

河川流と河床・河道変動の水理解析法*

Hydraulic Analysis on River Flows and River Channel Processes

京都大学大学院工学研究科
都市社会工学専攻
細田 尚 (Takashi HOSODA)

(2004 年 5 月 11 日受理)

1. はじめに	2
2. 河川流のモデリング	2
2. 1 流れの積分型モデルの分類	2
2. 2 水深または断面積分型モデルの適用例	2
2. 3 3次元解析モデル	16
3. 河床・河道変動の数値解析	19
3. 1 土砂輸送及び河床・河道変動に関わる素過程	19
3. 2 河床・河道変動の数値解析	20
4. おわりに	25
付録	
A. 1次元非定常流解析の基礎式の誘導	31
B. 1次元ダム破壊流れの数値解析法	33
C. 洪水流の理論	42
D. ブシネスク方程式原型の誘導	49
E. 平面2次元水深積分モデルの誘導	50
F. 開水路流れ混合層の線形せん断不安定解析	52
G. 湾曲の2次流の取り扱い	60
H. 蛇行を繰り返す水路の高速流の水面の形	65
I. 川の中の砂の波	72

*) 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

1. はじめに

河川の流れと河床・河道変動の解析法に関する研究は、治水、利水、環境に係わる河川計画を策定するために、洪水時の水位予測、河道湾曲部や河川構造物周辺の河床洗掘深の予測、安定（平衡）河道の設計などを目的として、水工学の主要な分野として古くから精力的に研究が行われてきた。

研究の方法も、実河川での観測、現象の諸特性の解明を目的とした実験的または理論的研究、現象を再現し予測するための数値解析的研究など多岐にわたっている。最近では、近年のコンピュータのハード的及びソフト的な目覚ましい進歩を反映して、計算結果のCGプレゼンテーションも含めた数値解析的研究が主流となっている。一方、河川流と河床・河道変動のモデリング、非線形解析などの数理水理学的研究の発展も著しく、古くから研究されている分野でありながら、今後の益々の進歩が期待されている。

本稿では、河川流と河床・河道変動のモデリング及び数値解析法について、最近の進歩を踏まえて体系的に講述する。

2. 河川流のモデリング

河床・河道変動は流れによる土砂輸送の結果として生じ、発生した河床・河道形態の変化が流速分布や抵抗則など流れの構造にフィードバックする。例えば、洪水の増水期に砂堆が発生しその波高が増加することで流れの抵抗が増加するが、さらに流量が増加すると河床形態が砂堆から平坦河床になることで抵抗が急に減少する現象などが知られている¹⁾。

流れと土砂の相互作用として、河床を転動、滑動、サルテーションの形態で流送される掃流砂や、流れの中を浮遊状態で輸送される浮遊砂と流れの相互作用を考慮した混相流としての取り扱いが必要な場合もあるが^{2,3)}、通常の河川流と河床変動解析では固液間及び固相間の相互作用は無視されることが多いため、本稿でも河床・河道形状の変化が流れに及ぼす効果以外の相互作用は取り扱わない。

河川流のモデリングは、大別すると断面積分または水深積分型モデルと3次元解析モデルに分類される。前者は、対象としている河川区間が非常に長く、また瀬や淵などが存在し流れが急激に変化するため、3次元解析が困難な場合が多いので、実用的によく用いられる。3次元の運動方程式などを断面内または水深方向に積分することで導かれる基礎式を用いる方法で、水深積分の場合は平面2次元モデルとも呼ばれる。積分の際に、流速分布の相似性などが仮定される。また、乱流のモデルとして水深積分型乱流モデルなどを用いる場合もあるが、実用的には経験的な0-方程式モデルを用いることが多い。

水深積分型モデルは3次元の基礎式を積分する際に用いられる仮定によって詳細に分類され、対象とする現象によって使い分けられる。近年、積分型モデルの理論が進展したが、流れの3次元性を水深積分の過程でできるだけ考慮しようとするためモデルが非常に複雑になる場合があり、水深積分モデルと3次元解析の使い分けが最近の研究課題になっている。

2. 1 流れの積分型モデルの分類

水深積分型モデルを誘導する際に用いられる仮定の分類と、対象とする現象に応じた仮定の組み合わせの例を表-1に示す。

表-1中、項目4)圧力分布の鉛直加速度を考慮する場合のモデリングについては、ブシネスク方程式原型とその改良について、主として海岸工学の分野で多くの研究がある。

2. 2 水深または断面積分型モデルの適用例

表-1の項目の組み合わせと、取り扱うことのできる現象について典型的な例を示しながら説明する。河床・河道変動解析と流れ解析の組み合わせについては後述する。

表-1 水深積分型モデルの分類

1) 時間 a. 定常, b. 非定常
2) 空間積分 a. 断面 (1 次元), b. 水深方向 (平面 2 次元), c. 横断方向 (鉛直 2 次元)
3) 座標系の設定 a. 基準水平面上の直角座標系, b. 基準水平面上の (移動) 一般座標系, c. 任意曲面上に設定された一般座標系
4) 圧力分布 a. 静水圧, b. 鉛直加速度考慮 (原型 or 修正ブシネスク方程式), c. 曲面の曲がりによる遠心力
5) 流速分布及び底面せん断応力の評価 a. 主流流速分布の一様性または自己相似性, b. 主流流速分布の局所的変化をモデル化して考慮, c. 流線湾曲の効果を考慮 (湾曲の 2 次流による運動量輸送, 2 次流の発達過程を無視 or 考慮)
6) 乱流モデル a. 経験的 0-方程式モデル, b. 水深積分型非線形 $k-\epsilon$ モデル
7) 積分する層の数 (三層以上は三次元に分類) a. 平面一層モデル, b. 平面二層モデル
8) 開水路流れと圧力流れが混在 (境界面の移動の取り扱い)

2. 2. 1 定常流の 1 次元解析

河川や人工水路に一定の流量が流れているとき, ある地点の水深または水位を計算するために, 現在でも用いられることがある. 河川の川幅, 堤防の高さなどを決める基礎資料となるため, 古くから多くの研究が行われてきた. 水面の形 (水面形) を計算することを目的とするため, 水面形解析とも呼ばれる.

基礎式として, 流線に沿って成立するベルヌーイ式と静水圧分布の仮定を用いて導かれる簡易なエネルギー式, または 3 次元の運動方程式 (またはエネルギー式) を断面積分して導かれる 1 次元運動量式 (またはエネルギー式) が用いられる. 後者については Appendix A に誘導仮定を記述した. ここでは簡易なエネルギー式を用いた水面形解析の応用例を示す.

例えば, 図-1 に示すような突起を越える流れの水面の形を計算することを考えよう.

簡単のため広長方形断面 (水深に比べて幅の広い長方形断面) を仮定し, 単位幅で考えたときのエネルギー方程式は図-1 を参照して次式で表される.

