

## 非線形非最小位相系における制御則の設計

北海道大学 工学部 島 公脩 横道 政裕

1995 年 1 月 21 日

## 1 序論

近年、非線形常微分方程式によって記述される系の制御において、非線形制御理論の一手法である幾何学的手法を用いた制御の実用化が進んでいる。幾何学的手法を用いて制御則の設計を行う場合、制御対象の最小位相性が重視される。これは幾何学的手法を用いた制御則が、制御対象の入出力関係を記述する量から、それ以外の量、すなわち内部状態量を分離する構造を持つことによる。この場合制御対象が最小位相系であれば、出力を有界な値に制御した場合に系全体の安定性が保証される。従来は制御対象の最小位相性を最初に仮定した上でいくつかの制御問題について研究がなされてきたが、現実の制御系には最小位相系とはならないものが多く存在する。そこで非最小位相系に対する制御理論の構築が求められる。

非線形非最小位相系としては以下の二つの場合が考えられる。ひとつは、制御対象が一定次元の内部状態を持つが、ゼロダイナミクスが漸近安定とはならない場合であり、もう一つは制御対象が一定次元の内部状態を持たない場合である。後者は特異点を持つ系と呼ばれる。

本稿では前者の場合において、漸近モデルマッチング制御問題に対して不変多様体の概念を用いた手法を考察する。

## 2 非線形非最小位相系

本節では次式で表現される  $m$  入力  $m$  出力非線形制御系を考える。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u^i \\ y_i &= h_i(x), i = 1, \dots, m\end{aligned}\quad (1)$$

ここで  $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  であり  $u := (u^1, \dots, u^m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $y := (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$  である。また、 $\mathbb{R}^n$  の原点がこ

の系の平衡点であると仮定する。ここで関数  $h(x)$  のベクトル場  $f(x)$  に沿った Lie 微分及びそのくり返しを

$$\begin{aligned}L_f h(x) &:= \langle dh, f \rangle(x) \\ L_f^k h(x) &:= L_f(L_f^{k-1} h)(x)\end{aligned}$$

のように定義する。このとき制御対象 (1) 式において、

$$\begin{cases} L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \forall j = 1, \dots, m; \\ \quad \quad \quad \forall k = 0, \dots, \rho_i - 2 \\ \exists j; L_{g_j} L_f^{\rho_i-1} h_i(0) \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

となる自然数  $\rho_i$  が全ての  $i$  に対して存在すると仮定する。このとき自然数の列  $(\rho_1, \dots, \rho_m)$  を系 (1) 式のベクトル相対次数と呼ぶ。さらに  $m \times m$  の行列

$$\{A_{ij}\}(x) := L_{g_i} L_f^{\rho_j-1} h_j(x) \quad (3)$$

を無干渉化行列と呼ぶ。もし無干渉化行列  $A(x)$  が原点の近傍上で正則であれば、

$$\bar{a}(x) := (L_f^{\rho_1} h_1(x), \dots, L_f^{\rho_m} h_m(x))^T$$

としたときに制御対象 (1) 式は、静的状態フィードバック

$$u = A^{-1}(x)(-\bar{a}(x) + v) \quad (4)$$

によって入出力線形化及び無干渉化が可能となる。ただし  $v = (v^1, \dots, v^m)^T$  である。また、ある座標変換  $x = \Phi(z, \xi)$  によって制御対象 (1) 式は、標準形

$$\begin{aligned}z_i^1 &:= h_i(x), i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i^{\rho_i-1} &= z_i^{\rho_i} \\ \dot{z}_i^{\rho_i} &= a_i(z, \xi) + \sum_{j=1}^m b_{ij}(z, \xi)u^j \\ \dot{\xi} &= \eta(z, \xi) + P(z, \xi)u,\end{aligned}\quad (5)$$

