対して,

$$T = \{x \in P : \text{任意の } y \geq x \text{ に対して, } y \text{ をカバーする元は高々 1 個である}\}$$

とおき,  $P$  の top tree と呼ぶ.  $T$  を  $P$  の Hasse 図式の部分グラフ (木となる) とみなす.

補題 2.7. ([8, Proposition 8.6])  $P$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とし,  $T$  をその top tree とする.  $I$  を  $\#I = \#T$  なる集合とすると, 全単射  $c: T \rightarrow I$  は, 次の 3 つの条件をみたす写像  $c: P \rightarrow I$  に一意的に拡張される:

(C1)  $x, y$  が比較不可能ならば,  $c(x) \neq c(y)$  である.

(C2) 区間  $[w, v]$  が鎖 (つまり, 全順序集合) ならば,  $c(x)$  ( $x \in [w, v]$ ) はすべて相異なる.

(C3) 区間  $[w, v]$  が  $d_k$  区間ならば,  $c(w) = c(v)$  である.

このような写像  $c: P \rightarrow I$  を  $d$ -complete な彩色と呼ぶ.

例 2.8. (a) 分割  $\lambda$  の Young 図形  $D(\lambda)$  に対して, その top tree は

$$T = \{(1, 1)\} \cup \{(1, 2), \dots, (1, \lambda_1)\} \cup \{(2, 1), \dots, (\lambda'_1, 1)\}$$

であり,  $I = \{-\lambda'_1 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \lambda_1 - 1\}$  ととると,

$$c(i, j) = j - i \quad ((i, j) \in D(\lambda))$$

は  $d$ -complete な彩色である.

(b) ストリクトな分割  $\mu$  (ただし  $l(\mu) \geq 2$ ) の変形 Young 図形  $S(\mu)$  に対して, その top tree は

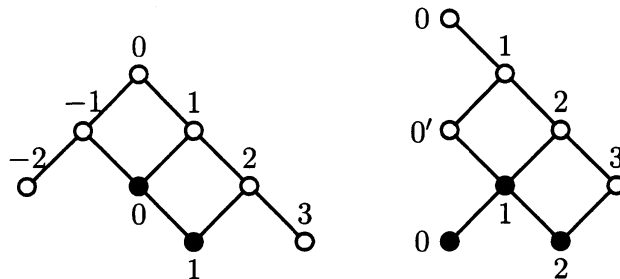
$$T = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, \mu_1)\} \cup \{(2, 2)\}$$

であり,  $I = \{0, 0', 1, 2, \dots, \mu_1 - 1\}$  ととると,

$$c(i, j) = \begin{cases} 0 & (i = j \text{ かつ } i \text{ が奇数のとき}) \\ 0' & (i = j \text{ かつ } i \text{ が偶数のとき}) \\ j - i & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

は  $d$ -complete な彩色である.

例えば,  $D(4, 3, 1)$ ,  $S(4, 3, 1)$  を考えると, 上で与えた  $d$ -complete な彩色は下の図のようになる. また, top tree は下の図で  $\circ$  で表される元からなる.



**定義 2.9.**  $P$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とする.  $c: P \rightarrow I$  を  $d$ -complete な彩色とし, 変数  $z = (z_i)_{i \in I}$  を用意する. このとき,  $v \in P$  に付随した整数  $h_P(v)$  と単項式  $z[H_P(v)]$  を次のように帰納的に定義する:

(a)  $v$  がどの  $d_k$  区間の最大元にもならないとき,

$$h_P(v) = \#\{w \in P : w \leq v\}, \quad z[H_P(v)] = \prod_{w \leq v} z_{c(w)}.$$

(b)  $v$  が  $d_k$  区間  $[w, v]$  の最大元であるとき,

$$h_P(v) = h_P(x) + h_P(y) - h_P(w), \quad z[H_P(v)] = \frac{z[H_P(x)] \cdot z[H_P(y)]}{z[H_P(w)]}.$$

ここで,  $x, y$  は  $d_k$  区間  $[w, v]$  において比較不可能な 2 元である.

このとき,  $d$ -complete な半順序集合に対する鉤公式は次のように与えられる.

**定理 2.10.**  $P$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とし,  $\#P = n$  とする.

(1) (Peterson)  $P$  の linear extension の個数は

$$e(P) = \frac{n!}{\prod_{v \in P} h_P(v)} \quad (7)$$

で与えられる.