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{n^2 q^2}{h^{10/3}}, \quad E \equiv \frac{q^2}{2gh^2} + (h + \delta_b) \cos \theta + z_b \quad (1)$$

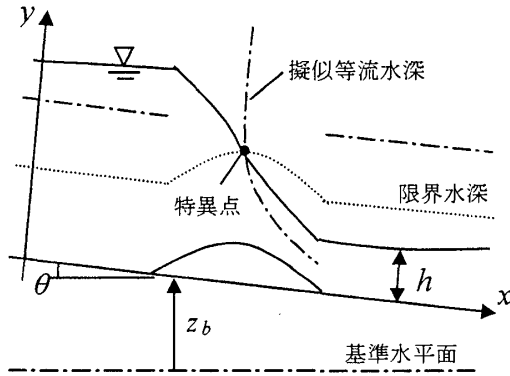


図-1 突起を越える流れの水面形解析

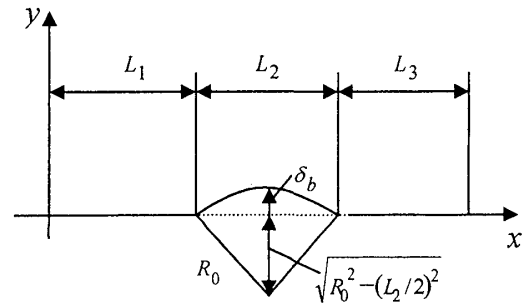


図-2 記号の説明

ここに、 x :空間座標、 q :単位幅流量、 h :水深、 z_b :基準水平面からの路床高さ、 δ_b :突起の高さ、 g :重力加速度、 n :マンニングの粗度係数、 θ :路床勾配。また、エネルギー係数を1としている。

式(1)を水面形方程式に書き表すと式(2)となる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin \theta - \cos \theta \frac{d\delta_b}{dx} - \frac{n^2 q^2}{h^{10/3}}}{\cos \theta - \frac{q^2}{gh^3}} = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)} \quad (2)$$

水面形方程式の分子 $f_1(x, h) = 0$ を満たす水深が擬似等流水深 h_0 であり、分母 $f_2(x, h) = 0$ を満たす水深が限界水深 h_c である。

$$[\text{擬似等流水深}] \quad h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{\sin \theta - \cos \theta \frac{d\delta_b}{dx}} \right)^{3/10} \quad (3)$$

$$[\text{限界水深}] \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g \cos \theta} \right)^{1/3} \quad (4)$$

(2) 突起の表現

図-2を参照して、突起は次式で表される。

$$L_1 \leq x \leq L_1 + L_2;$$

$$\delta_b(x) = \sqrt{R_0^2 - (x - L_1 - \frac{L_2}{2})^2} - \sqrt{R_0^2 - (\frac{L_2}{2})^2}, \quad (5)$$

$$\frac{d\delta_b}{dx} = -\frac{(x - L_1 - \frac{L_2}{2})}{\sqrt{R_0^2 - (x - L_1 - \frac{L_2}{2})^2}}, \quad \frac{d^2\delta_b}{dx^2} = -\frac{R_0^2}{\left\{ R_0^2 - (x - L_1 - \frac{L_2}{2})^2 \right\}^{3/2}}$$

(3) 特異点の位置と水面勾配

特異点の位置 x_s は擬似等流水深と限界水深の交点であり、式(3)、(4)、(5)より次式で与えられる。

$$x_s = L_1 + \frac{L_2}{2} + \frac{P \cdot R_0^2}{(1 + P)}, \quad P = \frac{\left(\frac{n^2 q^2}{h_c^{10/3}} - \sin \theta \right)^2}{\cos^2 \theta} \quad (6)$$

また特異点における水面勾配は、 $x = x_s + x'$, $h = h_s + h'$ において f_1, f_2 を特異点周りでテイラー展開した式(7)の極限 $(x', h') \rightarrow (0, 0)$ を考えることにより、式(8)で計算される。

$$\frac{dh'}{dx'} = \frac{\frac{10}{3} \frac{n^2 q^2}{h_s^{13/3}} h' - \cos \theta \frac{d^2 \delta_b}{dx^2} x'}{\frac{3q^2}{gh_s^4} h'} \quad (7)$$

$$\left. \frac{dh'}{dx'} \right|_s = \frac{\frac{10}{3} \frac{n^2 q^2}{h_s^{13/3}} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{3} \frac{n^2 q^2}{h_s^{13/3}} \right)^2 - 4 \cos \theta \frac{d^2 \delta_b}{dx^2} \frac{3q^2}{gh_s^4}}}{2 \cdot \frac{3q^2}{gh_s^4}} \quad (8)$$

式(7)より特異点が鞍形点に分類されることがわかる。また、現実には生じる常流（フルード数が1より小さい流れ）から射流（フルード数が1より大きい流れ）への遷移は式(8)の複号のうちーの場合である。

(4) 水面形の追跡

式(8)を境界条件として用いて、特異点からそれぞれ上流方向と下流方向に水面形を計算すると下図のようになる。

この図を見て分かるように特異点は突起のほぼ頂点で生じている。このことは、頂点の水深を計測すれば式(4)を用いて流量が計測できることを示している。

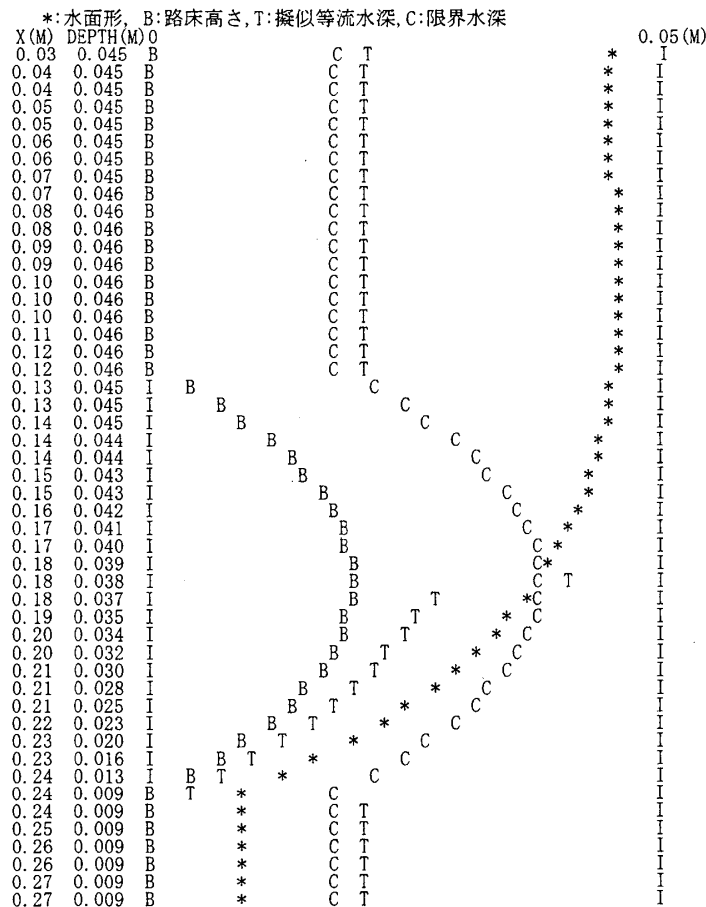


図-3 特異点が存在する流れの水面形解析例

2. 2. 2 開水路非定常流の1次元解析

(非定常, 断面積分, 基準水平面上の直角座標, 静水圧, 流速分布の相似性, 経験的0-方程式モデル)

基礎式は連続式と運動量式で構成され, 一般断面の場合次のように表される (図-4 参照). 式(9), (10)の誘導を Appendix A に示す.

$$[\text{連続式}] \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$[\text{運動量式}] \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial UQ}{\partial x} + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} = -gA \frac{\tau_{bx}}{\rho g R} + \frac{\partial (-u'^2 A)}{\partial x} \quad (10)$$

ここに, t : 時間, x : 空間座標, Q : 流量, A : 流水断面積, U : 断面平均流速, z_b : 基準水平面からの路床高さ, z_s : 基準水平面からの水位, R : 径深, τ_{bx} : 路床に作用する応力ベクトルの x -方向成分, g : 重力加速度, u' : 乱れ速度, ρ : 流体の密度. また, 運動量係数は1としている.

