

共役類の積とウィッテンL-関数の特殊値との関係について

東京工業大学大学院 理工学研究科数学専攻 関 正媛*

Jeongwon Min

Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

1 ウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数

まず, ウィッテンゼータ関数とウィッテンゼータ関数は次のように定義される.

定義 1.

- (1) コンパクト位相群 G についてウィッテンゼータ関数は次のように定義される (Witten [7]):

$$\zeta_G^W(s) := \sum_{\rho \in \hat{G}} (\deg \rho)^{-s},$$

ただし $\hat{G}$ は G のユニタリ双対である.

- (2) コンパクト位相群 G 及び n 個の共役類 $C_1, \dots, C_n \in \text{Conj}(G)$ についてウィッテンL-関数は次のように定義される (落合-黒川 [4]):

$$\zeta_G^W(s; C_1, \dots, C_n) = \sum_{\rho \in \hat{G}} \frac{\chi(C_1)}{\deg \rho} \dots \frac{\chi(C_n)}{\deg \rho} (\deg \rho)^{-s},$$

ただし $\hat{G}$ は G のユニタリ双対であり, $\chi(C)$ は $g \in C$ における指標, つまり $\text{trace}(\rho(g))$ のことである. G の共役類 $\{1\}$ については $\chi(\{1\}) = \deg \rho$ となるので, 定義から $\zeta_G^W(s; \{1\}) = \zeta_G^W(s)$ となることがわかる.

ここでウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数の例をいくつか取り上げたい.

例 1. $G = S_3$ のとき, ウィッテンゼータ関数とウィッテンL-関数は次のように表される. S_3 の各共役類に関する指標は次のように表される:

*日本学術振興会特別研究員 DC

	(1)	(12)	(123)
Trivial	1	1	1
Alternating	1	-1	1
Standard	2	0	-1

定義に従ってウィッテンゼータ関数とウィッテン L-関数を求めてみると次のようになる.

$$(1) \zeta_{S_3}^W(s; (1)) = \zeta_{S_3}^W(s) = 2 + 2^{-s},$$

$$(2) \zeta_{S_3}^W(s; (12)) = 0,$$

$$(3) \zeta_{S_3}^W(s; (123)) = 2 - 2^{-s-1}.$$

例 2. $G = SU(2)$ の場合について考える. $SU(2)$ に関するウィッテンゼータ関数 $\zeta_{SU(2)}^W(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と一致する. また, $SU(2)$ の元 g は $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ と共役になることから, $SU(2)$ の共役類と $\theta \in [0, \pi]$ を対応づけることができる. このとき, $SU(2)$ の共役類 C_j に対応する $\theta \in [0, \pi]$ を θ_j とおくと, $SU(2)$ のウィッテン L-関数は次のようになる (詳細は落合-黒川 [4], 関 [5] 参照).

$$\zeta_{SU(2)}^W(s; C_1, \dots, C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_1)}{\sin \theta_1} \dots \frac{\sin(n\theta_r)}{\sin \theta_r} n^{-s-r}.$$

ただし, $\theta = 0$ または π のとき, $\frac{\sin(n\theta)}{n \sin \theta}$ を次のように考えることにする.

$$\frac{\sin(n\theta)}{n \sin \theta} = \begin{cases} 1 & \theta = 0 \\ (-1)^{n-1} & \theta = \pi. \end{cases}$$

2 ウィッテンゼータ関数とウィッテン L-関数の特殊値

事実 1. G が有限群の場合, G の共役類 C について $\zeta_G^W(-2; C)$ は次のようになる:

$$\zeta_G^W(-2; C) = \begin{cases} |G| & C = \{1\} \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

これは指標の直交性によって得られるものである. もっと詳しく述べると次のようなことである. ここで $g \in C$ である.

$$\begin{aligned} \zeta_G^W(-2; C) &= \sum_{\rho \in \hat{G}} \frac{\text{trace}(\rho(g))}{\deg(\rho)} \deg(\rho)^2 \\ &= \sum \text{trace}(\rho(g)) \deg(\rho) \\ &= \sum \text{trace}(\rho(g)) \overline{\text{trace}(\rho(1))} \\ &= \begin{cases} |G| & C = \{1\} \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \end{aligned}$$

事実 2.

- (1) $G = SU(2)$ あるいは $SU(3)$ のときは, $s = -2$ はウィッテン L-関数 $\zeta_G^W(s; C)$ の零点となる.
- (2) $G = SU(2)$ の場合, $s = -2$ はウィッテン L-関数 $\zeta_G^W(s; C_1, C_2)$ の零点となる.
- (3) $G = SU(2)$ の場合, 必ずしもウィッテン L-関数 $\zeta_G^W(s; C_1, \dots, C_n)$ が $s = -2$ を零点として持つとは限らない.

3 ウィッテン L-関数の特殊値と 共役類の積との関係

我々は次のような研究を行っていた.