に変換される。ここで  $a_i(z, \xi) = \bar{a}_i(\Phi(z, \xi))$  であり、 $b_{ij}(z, \xi)$  は無干渉化行列の  $(i, j)$  要素である。また、 $\rho_1 + \dots + \rho_m =: \rho$  とすると、 $\xi \in \mathbb{R}^{n-\rho}$  であり、入出力無干渉化フィードバックによって入出力関係から無関係になるという意味で  $\xi$  は内部状態と呼ばれる。さらに初期状態が

$$z_1^1(0) = \dots = z_m^{\rho_m}(0) = 0$$

である場合に、静的状態フィードバック

$$u^i = -A_{ij}^{-1}(x)\bar{a}(x)$$

によって出力を恒等的に零にすることが可能である。そしてこのときの閉ループ系の挙動、

$$\dot{\xi} = \eta(0, \xi) - P_j(0, \xi)A^{-1}(\Phi(0, \xi))a(0, \xi) \quad (6)$$

を系(1)式のゼロダイナミクスといい、ゼロダイナミクスが原点において漸近安定である系のことを最小位相系という。入出力無干渉化制御則(4)式に基づいて出力のある信号  $Y(t)$  への追従制御を行う際には制御則は

$$v = k(z, Y)$$

という構造を持つ。そのとき内部状態の挙動は

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(z, \xi) \\ &+ P(z, \xi)A^{-1}(-a(z, \xi) + k(z, Y)) \end{aligned} \quad (7)$$

という、 $z, Y$  を入力とする系として表現される。

系(1)式が最小位相系であると、入出力線形化制御則を用いて出力を有界な値に制御した場合には内部状態の有界性も保証される。しかし、ゼロダイナミクスが漸近安定ではない場合にはその制御則では内部状態の有界性は保証されない。

### 3 漸近モデルマッチング制御

漸近モデルマッチング制御 (以降 AMM と略記) とは、制御対象の望ましい出力の応答を示す制御系を規範モデルとし、制御対象と規範モデルとの間の出力誤差を漸近的に安定化し、さらに閉ループ系を安定に保つ制御である。また、誤差の挙動が規範モデルの入力の影響を受けることを許すという点が安定なモデル追従制御問題との違いである。本稿では、出力レギュレーション問題において用いられている不変多様体の概念を用いて AMM 問題を解くことを考える。

#### 3.1 問題設定

本節で対象とするのは次式のようにすでに数式表現されている  $n$  次元  $m$  入力  $m$  出力アフィン非線形制御系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u^i \\ &=: F(x, u) \\ y_i &= h_i(x), i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

および規範モデル

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= f_M(x_M) + \sum_{i=1}^m g_{Mi}(x)u_M^i \\ &=: F_M(x_M, u_M) \\ y_{Mi} &= h_{Mi}(x_M), i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (9)$$

と出力誤差

$$e_i = h_i(x) - h_{Mi}(x_M) \quad (10)$$

である。ただしこれらの系において原点が平衡点であり、各写像は滑らかであると仮定する。

定義 3.1 系(8)-(10)式を考える。これらの系に対して、適当な次元  $p$  の動的補償器

$$\begin{aligned} u^i &= \alpha^i(x, x_M, \zeta) + \beta^i(x, x_M, \zeta)u_M \\ \dot{\zeta} &= \phi(x, x_M, \zeta, u_M), \zeta \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (11)$$

と、動作点の近傍  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{U}_M \subset \mathbb{R}^{n_M}, \mathcal{U}_\zeta \subset \mathbb{R}^p$ , および正の実数  $k$  で、 $|u_M(t)| \leq k$  となるすべての  $u_M(t)$  に対して条件

(AM1):  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_M \times \mathcal{U}_\zeta$  上の任意の初期状態に対して  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  である。

(AM2):  $x_M = 0, u_M = 0$  のとき、閉ループ系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)\alpha^i(x, 0, \xi) \\ \dot{\zeta} &= \phi(x, 0, \zeta, 0) \end{aligned}$$

は局所指数漸近安定である。

を満足するものが存在するならば局所漸近モデルマッチング制御問題は可解である。□

ただし本稿では静的フィードバックのみを考える。

### 3.2 幾何学的手法による結果

ここでは制御対象 (8) 式がベクトル相対次数  $(\rho_1, \dots, \rho_m)$  を持ち、無干渉化行列が正則であると仮定する。このとき、制御対象 (8) 式、規範モデル (9) 式を一つの系と考え、誤差 (10) 式を出力と考える。ここで規範モデルの弱ベクトル相対次数を  $(\nu_1, \dots, \nu_m)$  とし、関係式

$$\nu_i \geq \rho_i, i = 1, \dots, m \quad (12)$$

が成立するならば、

$$\begin{aligned} z_j^i &:= L_f^{j-1} h_i(x) - L_{f_M}^{j-1} h_{Mi}(x_M) \\ &=: z_{P_j}^i(x) - z_{M_j}^i(x_M) \end{aligned}$$