底面せん断応力は通常次式の Manning 則を用いて評価される.

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = \frac{gn^2 U |U|}{R^{1/3}} \quad (11)$$

ここに, n : Manning の粗度係数.

河川の洪水流やダム破壊流れなど, 種々の開水路非定常流に適用されてきた. 洪水流に関する古典理論を Appendix C に示す.

以前は保存則系で表示された基礎式を微分形のサン・ブナンの式に変換するなどした後, 固定格子点の特性曲線法を用いて数値計算されることが多かったが, 現在では保存則系の運動量方程式を直接離散化して数値解析する場合がほとんどである. 跳水や段波も再現できる. ただし, 境界条件の考え方や段波の不連続部で数値振動を生じない差分スキーム (TVD スキーム) を構成する際に特性曲線法による定式化は不可欠である⁴⁻⁶⁾.

特性曲線法や数値解析法の簡単な説明を Appendix B に示す.

図-5 は, 流れ込み発電所導水路内でスルース・ゲートを急開したときに生じる非定常流の計算結果を示したものである⁷⁾.

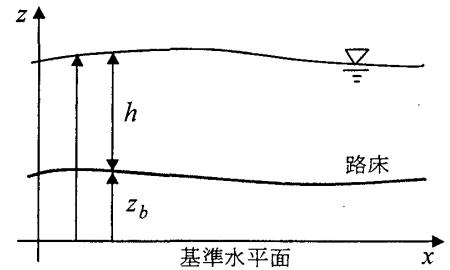


図-4 座標系

2. 2. 3 波状段波・波状跳水の1次元解析

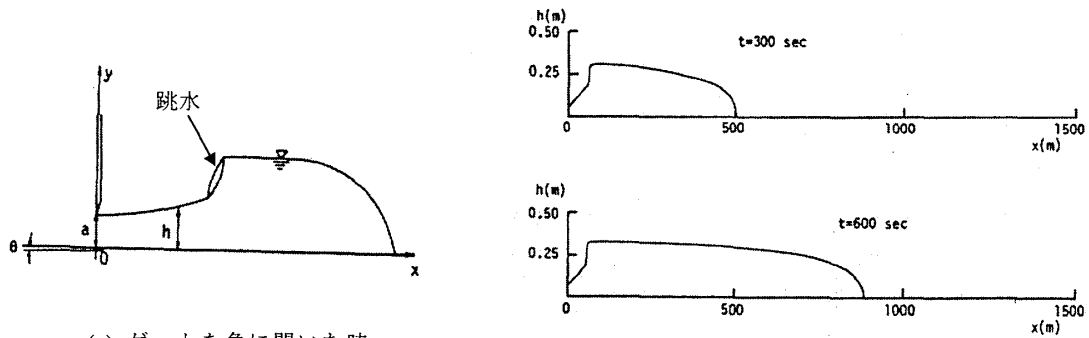
(定常・非定常, 断面・水深積分, 基準水平面上の直角座標, 鉛直加速度考慮, 流速分布の相似性, 経験的0-方程式モデル)

写真-1 に示した波状の跳水や段波を再現するためには, 静水圧分布を仮定できないため, 圧力分布に鉛直加速度を考慮した運動量方程式(原型ブシネスク方程式)が用いられる. たとえば, 路床が平坦な場合の単位幅での運動量方程式は下記のようなになる(座標系は図-4 参照)^{8,9)}.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U h}{\partial t} + \frac{\partial U^2 h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g \frac{h^2}{2} + \frac{h}{3} \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \\ = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial (-u'^2 h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)の誘導を Appendix D に示す. 時間微分項を省略すれば定常状態での運動量方程式となり, 適当な境界条件のもとで水面形解析を行えば, 図-6 のような波状跳水の水面形が再現される¹⁰⁾.

原型ブシネスク方程式(4)は, 流速分布の一様性を仮定して鉛直方向の運動方程式から圧力分布を導き, それを流れ方向の運動量式に代入して導かれる. 水の波に適用すると高波数領域で微小振幅波の分散関係と適合性しないため, 海岸工学の分野で改良型ブシネスク方程式に関する数多くの研究が行われている¹¹⁻¹³⁾.



(a) ゲートを急に開いた時の流れの概念図

(b) 数値解析結果

図-5 スルース・ゲート急開時の非定常流と跳水の形成過程

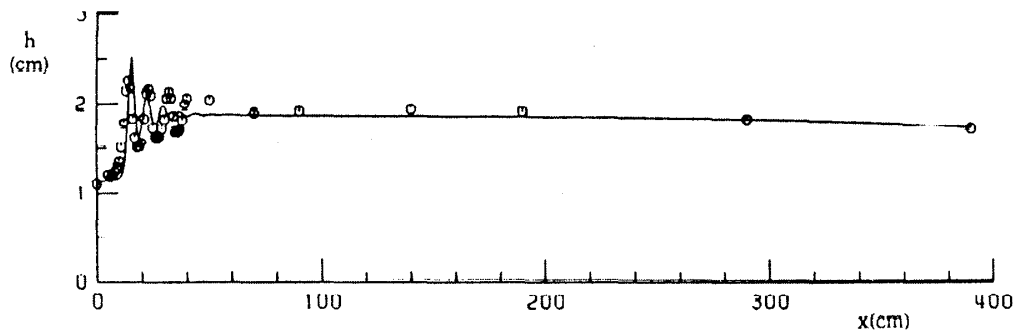


図-6 ブシネスク方程式による波状跳水の水面形解析

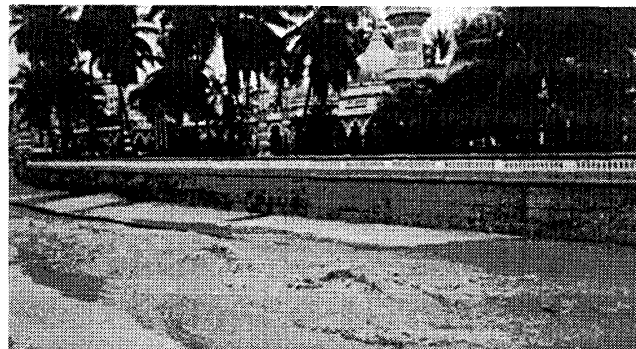


写真-1 波状跳水 (マレーシア・クラン川)