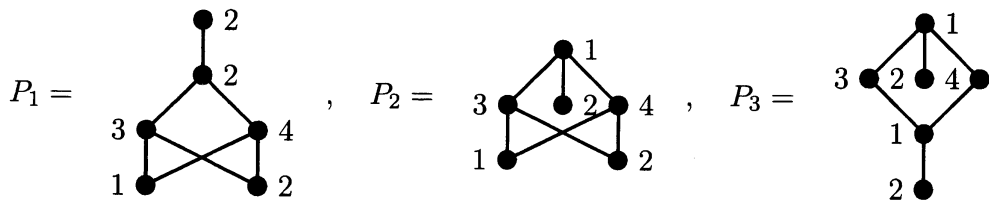
(2) (Peterson–Proctor)  $P$ -partition の多変数母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^\sigma = \prod_{v \in P} \frac{1}{1 - z[H_P(v)]} \quad (8)$$

で与えられる.

従って,  $d$ -complete な半順序集合は,  $\#T$  色つき鉤公式をもつ半順序集合である. しかし, 鉤公式をもつ半順序集合は  $d$ -complete な半順序集合以外にもある.

**例 2.11.** 次のような Hasse 図形をもつ半順序集合  $P_1, P_2, P_3$  を考える.



このとき,  $P_1, P_2, P_3$  はいずれも  $d$ -complete ではない. ( $P_1$  は (D3) を,  $P_2$  は (D2), (D3) を,  $P_3$  は (D1), (D2) をみたさない.) しかし, 上の図で与えた彩色に関して  $\mathcal{A}(P_i)$  の多変数母関数を考えると,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P_1)} z^\sigma = \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_1 z_2 z_3)(1 - z_1 z_2 z_4)(1 - z_1 z_2 z_3 z_4)(1 - z_1 z_2^2 z_3 z_4)},$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P_2)} z^\sigma = \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)^2(1-z_1z_2z_3)(1-z_1z_2z_4)(1-z_1z_2z_3z_4)},$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P_1)} z^\sigma = \frac{1}{(1-z_2)^2(1-z_1z_2)(1-z_1z_2z_3)(1-z_1z_2z_4)(1-z_1z_2z_3z_4)}$$

となることがわかる。つまり、 $P_1, P_2, P_3$  はいずれも 4 色つき鉤公式をもつ半順序集合である。

### 3 $d$ -complete な半順序集合に対する $(q, t)$ 鉤公式

この節では、Peterson–Proctor の鉤公式 (8) の  $(q, t)$  変形を考える。まず、連結かつ  $d$ -complete な半順序集合については、次が知られている。

**命題 3.1.** ([7, §3])  $P$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とする。このとき、

- (1)  $P$  はただ 1 つの極大元をもつ。
- (2)  $P$  は次数つき半順序集合である。つまり、写像  $r: P \rightarrow \mathbb{N}$  で、 $y$  が  $x$  をカバーするとき  $r(y) = r(x) + 1$  となるようなものが存在する。

以下、 $q, t$  を不定元とし、非負整数  $n, m$  に対して、

$$f_{q,t}(n; m) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 - q^i t^{m+1}}{1 - q^{i+1} t^m}$$

とおく。

**定義 3.2.**  $P$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とし、 $v_0$  をその最大元、 $r: P \rightarrow \mathbb{N}$  を次数関数とする。 $T$  を  $P$  の top tree とし、 $c: P \rightarrow T$  を  $d$ -complete な彩色で  $c(v) = v$  ( $v \in T$ ) となるものとする。  $P$ -partition  $\sigma \in \mathcal{A}(P)$  に対して、その重み  $W_P(\sigma; q, t)$  を

$$W_P(\sigma; q, t) = \frac{\prod_{\substack{x, y \in P \\ \text{s.t. } x < y, c(x) \sim c(y)}} f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); d(x, y)) \prod_{\substack{x \in P \\ \text{s.t. } c(x) = v_0}} f_{q,t}(\sigma(x); e(x, v_0))}{\prod_{\substack{x, y \in P \\ \text{s.t. } x < y, c(x) = c(y)}} f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); e(x, y)) f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); e(x, y) - 1)} \quad (9)$$

とおいて定義する。ここで、 $T$  において  $c(x)$  と  $c(y)$  が隣接しているとき  $c(x) \sim c(y)$  と表し、

$$d(x, y) = \frac{r(y) - r(x) - 1}{2}, \quad e(x, y) = \frac{r(y) - r(x)}{2}$$

である。(  $c(x) \sim c(y)$  ならば  $r(y) - r(x)$  は奇数であり、 $c(x) = c(y)$  ならば  $r(y) - r(x)$  は偶数である。)