とすると、合成状態空間  $\mathbb{R}^{n+n_M}$  上の適当な座標変換によって合成系は

$$\begin{aligned} z_1^i &:= h_i(x) - h_{Mi}(x_M) = e_i, i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &= z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &= a_i(z_P, \xi) + u^j b_{ij}(z_P, \xi) \\ &\quad + a_{Mi}(x_M) + c_i(x_M) u_M \\ \dot{\xi} &= \eta(z_P, \xi) + P(z_P, \xi) u \\ \dot{x}_M &= F_M(x_M, u_M) \end{aligned} \quad (13)$$

と記述される。ただし  $\xi \in \mathbb{R}^{n-p}$  である。ここで  $e$  から制御対象の入力までを線形化するフィードバック

$$u = B^{-1}(x)(-a(x) + a_M(x_M) + c(x_M)u_M + v)$$

を用いることによって、線形誤差ダイナミクス

$$e_i^{(\rho_i)} = v^i$$

が得られる。このとき誤差を安定化する  $v = k(z)$  は容易に設計可能である。制御対象のゼロダイナミクスは

$$\dot{\xi} = \eta(0, \xi) - P(0, \xi)B^{-1}(0, \xi)a(0, \xi)$$

であり、 $a_M(0) = 0, z_M(0) = 0$  であることを考慮に入れて、 $x_M = 0, u_M = 0$  の場合の閉ループ系を求めると

$$\begin{aligned} \dot{z}_P &= K(z_P) \\ \dot{\xi} &= \eta(z_P, \xi) - P(z_P, \xi)B^{-1}(z_P, \xi)a(z_P, \xi) \end{aligned} \quad (14)$$

となり ( $\dot{z} = K(z)$  は漸近安定としてある)、制御対象が最小位相系であれば、条件 (AM1), (AM2) が満足される。よって、制御対象が最小位相系であり (12) 式が成立することは AMM が可能であるための十分条件である。しかし、制御対象が最小位相系ではない場合にはその限りではない。

### 3.3 FBI 方程式と誤差ゼロ多様体

定義 3.2 系 (8)–(10) 式に対して、 $C^k$  ( $k > 2$ ) 写像  $\pi, c$  に関する方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial x_M}(F_M(x_M, u_M)) &= F(\pi(x_M), c(x_M, u_M)), \\ \pi(0) &= 0, c_i(0, 0) = 0, i = 1, \dots, m \\ h_i(\pi(x_M)) - h_{Mi}(x_M) &= 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

を FBI 方程式と呼び、その解  $x = \pi(x_M)$  の原点を通るグラフのことを誤差ゼロ多様体と呼ぶ。□

その定義からも明らかなように、誤差ゼロ多様体は、フィードバック  $u = c(x_M, u_M)$  によって閉ループ系の不変多様体となり、その上では誤差がゼロとなるような多様体である。

ここで力学系における安定多様体の理論を用いることによって以下の定理が得られる。

定理 3.1 系 (8)–(10) 式において制御対象の線形近似系が可安定であり、規範モデルが局所 BIBS (bounded input-bounded state) であるとし、さらに FBI 方程式を解くことが出来たとする。このとき、制御則

$$u^i = c^i(x_M, u_M) + K_i(x - \pi(x_M)), i = 1, \dots, m \quad (16)$$

によって、十分小さな  $x, x_M$ , そして  $u_M$  に対して漸近モデルマッチング制御問題は可解である。ただし  $u^i = K^i x$  は制御対象の線形近似系の漸近安定化フィードバックである。□