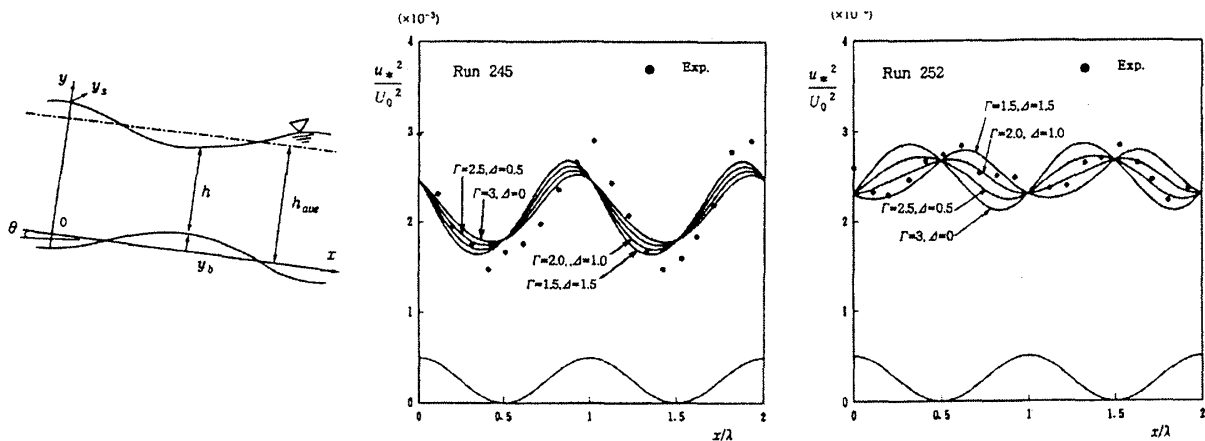


図-7 水深積分モデルによる底面せん断応力の評価²⁰⁾

2. 2. 4 波状路床上の流れ

(定常・非定常, 水深積分, 基準水平面上の直角座標, 鉛直加速度考慮,
主流流速分布の局所変化をモデル化して考慮, 経験的0-方程式モデル)

波状路床の流れは, 小規模や中規模河床波上の流れを単純化したモデルとして, 古くから水深積分モデルや多次元モデルを用いて研究が行われてきた¹⁴⁻²⁰⁾. 小規模河床波の空間スケールを想定した場合, 鉛直加速度を無視できないため, 水深積分モデルを用いる場合には上述したブシネスク方程式がその基礎式となる. 定常状態での波状路床上の運動量方程式は次式となる. (詳細は参考文献を参照のこと.)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{gh^2}{2} \cos \theta \right) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{q^2}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} + \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2h} \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2} \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right) \\ & + \frac{dz_b}{dx} \left\{ gh \cos \theta - \frac{U^2}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} + \frac{U^2 h}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} + U^2 h \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right\} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d}{dx} \left(\alpha h^2 U \frac{dU}{dx} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

ここに, q :単位幅流量, θ :路床勾配, α :渦動粘性係数の係数.

ただし, 小規模河床波の発生・発達過程を再現するためには, 後述の非平衡流砂モデルを適用するだけでなく, 波状路床上のせん断応力分布を精度よく評価する必要がある. 通常の平均流速に摩擦係数を乗じる底面せん断応力の評価法では実験結果との適合性がよくないため, 例えば下記のような評価式が提案されている²⁰⁾.

$$\frac{\tau_{xb}}{\rho} = f u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} + \Delta \frac{dy_b}{dx} \right), \Gamma = 2, \Delta = 1, u_b = \frac{q}{h} + \frac{q}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} - \frac{q}{6} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{q}{2} \frac{d^2 y_b}{dx^2} \quad (14)$$

上式を用いて波状路床上の底面応力を評価し実験結果と比較した例を図-7に示した²⁰⁾.

2. 2. 5 開水路湾曲部・急拡部の高速流 (写真-2 参照)

(定常・非定常, 水深積分, 基準水平面上の直角座標または一般座標系,
静水圧, 流速分布の相似性, 経験的0-方程式モデル)

基準水平面上の直角座標系のもとで, 静水圧分布を仮定して導かれる平面2次元水深積分モデルの基礎式は次のようになる. (図-4の座標系をを平面2次元に拡張した座標系を用いる.) 運動量係数は1としている. (基礎式の導出を Appendix E に示した.)

[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

[運動量式]

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + \frac{\partial VM}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - \frac{F_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} h \right) \quad (16a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial UN}{\partial x} + \frac{\partial VN}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} - \frac{F_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{v'^2} h \right) \quad (16b)$$

ここに, t :時間, (x, y) :空間座標, (U, V) : x, y 方向の水深平均流速, (M, N) : x, y 方向の流量フラックス ($M \equiv Uh, N \equiv Vh$), g :重力加速度, h :水深, ρ :水の密度, z_s :基準面からの水位, (τ_{bx}, τ_{by}) : $x-y$ 座標系の底面せん断応力の成分, (F_x, F_y) :植生等による形状抵抗力の成分, $-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}$: $x-y$ 座標系の水深平均レイノルズ応力である.

底面せん断応力, 水深平均レイノルズ応力, 形状抵抗等の評価については参考文献を参照のこと.

上式中, 非定常項, 渦動粘性項, 形状抵抗項を無視すると, 定常状態で平面2次元的に水面形解析を行う基礎式となる. ただし, 次式では簡単のため平坦路床を考慮して $z_s = h$ として行列表示している.

$$\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} U & h & 0 \\ g & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} V & 0 & h \\ 0 & V & 0 \\ g & 0 & V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{bx}/\rho h \\ -\tau_{by}/\rho h \end{bmatrix} \quad (17)$$

これらの式の特性曲線と特性曲線上の関係式を導けば次式となる^{21,22)}。

[特性曲線]

$$\lambda_1: \frac{dy}{dx} = \frac{V}{U}, \quad \lambda_2: \frac{dy}{dx} = \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh}, \quad \lambda_3: \frac{dy}{dx} = \frac{UV - \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \quad (18)$$

[特性曲線上の関係式]

$$\lambda_1: \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{U^2 + V^2}{2g} \right) + \frac{V}{U} \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{U^2 + V^2}{2g} \right) = -\frac{\tau_{bx}}{\rho gh} - \frac{V}{U} \frac{\tau_{by}}{\rho gh} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2: & \frac{\sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{hU} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ & - \frac{V}{U} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\tau_{bx}}{\rho h} \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U(gh - U^2)} - \frac{\tau_{by}}{\rho h} \end{aligned} \quad (19b)$$

3本の特性曲線の内一つ(λ_1)は流線であり、その上の関係式は流線に沿って成立するベルヌーイ式となる。また、平面2次元流れのフルード数 $Fr = \sqrt{U^2 + V^2} / \sqrt{gh}$ が1を越えると特性曲線の表示式はすべて実数になり、基礎式系は双曲型に分類される。 $\sqrt{U^2 + V^2} / \sqrt{gh} > 1$ は平面2次元での高速流の定義でもあり、この場合、図-8に示すような固定格子点の特性曲線法を用いて水面形を追跡することができる^{21,22)}。(この方法は流れの特性を理解する上で有用であるが、実際問題には後述の2.2.7で述べる非定常流解析を用いる場合がほとんどである。)

計算例として、開水路漸縮部と急拡部の高速流の水面形解析結果を図-9、図-10に示す^{22,23)}。

2. 2. 6 渦潮などせん断不安定に起因する大規模渦

(非定常、水深積分、基準水平面上の直角座標、静水圧、流速分布の相似性、経験的0-方程式モデル・水深積分型非線形 $k-\varepsilon$ モデル、一層または二層モデル)

式(16)中の渦動粘性項を無視し、2次元せん断層型流速分布形(例えば $\tanh$ 型流速分布)を仮定して基礎式を線形化すると、フルード数を無次元パラメータとする線形化方程式が導かれる。(連続式の非定常項を無視した安定解析も行われているが、無次元パラメータとしてフルード数が現れず適切でない。)この線形化方程式の安定解析を行うと、 $\tanh$ 型流速分布の場合、フルード数が2以下で微小擾乱は不安定になりせん断層内で渦層が発生することが証明される^{24,25)}。