予想 3.3.  $P$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とする. (9) で与えられる重み  $W_P(\sigma; q, t)$  を用いると,

$$\sum_{\sigma \in A(P)} W_P(\sigma; q, t) z^\sigma = \prod_{v \in P} \frac{(tz[H_P(v)]; q)_\infty}{(z[H_P(v)]; q)_\infty}. \quad (10)$$

例えば,  $q = t$  のときを考えると,  $f_{q,q}(n, m) = 1$ ,  $W_P(\sigma; q, q) = 1$ ,  $(tx; q)_\infty / (x; q)_\infty = 1/(1-x)$  だから, Peterson-Proctor の鉤公式 (8) により  $q = t$  のとき予想 3.3 が正しいことがわかる. また, 次のクラスの  $d$ -complete な半順序集合については予想が証明されている.

定理 3.4. 予想 3.3 は, 次の  $d$ -complete な半順序集合に対して成り立つ.

- (1) (岡田 [6]) 根つき木,
- (2) (岡田 [6]) Young 図形  $D(\lambda)$ ,
- (3) (岡田 [6]) 変形 Young 図形  $S(\mu)$ ,
- (4) (石川) bird.

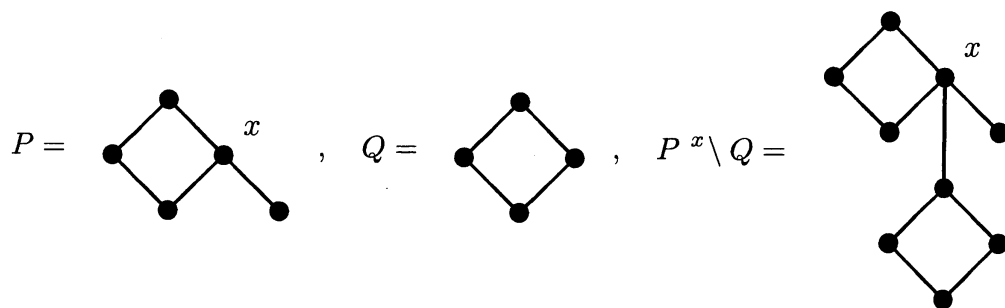
さらに, 次で定義する傾斜和を考えると, 予想 3.3 の証明は傾斜既約である場合に帰着することができる.

定義 3.5.  $P, Q$  を半順序集合とし,  $x \in P$  とする. このとき,  $u, v \in P \sqcup Q$  に対して, 次の (a), (b), (c) のいずれかが成り立つとき,  $u \geq v$  と定義する.

- (a)  $u, v \in P$  であり,  $P$  において  $u \geq v$  である.
- (b)  $u, v \in Q$  であり,  $Q$  において  $u \geq v$  である.
- (c)  $u \in P, v \in Q$  であり,  $P$  において  $u \geq x$  である.

このようにして得られる半順序集合  $P \sqcup Q$  を,  $P^x \setminus Q$  と表し,  $P$  と  $Q$  の  $x$  における傾斜和 (slant sum) と呼ぶ.

例 3.6.  $P, Q$  の Hasse 図形がそれぞれ下図の左側のように与えらえるとき,  $P^x \setminus Q$  の Hasse 図形は下図の右端のようになる.



命題 3.7. ([7, Proposition 3.B])  $P, Q$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とし,  $x \in P$  が次の条件 (a), (b) をみたしているとする.

- (a)  $x$  は  $T$  の top tree に含まれない.
- (b)  $x$  はどの  $d_k$  区間の最大元にもならない.

このとき, 傾斜和  $P^x \setminus Q$  も  $d$ -complete である.

( $q, t$ ) 鉤公式の予想 3.3 については, 次が成り立つ.



**命題 3.8.**  $P, Q$  を連結かつ  $d$ -complete な半順序集合とし,  $x \in P$  は命題 3.7 の条件 (a), (b) をみたしているとする. このとき, 予想 3.3 が  $P, Q$  の両方に対して成り立つならば, 予想 3.3 は傾斜和  $P \times Q$  に対しても成り立つ.

任意の  $d$ -complete な半順序集合は, 1 元からなる半順序集合と, 傾斜既約な半順序集合 (傾斜和に関してこれ以上分解できないもの) の傾斜和として一意的に分解でき, 傾斜既約なものが次の 15 系列に分類できることが知られている. ([7] を見よ.)

shapes, shifted shapes, birds, insets, tailed insets, banners, nooks, swivels, tailed swivels, tagged swivels, swivel shifts, pumps, tailed pumps, near bats, bat.