さらに付加的な仮定の下で誤差の指数漸近安定性を示すことが可能である。

定理 3.2 系 (8) – (10) 式に関して以下の条件が成立するものとする。

- FBI 方程式が原点のある開近傍  $V \subset \mathbb{R}^{n_M}$  上で可解であり、

- 規範モデル (9) 式は局所 BIBS 安定である。つまりある正の実数  $\epsilon_0$  および  $V_+$  上の正の単調増加連続関数  $a_1(\cdot)$  および  $a_2(\cdot)$  で、 $\epsilon < \epsilon_0$  なる全ての  $\epsilon > 0$  および  $|u_M| \leq a_2$  である任意の  $u_M(t)$  に対して  $|x_M(0)| \leq a_1$  である規範モデルの解軌道のノルムは  $\epsilon$  以下となるものが存在する。

- さらに

$$\bar{\epsilon} := \min_{x_M \in V} |x_M| < \epsilon_0$$

および

$$\bar{M} := \{(\pi(x_M), x_M) | x_M \in V\}$$

としたときに  $|u_M(t)| \leq a_2(\bar{\epsilon}) =: k$  なるすべての連続可微分な  $u_M(t)$  および  $B_{a_1(\bar{\epsilon})}$  上の初期状態に対して規範モデル (9) 式はすべての時刻において解を持ち、さらに  $(\pi(x_M(t)), x_M(t))$  もまた  $M$  上に留まる。

- $V$  上のすべての  $x_M$  および  $|u_M| \leq k$  に対して、

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} F(\pi(x_M), c(x_M, u_M)), g_i(\pi(x_M)) \right)$$

は  $u = Kx$  によって可安定である。

このとき、正数  $k_1, k_2, k_3, \gamma$ , および  $\lambda$  で、

$$\begin{aligned} |x(0) - \pi(x_M(0))| &\leq k_1, \\ |x_M(t)| &\leq k_2, \\ |\dot{u}_M(t)| &\leq k_3 \end{aligned}$$

である場合に

$$|x(t) - \pi(x_M(t))| \leq \gamma e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

となるものが存在する。

### 3.4 例題

次式のような制御対象、規範モデル、そして誤差を考える。この例題は、本節での制御則の有効性を示す目的で示したものであり、特に現実的な系を念頭に置いているわけではないことをあらかじめお断りしておく。

制御対象:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (1 + x_2^2)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1^3 + x_1 x_2 \end{aligned} \quad (17)$$

規範モデル:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{M1} &= x_{M2} \\ \dot{x}_{M2} &= x_{M3} \\ \dot{x}_{M3} &= -6.25x_{M1} - 8.75x_{M2} \\ &\quad - 5x_{M3} - 1.5x_{M4} + u_M \\ \dot{x}_{M4} &= x_{M1} + x_{M1}^3 \end{aligned} \quad (18)$$

誤差:

$$e = x_1 - x_{M1}. \quad (19)$$

制御対象 (17), (18) 式はともに原点近傍において相対次数 2 及び 3 を持つので厳密なモデルマッチング制御および安定性を考慮しないモデル追従制御は可能である。また、制御対象のゼロダイナミクスは

$$\dot{x}_3 = 0$$

であるため、最小位相系ではない。また、誤差 (19) 式を出力と見なし、 $u_M = 0$  とした場合の合成系のゼロダイナミクスは

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_{M1} + x_{M1}^3 + x_{M1}x_{M2} \\ \dot{x}_{M1} &= x_{M2} \\ \dot{x}_{M2} &= x_{M3} \\ \dot{x}_{M3} &= -6.25x_{M1} - 8.75x_{M2} - 5x_{M3} - 1.5x_{M4} \\ \dot{x}_{M4} &= x_{M1} + x_{M1}^3 \end{aligned}$$

であり、これもまた漸近安定ではない。よって、幾何学的アプローチによるモデル追従制御則を用いた場合には閉ループ系の安定性は保証されない。しかし、規範モデル (18) 式は局所 BIBS であり、制御対象 (17) 式は線形可制御である。ここで制御対象の線形近似系の漸近安定化フィードバックは

$$u = Kx := -(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)$$

という線形状態フィードバックとして記述される。ただしパラメータ  $a_1, a_2$ , 及び  $a_3$  は、多項式

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_3$$

がフルヴィッツ多項式となるものとする。系 (17) - (19) に対して FBI 方程式を陽に解くことが可能でありその解は

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{M1} =: \pi_1(x_M) \\ x_2 &= x_{M2} =: \pi_2(x_M) \\ x_3 &= x_{M4} + \frac{1}{2}x_{M1}^2 =: \pi_3(x_M) \\ c(x_M, u_M) &= \frac{-x_{M1}^2 + x_{M3}}{1 + x_{M2}^2}. \end{aligned}$$