安定解析の概要を Appendix F に示した。

このように、静水圧を仮定した平面2次元モデルは水平方向に広がりを持つせん断不安定渦をある程度まで再現できる²⁵⁻²⁸⁾。例として、鳴門の渦潮²⁷⁾と平面二層モデルを用いた複断面流れの大規模渦²⁸⁾の計算結果を示す。式(15)、(16)の数値解析法として、汜濫解析法⁴⁾等で汎用の水深と流量フラックスを互い違いに配置した有限体積法が用いられている(図-11, 12 参照)。慣性項の離散化には QUICK スキームが、時間積分には2次精度のアダムス・バッシュフォース法が用いられている。

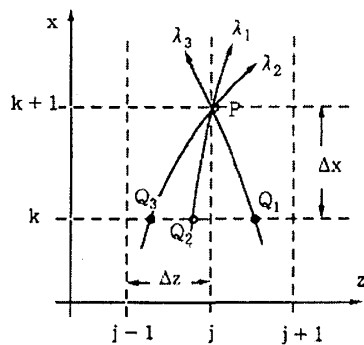


図-8 固定格子点の特性曲線法

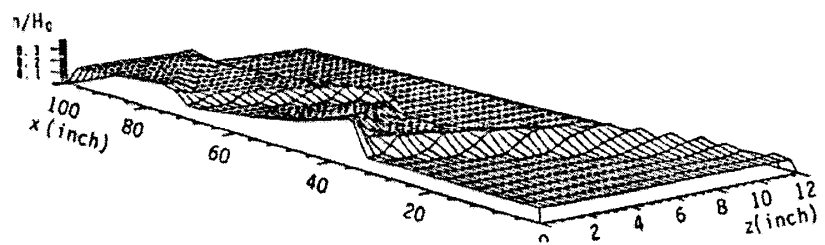


図-9 漸縮水路の高速流の水面形解析

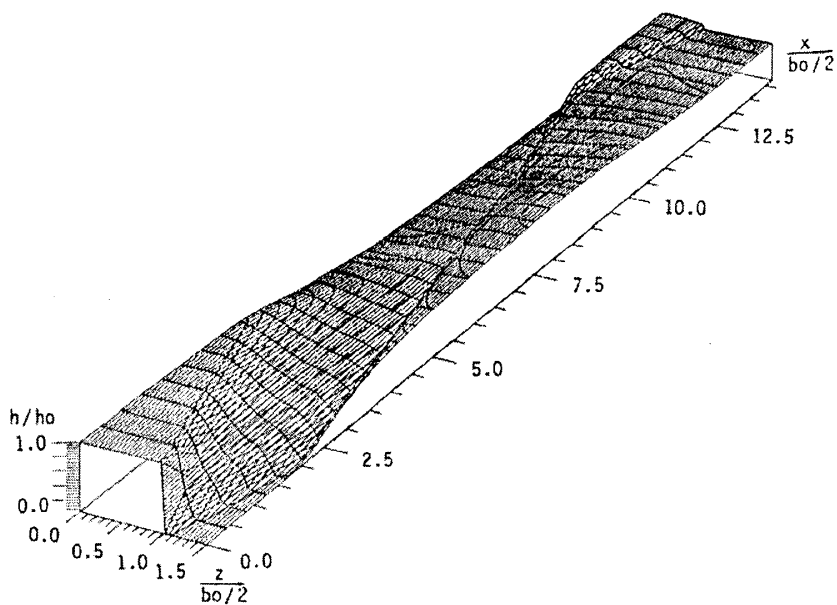


図-10 斜め衝撃波を伴う開水路急拡大部の水面形解析



写真-2 開水路急拡大部の高速流の例

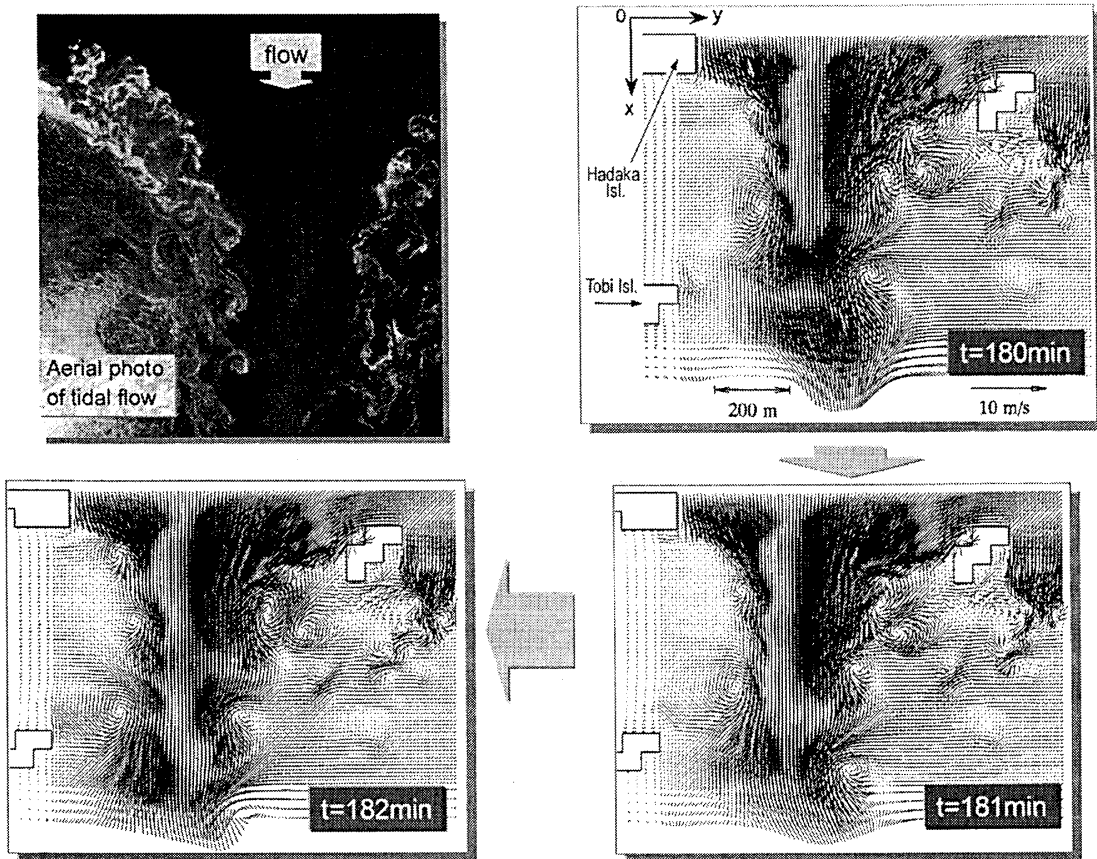


図-11 鳴門の渦潮の数値解析

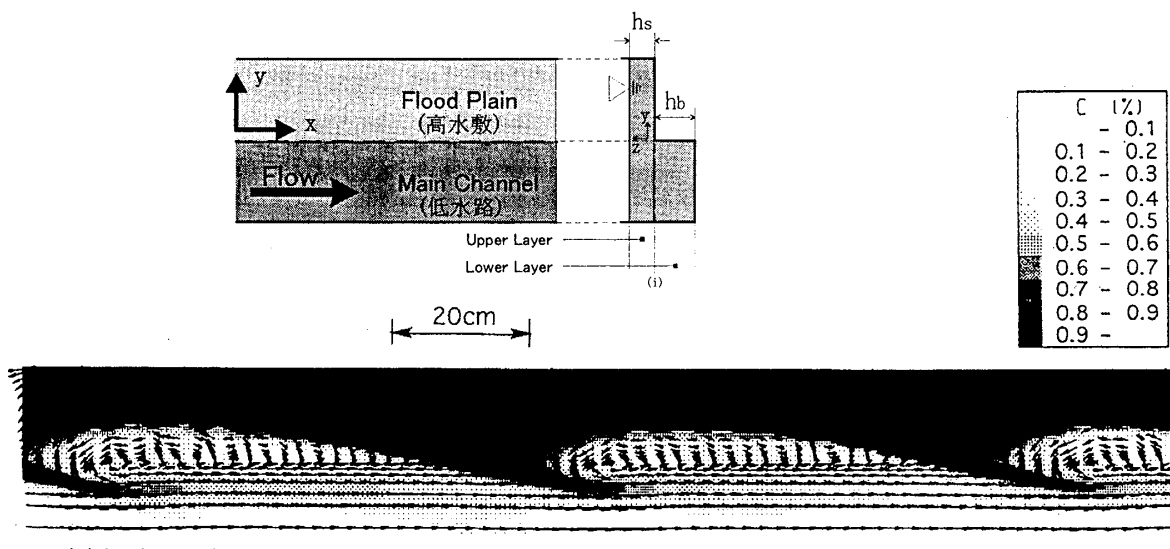


図-12 平面2層モデルによる複断面開水路流れの数値解析
(低水路と高水敷境界面の大規模渦が再現されている.)

2. 2. 7 長区間の河川の流れ及び河川湾曲部の流れ

(非定常、水深積分、基準水平面上の一般座標系、静水圧、流線湾曲の効果を考慮（2次流による運動量輸送、2次流の発達過程も考慮）、経験的0-方程式モデル）

河川計画、河道計画において、1次元解析に代わり、平面2次元非定常流モデルを用いて数十キロの河川区間の流れや河床変動解析を行うことが普通となっている。その際、細長い河道をなるべく少ない格子数で効率的に離散化するために、河道形状に適合した一般座標系とその座標系での基礎式を用いることが多い^{29,30)}。その際、運動方程式の未知数として流量フラックス・ベクトルの反変成分を用いる場合と直角座標成分を用いる場合があるが、水深と流量フラックスを互い違いに配置するときは反変成分を用いた方が適切と考えられる。

さらに、河川湾曲部で生じる遠心力と圧力差に起因する2次流、及び2次流による横断方向の運動量輸送を平面2次元モデルに組み込む方法も提案されている³¹⁻³⁷⁾。直交曲線座標系および一般座標系において、2次流が流線の湾曲に遅れずに追従する場合と、遅れを考慮する場合の定式化が示されている。

ここではそれらの一例として、基準水平面上に置かれた一般座標系での2次流発達の遅れを考慮した運動量方程式を示す³⁶⁾。2次流のモデルとして Engelund モデル³⁸⁾ が用いられている。2次流を考慮しない場合は式中の付加項を無視する。

基礎式の詳細を Appendix G に示した。

[ξ -成分]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_c \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V_c \frac{Q^\xi}{J} \right) \\ & - \frac{M}{J} \left(U_c \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(U_c \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) \\ & = -gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J} \\ & + \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\xi_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2} h \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2} h \right) \\ & + \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \frac{2\xi_x \xi_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \xi_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \xi_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4}) \end{aligned} \quad (20a)$$

[η -成分]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_c \frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V_c \frac{Q^\eta}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(U_c \frac{\partial \eta_x}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(U_c \frac{\partial \eta_y}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} \right) \\ & = -gh \left(\frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\eta}{\rho J} \\ & + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\eta_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2} h \right) + \frac{\eta_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2} h \right) \\ & + \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \frac{2\eta_x \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \eta_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \eta_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4}) \end{aligned} \quad (20b)$$

ここに、 (Q^ξ, Q^η) : 流量フラックスベクトルの反変成分、 (M, N) : 流量フラックスベクトルの直角座標成分、 (U_c, V_c) : 流速ベクトルの反変成分、 J : 座標変換のヤコビアン $(=1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi))$ 、 $(\tau_b^\xi, \tau_b^\eta)$: 底面せん断応力ベクトルの反変成分、 $-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}$: 水深積分されたレイノルズ応力テンソルの直角

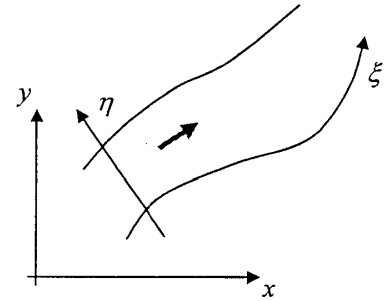


図-13 基準水平面上の一般座標系

座標成分. また, $S_{\xi 1} \sim S_{\eta 4}$ は次式で定義される2次流による運動量輸送項.

$$\begin{aligned} S_{\xi 1} &= -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n \bar{u}_s h \sin 2\theta - \xi_y A_n \bar{u}_s h \cos 2\theta) \right], & S_{\xi 2} &= -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n \bar{u}_s h \sin 2\theta - \eta_y A_n \bar{u}_s h \cos 2\theta) \right], \\ S_{\xi 3} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin^2 \theta - \xi_y A_n^2 h \cos \theta \sin \theta) \right], & S_{\xi 4} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \sin^2 \theta - \eta_y A_n^2 h \cos \theta \sin \theta) \right], \\ S_{\eta 1} &= c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n \bar{u}_s h \cos 2\theta + \xi_y A_n \bar{u}_s h \sin 2\theta) \right], & S_{\eta 2} &= c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n \bar{u}_s h \cos 2\theta + \eta_y A_n \bar{u}_s h \sin 2\theta) \right], \\ S_{\eta 3} &= -c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin \theta \cos \theta - \xi_y A_n^2 h \cos^2 \theta) \right], & S_{\eta 4} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \cos \theta \sin \theta - \eta_y A_n^2 h \cos^2 \theta) \right] \end{aligned}$$

ここに, c_{sn}, c_{n2} : 2次流による運動量輸送の係数, θ : 水深積分された流速ベクトルと x 軸のなす角度. また, A_n は2次流強度を表し, 主流流線の変化に対する2次流の遅れを無視する場合は次式で評価し, 遅れを考慮する場合は別途 A_n の関係式を用いる. R は曲率半径を表す.

$$A_n = \frac{\bar{u}_s h}{R}, \quad (21)$$

ここに, $\bar{u}_s$: 水深積分された流速ベクトルの大きさ, R : 曲率半径.

上式を用いた例として, 湾曲水路 (図-14) を用いた Hicks 等の実験結果³⁹⁾ と計算結果 (主流と2次流の流速分布) の比較を図-15 に示す.

また, 本解析法を用いた連続的に蛇行する水路の高速流の数値解析例を Appendix H に示す.