(shape, shifted shape はそれぞれ Young 図形, 変形 Young 図形のことである.) 従って, 命題 3.8 により, 予想 3.3 の証明は傾斜既約な場合に帰着できる.

## 4 別の $(q, t)$ 鉤公式

ここでは, 前節とは別の  $(q, t)$  変形を与える. 半順序集合  $P$  に対して,  $P$  から  $\mathbb{N}$  への写像 (条件は何も課さない) 全体のなす集合を  $\mathcal{M}(P)$  とする.  $k$  色つき鉤公式をもつ半順序集合の定義の関係式 (5) から, 次の命題がわかる.

**命題 4.1.**  $P$  を  $k$  色つき鉤公式をもつ半順序集合とする. このとき, 全単射

$$\Theta: \mathcal{A}(P) \ni \sigma \mapsto \hat{\sigma} \in \mathcal{M}(P)$$

で,

$$z^\sigma = \prod_{v \in P} \left( z^{h(\sigma)} \right)^{\hat{\sigma}(v)} \quad (\sigma \in \mathcal{A}(P)) \quad (11)$$

をみたすものが存在する.

**例 4.2.**  $P$  を根つき木とすると,  $P$  は  $\#P$  色つき鉤公式をもつ. このとき,  $\sigma \in \mathcal{A}(P)$  に対して,  $\hat{\sigma} \in \mathcal{M}(P)$  を

$$\hat{\sigma}(v) = \begin{cases} \sigma(v) & (v \text{ が根であるとき}) \\ \sigma(v) - \sigma(v') & (\text{その他}) \end{cases}$$

(ここで,  $v'$  は  $v$  の  $P$  における親である) によって定義すると, 対応  $\mathcal{A}(P) \ni \sigma \mapsto \hat{\sigma} \in \mathcal{M}(P)$  は命題 4.1 の性質 (11) をみたす全単射である.

命題 4.1 は全単射の存在を主張しているだけであり, 例 4.2 のように全単射  $\Theta$  を具体的に構成すること, あるいは,  $\hat{\sigma}$  の成分を  $\sigma$  の成分を用いて明示的に表すことは, 別の問題である. 例えば, 全単射  $\Theta$  を与えるアルゴリズムは, Young 図形の場合には Hillman–Grassl [4] によって, 変形 Young 図形の場合には Sagan [11] によってそれぞれ与えられているが, 一般の  $d$ -complete な半順序集合に通用するようなアルゴリズムの構成は未解決問題である. また,  $\Theta$  の明示公式については, ( $\#P$  が小さい場合を除けば) Young 図形の場合 (Berenstein–Kirillov [2], 足立 [1]) が知られているだけである.

命題 4.1 の全単射を用いると, 鉤公式の別の  $(q, t)$  変形を与えることができる.

**命題 4.3.**  $P$  を  $k$  色つき鉤公式をもつ半順序集合とし,  $\Theta: \mathcal{A}(P) \ni \sigma \mapsto \hat{\sigma} \in \mathcal{M}(P)$  を命題 4.1 の全単射とする. このとき,  $\sigma \in \mathcal{A}(P)$  の重み  $W'_P(\sigma; q, t)$  を

$$W'_P(\sigma; q, t) = \prod_{v \in P} f_{q,t}(\hat{\sigma}(v); 0) = \prod_{v \in P} \prod_{i=0}^{\hat{\sigma}(v)-1} \frac{1 - q^i t}{1 - q^{i+1}} \quad (12)$$

によって定義すると,

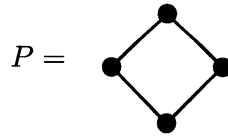
$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} W'_P(\sigma; q, t) z^\sigma = \prod_{v \in P} \frac{(t z^{h(v)}; q)_\infty}{(z^{h(v)}; q)_\infty}. \quad (13)$$

$d$ -complete な半順序集合に対しては, 予想 3.3 と命題 4.3 の 2 通りの  $(q, t)$  鉤公式が考えられる:

$$\prod_{v \in P} \frac{(t z[H_P(v)]; q)_\infty}{(z[H_P(v)]; q)_\infty} = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} W_P(\sigma; q, t) z^\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} W'_P(\sigma; q, t) z^\sigma. \quad (14)$$

しかし, (根つき木の場合を除いて) これらは異なる  $(q, t)$  変形である.