として与えられる。よって、制御則は

$$u = \frac{-x_{M1}^2 + x_{M3}}{1 + x_{M2}^2} + K(x - \pi(x_M)) \quad (20)$$

として与えられる。

Fig.2.1 はシミュレーション結果である。ただし初期値および安定化フィードバック係数は

$$(x_1, x_2, x_3, x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, x_{M4})(0) \\ = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \dots$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (3, 2, 3)$$

としてある。図において  $u_M(t)$  は、

- 細実線:  $u_M(t) = \sin t$
- 太実線:  $u_M(t) = 5 \sin(3t)$

である。Fig.2.1 は誤差の挙動を示している。

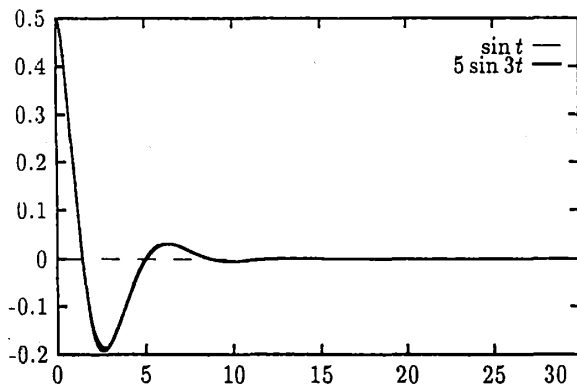


Fig.2.1: Trajectories of the errors.

Fig.2.1 より、どちらの場合にも誤差が収束していることがわかる。しかし、その軌道は異なっており、漸近モデルマッチング制御は達成しているが、モデル追従制御は達成されていないことがわかる。

### 3.5 FBI 方程式の近似解法

FBI 方程式 (15) 式は偏微分方程式であり、一般にその厳密解を求めることは困難である。よって実際には何らかの近似解法を用い、そしてその場合の制御性能の評価をする必要がある。本節では FBI 方程式の解を低次の項から求める方法を考える。その場合の近似解を以下のように定義する。

**定義 3.3** 系 (8)-(10) 式を考える。このとき原点  $o \in \mathbb{R}^{n_M}$  の近傍  $V$  及び半径  $\epsilon$  の開球  $B_\epsilon \subset \mathbb{R}^m$  と、原点  $(x_M, u_M) = (0, 0)$  において零となる滑らかな関数  $\pi_{(k)}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c_{(k)}: V \times B_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^m$  で、 $V \times B_\epsilon$  上の  $x_M, u_M$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_M}(F_M(x_M, u_M)) &= F(\pi_{(k)}(x_M), c_{(k)}(x_M, u_M)) \\ &\quad + O(x_M^{(k+1)}) + O(x_M^{(k)})u_M, \\ h(\pi_{(k)}(x_M)) &= h_M(x_M) + O(x_M^{(k+1)}) \end{aligned} \quad (21)$$

となるものが存在するとき  $\pi_{(k)}(x_M), c_{(k)}(x_M, u_M)$  のことを FBI 方程式 (15) 式の  $k$ -次の近似解と呼ぶ。ここで  $O(x_M^{(k+1)})$  とは、

$$\lim_{x_M \rightarrow 0} \frac{|O(x_M^{(k+1)})|}{|x_M|^{k+1}} \quad (22)$$

が有限の定数になるような関数のクラスである。□

**注意 3.1** 系 (8)-(10) 式に対する FBI 方程式の 1 次の近似解は、明らかにそれらの線形近似系に対する FBI 方程式の解となる。

ここで、近似解を用いた場合の誤差に関して、以下の結果が得られる。

**定理 3.3** 系 (8)-(10) 式を考える。ここで FBI 方程式の  $k$  次までの近似解  $\pi_{(k)}(x_M), c_{(k)}(x_M, u_M)$  が得られ、さらに定理 3.2 における 2 つ目から 4 つ目の条件が満足されているとする。また、制御対象の出力  $h(x)$  は Lipschitz 連続であると仮定する。このとき、与えられた  $\rho > 0$  に対して正の定数  $\epsilon_1, \epsilon_2, k_1$ , そして  $k_2$  で、以下の性質を持つものが存在する。規範モデル (9) 式の解軌道  $x_M(t)$  に対して  $q(t) := \pi_{(k)}(x_M(t))$  と  $x(0)$  が