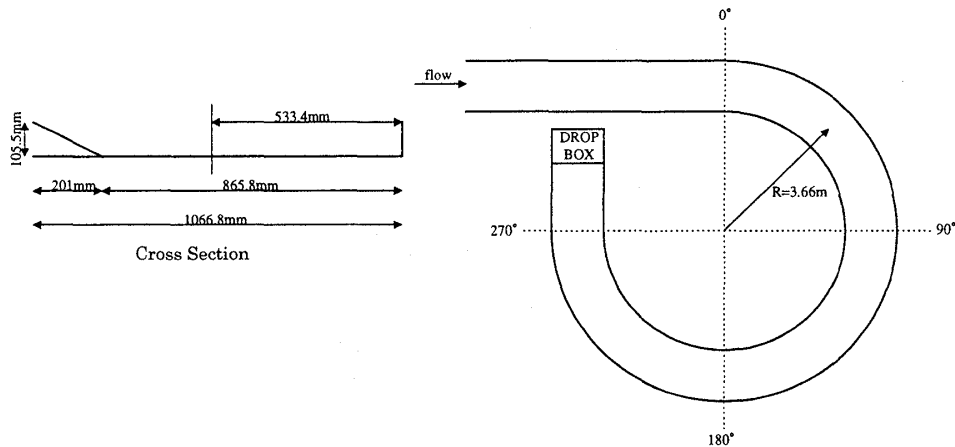
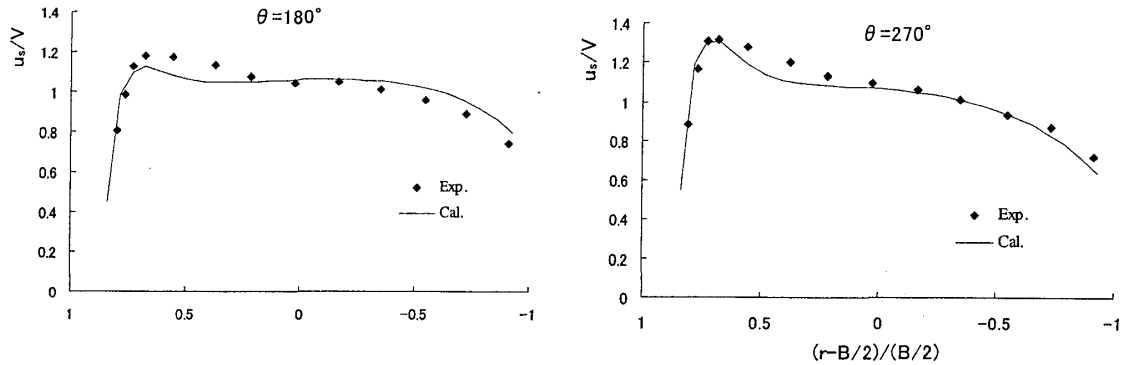
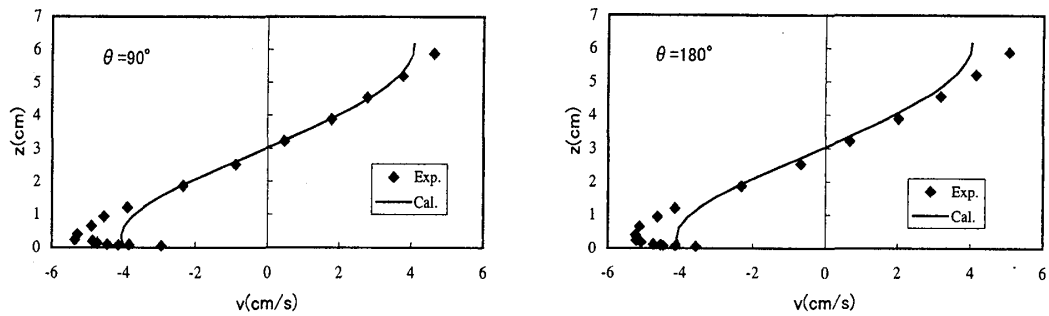


図-14 実験水路の概要 (Hicks et al.)



(a) 主流の横断分布（左側が湾曲の外岸側で2次流による運動量輸送により内岸側より速くなっている。）



(b) 断面内の2次流（横断方向流速）の鉛直分布

図-15 主流と2次流の計算結果と実験結果の比較

2. 2. 8 任意曲面上の流れ

（非定常、水深積分、任意曲面上の一般座標系、曲面の曲がりによる遠心力、流速分布の相似性、経験的0-方程式モデル）

球面のようにオーバーハングする曲面や、複雑に変化する3次元曲面上の流れを対象とするとき、水平面上に基準座標を設定することができない。そこで、任意曲面上に座標系を設定し、曲面に垂直または斜交するように立てた座標に沿って基礎式を積分することで任意曲面上の水深積分モデルの基礎式が導かれた⁴⁰⁾。圧力分布に曲面の曲がりによる遠心力の効果が組み込まれている。

曲面 $\zeta(x, y, z) = 0$ に垂直な座標に沿って積分した場合の基礎式を下記に示す。基礎式の詳細は参考文献を参照のこと。

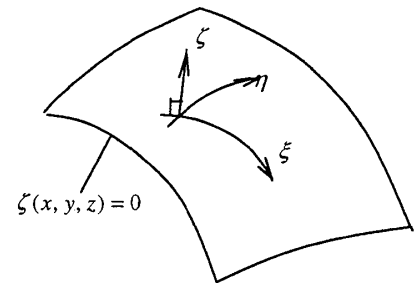


図-16 曲面上に設定された座標系

$$[\text{連続式}] \quad \frac{1}{J_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \xi} \frac{1}{J_0} + \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta} \frac{1}{J_0} = 0 \quad (22)$$

[ξ -方向の運動量式]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{M}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U \hat{M}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V \hat{M}}{J_0} \right) \\ & + \frac{1}{J_0 h} \left(\hat{M}^2 \Gamma_{0\xi\xi}^\xi + \hat{M} \hat{N} \Gamma_{0\xi\eta}^\xi + \hat{N} \hat{M} \Gamma_{0\eta\xi}^\xi + \hat{N}^2 \Gamma_{0\eta\eta}^\xi \right) \\ & = \frac{h}{J_0} G^\xi - \frac{1}{J_0} \left(\xi_{x_0}^2 + \xi_{y_0}^2 + \xi_{z_0}^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{p}{\rho} d\xi \end{aligned}$$