**例 4.4.**  $P = D(2, 2)$  を分割  $(2, 2)$  に対応する Young 図形とする.



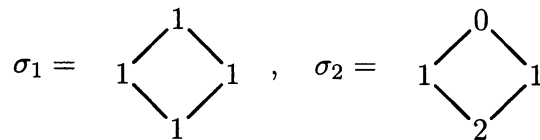
このとき, (14) における積は

$$\frac{(t z_{-1} z_0 z_1; q)_\infty}{(z_{-1} z_0 z_1; q)_\infty} \cdot \frac{(t z_0 z_1; q)_\infty}{(z_0 z_1; q)_\infty} \cdot \frac{(t z_{-1} z_0; q)_\infty}{(z_{-1} z_0; q)_\infty} \cdot \frac{(t z_0; q)_\infty}{(z_0; q)_\infty}$$

のようになる. 例えば,  $z_{-1} z_0^2 z_1$  の係数を考えると, 係数は

$$2 \left( \frac{1-t}{1-q} \right)^2$$

に等しい. また,  $z^\sigma = z_{-1} z_0^2 z_1$  となる  $P$ -partition は



の 2 つである.

まず, (9) で与えられる重みを計算すると,

$$W_P(\sigma_1; q, t) = f_{q,t}(1; 0) f_{q,t}(1; 1) = \frac{1-t}{1-q} \cdot \frac{1-t^2}{1-qt},$$

$$W_P(\sigma_2; q, t) = \frac{f_{q,t}(1; 0)^4 f_{q,t}(2; 1)}{f_{q,t}(2; 1) f_{q,t}(2; 0)} = \left( \frac{1-t}{1-q} \right)^4 \cdot \frac{(1-q)(1-q^2)}{(1-t)(1-qt)}$$

となる．一方，Hillman–Grassl 対応から定まる全単射  $\Theta : \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathcal{M}(P)$  を考えると，

$$\widehat{\sigma}_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & \diagdown \quad \diagup & 0 \\ & 1 & \end{array}, \quad \widehat{\sigma}_2 = \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 1 & \diagdown \quad \diagup & 1 \\ & 0 & \end{array}$$

となるから，(12) で与えられる重みは

$$W'_P(\sigma_1; q, t) = f_{q,t}(1, 0)^2 = \left( \frac{1-t}{1-q} \right)^2,$$

$$W'_P(\sigma_2; q, t) = f_{q,t}(1, 0)^2 = \left( \frac{1-t}{1-q} \right)^2$$

となる．よって，2通りの  $(q, t)$  鉤公式は異なるものであり，

$$\frac{1-t}{1-q} \cdot \frac{1-t^2}{1-qt} + \left( \frac{1-t}{1-q} \right)^4 \cdot \frac{(1-q)(1-q^2)}{(1-t)(1-qt)} = 2 \left( \frac{1-t}{1-q} \right)^2$$

のような非自明な関係式を含んでいる．

## 参考文献

- [1] 足立 進吾, Hillman–Grassl 対応の明示公式, 応用力学研究所研究集会報告 No. 19ME-S2 「戸田格子 40 周年 非線形波動研究の歩みと展望」(2007), Article No. 31.
- [2] A. Berenstein and A. N. Kirillov, The Robinson-Schensted-Knuth bijection, quantum matrices and piece-wise linear combinatorics, 13th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Arizona State University (2001), (available at <http://www.fpsac.org/FPSAC01/articles.html>).
- [3] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–324.
- [4] A. P. Hillman and R. M. Grassl, Reverse plane partitions and tableau hook numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* **21** (1976), 216–221.
- [5] E. R. Gansner, The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A* **30** (1981), 71–89.
- [6] S. Okada,  $(q, t)$ -Deformations of multivariate hook product formulae, *J. Algebraic Combin.* **32** (2010), 399–416.

- [7] R. A. Proctor, Dynkin diagram classification of  $\lambda$ -minuscule Bruhat lattices and  $d$ -complete posets, *J. Algebraic Combin.* **9** (1999), 61–94.
- [8] R. A. Proctor, Minuscule elements of Weyl groups, the number game, and  $d$ -complete posets, *J. Algebra* **213** (1999), 272–303.
- [9] R. A. Proctor, Informal description of the hook length property for posets, <http://www.math.unc.edu/Faculty/rap/Hook.html>.
- [10] R. A. Proctor,  $d$ -Complete posets generalize Young diagrams for the jeu de taquin property [arXiv:0905.3716](https://arxiv.org/abs/0905.3716).
- [11] B. E. Sagan, Enumeration of partitions with hooklengths, *Europ. J. Combin.* **3** (1982), 85–94.
- [12] R. P. Stanley, Ordered structures and partitions, *Mem. Amer. Math. Soc.* **119** (1972).