定理 1 (関 [5]). $n = 3$ のとき, $\zeta_{SU(2)}^W(s; C_1, C_2, C_3)$ に関して次が成り立つ:

- (1) -4 以下のすべての負の偶数について, $\zeta_{SU(2)}^W(m; C_1, C_2, C_3) = 0$ が成り立つ.
- (2) 特に $\zeta_{SU(2)}^W(-2; C_1, C_2, C_3)$ は次のようになる.

$$\zeta_{SU(2)}^W(-2; C_1, C_2, C_3) = \begin{cases} \frac{\pi}{4 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3} & (\theta_j)_{1 \leq j \leq 3} \in \text{Int}(V), \\ \frac{\pi}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3} & (\theta_j)_{1 \leq j \leq 3} \in \text{Int}(\cup(S_k \cap V)), \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

ただし S_k と V は次のようなものである.

$$V = \begin{aligned} & \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leq 2\pi\} \\ & \cap \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \geq 0\} \\ & \cap \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \leq 0\} \\ & \cap \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \geq 0\}, \end{aligned}$$

$$S_1 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = 0\}$$

$$S_2 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 0\}$$

$$S_3 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 = 0\}$$

$$S_4 = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi\}.$$

また, $SU(2)$ の共役類の積について次のようなことが Jeffrey と Weitsman[2] により研究されていた:

命題 1. C_j ($j = 1, 2, 3$) に対応する $\theta \in [0, \pi]$ を θ_j とおく. 言い換えると, $C_j \ni g_j \sim \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ ということである. このとき, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi]$ について次のことが言える:

$$C_1 C_2 C_3 \ni I$$

となることと

$$\begin{aligned}
 \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &\leq 2\pi, \\
 -\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 &\leq 0, \\
 \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 &\leq 0, \\
 \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 &\leq 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

は同値である. ここで, 共役類の積 $C_1 C_2$ は

$$C_1 C_2 := \{g_1 g_2 \mid g_1 \in C_1, g_2 \in C_2\}$$

と定義されるものである.

ところが, 不等式系 (1) と定理 1 の V は同じである. さらに, 命題 1 の一般化についても Jeffery と Mare[3] により研究されている. これらに着目し, 我々は共役類の積とウィッテン L -関数の特殊値との関係について調べた.

命題 2 (命題 1 の一般化). 共役類 C_j に対応する $\theta_j \in [0, \pi]$ ($j = 1, 2, \dots, n$) について,

$$C_1 \cdots C_n \ni I$$

であるための必要十分条件は次のようなものとなる:

(1) n が偶数のとき,

$$S_n^{2k-1}(\{\theta_j\}) \leq (n - 2k)\pi, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

であり,

(2) n が奇数のときは

$$S_n^{2k}(\{\theta_j\}) \leq (n - 2k - 1)\pi, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$$

である. ただし, $S_n^m(\{\theta_j\})$ は m 個の $-\theta_j$ たちと $n - m$ 個の θ_j たちを足し合わせたものである.

定理 2. $SU(2)$ の n 個 (n は 3 以上の奇数) 共役類 $C_1, C_2, \dots, C_n$ について, もし

$$C_1 \cdots C_n \not\ni I$$

ならば,

$$\zeta_{SU(2)}^W(-(n-1); C_1, \dots, C_n) = 0$$

となる.

定理 3. $SU(2)$ の n 個 (n は 4 以上の偶数) の共役類 $C_1, C_2, \dots, C_n$ について, もし

$$C_1 \cdots C_n \not\supset I$$

ならば,

$$\zeta_{SU(2)}^W(-(n-2); C_1, \dots, C_n) = 0$$

となる.

注意. 上の定理 2 と定理 3 の対偶をとると次のようになる:

(1) $SU(2)$ の 4 個以上の共役類 $C_1, \dots, C_n$ (ただし n は偶数) について

$$\zeta_{SU(2)}^W(-(n-2); C_1, \dots, C_n) \neq 0$$

が成り立つならば,

$$C_1 \cdots C_n \supset I$$

となる.

(2) $SU(2)$ の 3 個以上の共役類 $C_1, \dots, C_n$ (ただし n は奇数) について

$$\zeta_{SU(2)}^W(-(n-1); C_1, \dots, C_n) \neq 0$$

が成り立つならば,

$$C_1 \cdots C_n \supset I$$

となる.

つまり, 定理 2 と定理 3 は, $SU(2)$ のウィッテン L-関数の特殊値を調べることによって $SU(2)$ の共役類の積の様子がわかるということを示唆している.

定理 2 と定理 3 は命題 2 とベルヌーイ多項式を使って証明できる. 詳細は関 [6] を参照.

参考文献

- [1] S. Agnihotri and C. Woodward, Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 817-836.
- [2] L. Jeffrey and J. Weitsman, Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula. Commun. Math. Phys. **150** (1992), 593-630.
- [3] L. Jeffrey and A. Mare, Products of conjugacy coasses in $SU(2)$, Canad. Math. Bull. **48** (2005), no. 1, 90-96.
- [4] N. Kurokawa and H. Ochiai, Zeros of Witten zeta functions and applications, Kodai Math. J. **36** (2013), 440-454.

- [5] J. Min, Zeros and special values of Witten zeta functions and Witten L - functions, J. Number Theory **134** (2014), 240-257.
- [6] J. Min, Vanishing of Witten L -functions and products of conjugacy classes, preprint.
- [7] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, Comm. Math. Phys. **141** (1991) 153-209.