$$\begin{aligned} |x(0) - q(0)| &< \epsilon_1, \\ \max\{|x_M(t)|, |u_M(t)|\} &< \epsilon_2, t \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

を満たすならば閉ループ系は全ての  $t \geq 0$  において一意解を持ち、関係式

$$\begin{aligned} |x(t) - q(t)| &< \rho, t \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - q(t)| &< k_1 \epsilon_2^{k+1} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| &< k_2 \epsilon_2^{k+1} \end{aligned} \quad (24)$$

を満足する。□

この近似法を用いる利点としては、

- 解くべき方程式が代数方程式のみとなるため、容易に計算機に組み込むことが可能である
- 厳密な解が得られない場合においても、ある次数までの解が得られればある程度の制御が可能である

等が挙げられる。さらに高次の項を、最小二乗法、あるいは遺伝的アルゴリズム等を用いて導出することによってより良い制御性能を得ることが可能となるであろう。

### 3.6 標準形と FBI 方程式

FBI 方程式は制御対象の状態空間の座標系のとりかたには依存しない。しかし、制御対象が(ベクトル)相対次数を持つ場合には FBI 方程式の解を簡略化することが可能である。以降は制御対象の状態空間上の局所座標系として標準形(5)式の座標系 $(z, \xi)$ を用いる。状態変数 $z$ に関する FBI 方程式の解は、 $\pi_z(x_M)$ については

$$\pi_{-j}^i(x_M) = L_{f_M+g_M u_M}^{i-1} h_{Mj}(x_M), i = 1, \dots, \rho_j \quad (25)$$

となる。そこで、(25)式の左辺には $u_M$ が含まれないことより、

$$\begin{aligned} L_{g_{Mk}} L_{f_M}^i h_{Mj}(x_M) &= 0, \\ j, k &= 1, \dots, m; \\ i &= 0, \dots, \rho_j - 2 \end{aligned} \quad (26)$$

が成立しなければならない。また写像 $c^i(x_M, u_M)$ は、 $\pi_\xi(x_M)$ が求められれば

$$\begin{aligned} c^i(x_M, u_M) &= \bar{A}_{ij}^{-1}(\pi_z, \pi_\xi) \left( -L_{f_M}^{\rho_j} h_{Mj}(\pi_z, \pi_\xi) \right. \\ &\quad \left. + L_{f_M+g_{Mk} u_M}^{\rho_j} h_{Mj}(x_M, u_M) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

として与えられる。ただし

$$\bar{A}(z, \xi) := A(x)$$

である。また、この場合 $\xi$ に関する FBI 方程式(シルベスター方程式)は、 $x_M, u_M, \pi(x_M)$ の既知関数である $c(x_M, u_M; \pi(x_M))$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_\xi}{\partial x_M} F_M(x_M, u_M) &= \eta(\pi_z, \pi_\xi) \\ &\quad + P_j(\pi_z, \pi_\xi) c^j(x_M, u_M; \pi(x_M)) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。よって以下の命題が得られる。

**命題 3.1**  $m$  入力  $m$  出力系(8) - (10) 式を考える。ここで制御対象(8)式において無干渉化行列が正則である場合、FBI 方程式(15)式が可解であるための必要十分条件は(26)式が成立し、シルベスター方程式(28)式が可解であることである。□

### 3.7 制御則の改良

前節での議論によって、制御対象が相対次数を持つ、あるいは無干渉化行列が正則である場合には FBI 方程式の可解性はシルベスター方程式の可解性に帰着されることが示された。本節では、偏微分方程式の簡略化および制御性能の向上を図るために制御則の改良を試みる。本節では入出力線形化フィードバックの前もっての導入を考える。以降は、制御対象は既に標準形(5)式によって記述されているものとし、 $\mathbb{R}^n$ 上の座標系として $(z, \xi)$ を用いる。制御対象(5)式に入出力線形化フィードバック(4)式を施すと、

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &:= h_i(x), i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i^{\rho_i-1} &= z_i^{\rho_i} \\ \dot{z}_i^{\rho_i} &= v^j \\ \dot{\xi} &= \eta(z, \xi) \\ &\quad + P(z, \xi) \bar{A}^{-1}(z, \xi) (-a(z, \xi) + v), \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(z, \xi) &:= \eta(z, \xi) - P(z, \xi) \bar{A}^{-1}(z, \xi) a(z, \xi), \\ \bar{P}(z, \xi) &:= P(z, \xi) \bar{A}^{-1}(z, \xi) \end{aligned}$$

と定義する。このとき

$$\dot{\xi} = \bar{\eta}(0, \xi) \quad (30)$$

が制御対象のゼロダイナミクスである。条件(26)式が満足されているものとする。FBI 方程式の解は、 $z$ に関してはフィードバック変換前と同じものになる。また $v$ についての写像 $\bar{c}^j(x_M, u_M)$ は、陽に

$$\bar{c}^i(x_M, u_M) = L_{F_M}^{\rho_i} h_{Mi}(x_M, u_M), i = 1, \dots, m \quad (31)$$

として与えられる。また、この場合のシルベスター方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_\xi}{\partial x_M} F_M(x_M, u_M) &= \bar{\eta}(\pi_z, \bar{\pi}_\xi) \\ &\quad + \bar{P}_j(\pi_z, \bar{\pi}_\xi) \bar{c}^j(x_M, u_M) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。このとき問題となるのは二つのシルベスター方程式 (28), (32) 式の可解性の関係であるが、簡単な計算によりこの二つの方程式の解は一致することを示すことができる。よって、以下の命題が得られる。

命題 3.2 漸近モデルマッチング問題におけるシルベスター方程式の可解性は正則なフィードバック変換のもとで不変である。□

また、制御対象の指数漸近安定化可能性はフィードバック不変である。よって、フィードバック変換前の系 (5) 式に対してシルベスター方程式が可解であれば、入出力線形化された系 (29) 式に対する指数漸近安定化制御則

$$v = F_z z + F_\xi \xi =: Fx$$

を用いた制御則、

$$u^i = \bar{A}_{ij}^{-1}(z, \xi) \left( -a_j(z, \xi) + \bar{c}^j(x_M, u_M) + F^j(x - \pi(x_M)) \right) \quad (33)$$

によっても漸近モデルマッチングは可能である。

この新しい制御則 (33) 式を用いた場合の閉ループ系の特徴は以下の通りである。

- 1 入力 1 出力系の場合には閉ループ系の非線形性を一部消去することが可能であるので、吸引領域を拡大することが可能であると予想される。
- 多入力多出力系の場合には、制御則には安定化項以外に  $\pi$  の知識は不要であるため、可安定接分布の次元だけシルベスター方程式の次元を減らすことが可能である。

#### 4 おわりに

本稿では非線形非最小位相系の漸近モデルマッチング制御における制御則の設計法として、FBI 方程式に基づくものを提案した。

#### 参考文献

- [1] A. Isidori, *Nonlinear control systems*, Second Edition, Springer Verlag, 1989.
- [2] 石動、島, “Invariance の理論とその応用 - VIII. モデル追従制御系,” システムと制御, vol.29, No.5, pp.322-330, 1985.
- [3] M.D. Di Benedetto and J.W. Grizzle, “Qualitative aspects of asymptotic model matching,” *Nonlinear control systems design 1992*. (M. Fliess Ed.), Proceedings of the 2nd IFAC Symposium, pp.327-329, 1993.
- [4] M. Yokomichi and M. Shima, “Approximate model following control for nonlinear systems,” *Proceedings of the 1st Asian Control Conference*, pp.II-57-II-60, 1994.
- [5] 横道、上田、石動、島, “非線形系の近似モデル追従制御,” 北海道大学工学部研究報告, 第 167 号, pp.147-155, 1994.