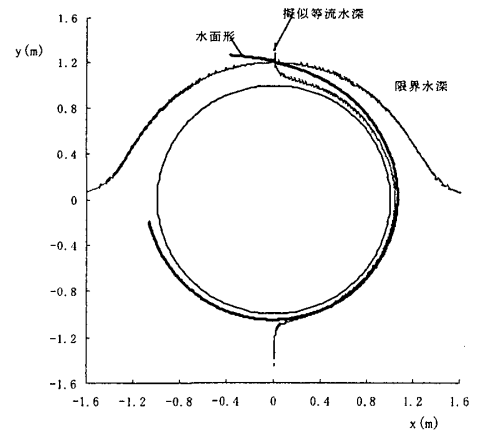


図-17 円柱面に沿う流れの水面形解析

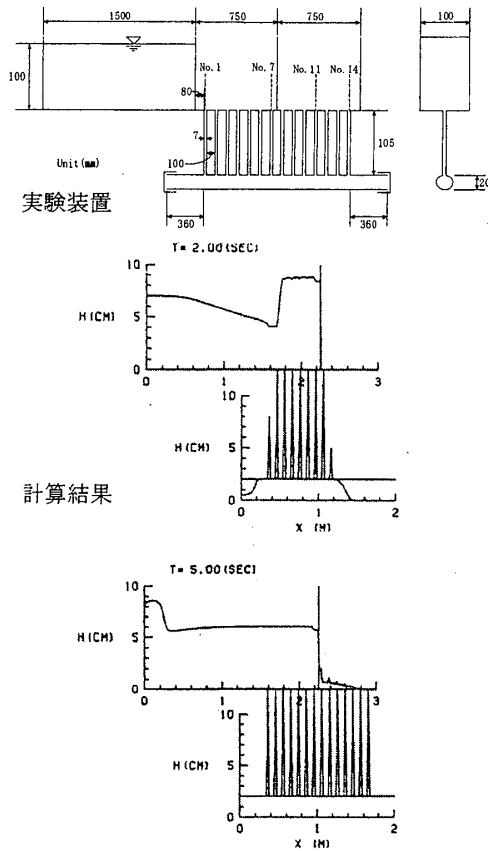


図-19 開水路・圧力流れ共存非定常流の計算例

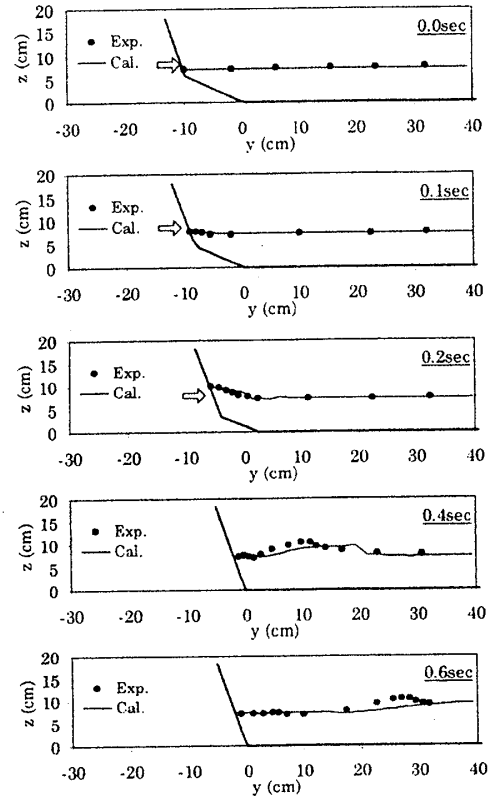


図-18 移動一般座標系を用いた計算例

$$-\frac{1}{J_0}(\xi_{x_0}\eta_{x_0} + \xi_{y_0}\eta_{y_0} + \xi_{z_0}\eta_{z_0})\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^h \frac{p}{\rho}d\zeta - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J_0} \quad (23)$$

ここに、 h ：水深、 $(\hat{M}, \hat{N})$ ：流量フラックスベクトルの反変成分、 p ：圧力、 G^ξ ：重力加速度ベクトルの反変成分、 τ_b^ξ ：底面せん断応力ベクトルの反変成分。また、 J 、 Γ_{jk}^i はヤコビアンとリーマン・クリストッフエルシンボルであり、各々次式で定義される。下添字0は曲面上の値であることを示す。

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^s} \right)$$

$$= -\frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \right), \quad g^{ij} \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m}, \quad g_{ij} \equiv \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j}$$

上式を用いた例として円柱面に沿う流れの水面形解析結果を図-17に示す⁴⁰⁾。適用例は今のところほとんどないが、今後水の造形設計などへの応用が期待される。

2. 2. 9 移動一般座標系の適用

(非定常、水深積分、基準水平面上の移動一般座標系、静水圧)

一般に、河岸の崩壊や地震などで流れの境界が時間的に移動する場合に移動一般座標系で記述された基礎式が用いられる²⁹⁾。静水圧を仮定したときの移動一般座標系での水深積分モデルの基礎式は次のようになる。用いている記号の定義は式(20)と同じである。また、 η 方向の運動量式は省略した。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{h}{J} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U_c) \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V_c) \frac{Q^\xi}{J} \right) \\
& - \frac{M}{J} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} + (\xi_t + U_c) \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + (\eta_t + V_c) \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial t} + (\xi_t + U_c) \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + (\eta_t + V_c) \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) \\
& = -gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J} + \dots
\end{aligned} \quad (25)$$

ここに、 ξ_t, η_t は次式で計算される。

$$\xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y, \quad \eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y$$

図-18 に河岸が移動したときに生じる流れへの適用例を示す⁶⁷⁾。この方法は、後述の河岸侵食による流路変動解析に適用されている。

2. 2. 10 地下水路系の流れ

(非定常、断面・水深積分、基準水平面上の直角座標系、静水圧、流速分布の相似性、経験的 0 方程式モデル、開水路流れと圧力流れが混在)

下水道や地下河川内の流れの特徴として、水深の増加とともに開水路流れと圧力流れが混在した複雑な流れが生じることが挙げられる。このような共存非定常流を積分型モデルで数値解析する方法として二通りの方法が考えられている。一つは、流れを圧縮性流体として取り扱い、管頂に水撃波の伝播速度に対応する細いスリットを立て、管路流れと開水路流れを同じ基礎式で解くプライスマン法。いま一つは流れを開水路流れ、管路流れ、及びそれらの境界面に分け、それぞれの関係式を非圧縮性流体の解析法を用いて同時に解きながら境界面を移動させる方法である。後者は平面 2 次元場への拡張や、閉じ込められた空気圧の変化を考慮する方法も提案され、圧縮性流体としての取り扱いも可能である⁴¹⁻⁴⁴⁾。

適用例として、地表流と地下水路流の相互作用を考慮した過渡現象（地表流が地下水路に流入し満管になった後地表に吹き上げる現象）の計算結果を図-19 に示す。

2. 3 3次元解析モデル

3次元解析は、橋脚や水制など河川構造物周辺の流れと局所洗掘現象のように 3次元性の強い現象を再現する必要がある場合に用いられる。乱流の取り扱いには RANS, LES 及び DNS が用いられ、実験室スケールの流れ場に対してこれら三通りを適用した研究が多く行われているが、実河川の流れの非常に大きいレイノルズ数や砂礫で構成される河床などを考慮すると、現時点では RANS が実用的なように思われる。河床変動と組み合わせた流れ解析の例として、砂州や複断面蛇行流路の河床変動を 0 方程式モデルで解析した例、構造物周辺の局所洗掘現象を標準型または非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いて解析した研究があるが^{45-51,86)}、実河川に適用するモデルとしては、実用性と 3次元流れを再現できる能力などの兼ね合いからみて近年進歩の著しい非線形渦粘性モデルが有力と考えられる。

基礎式の表示法や数値解析法など数多くの方法が提案されている。ここでは、例として移動一般座標系を用いて、流速ベクトルの反変成分で表示した基礎式系を下記に示す^{52,53)}。乱流モデルとして非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いている。

[連続式]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \sqrt{g}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (26)$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^i (V^j - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^j \nabla_j W^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p + \nabla_j \left[-\overline{v^i v^j} \right] + 2\nabla_j e^{ij} \quad (27)$$

[k 方程式]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla_j [k(V^j - W^j)] + k \nabla_j W^j = -g_{il} \overline{v^l v^j} \nabla_j V^i - \varepsilon + \nabla_j \left\{ \left(\frac{D_i}{\sigma_k} + \nu \right) g^{ij} \nabla_i k \right\} \quad (28)$$

[ε 方程式]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla_j [\varepsilon(V^j - W^j)] + \varepsilon \nabla_j W^j = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} g_{il} \overline{v^l v^j} \nabla_j V^i - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla_j \left\{ \left(\frac{D_i}{\sigma_k} + \nu \right) g^{ij} \nabla_i \varepsilon \right\} \quad (29)$$

ここに、 ξ^j : 計算空間の空間座標、 t : 時間、 V^j : 流速ベクトルの反変成分、 W^j : 格子移動速度ベクトルの反変成分、 v^j : 乱れ速度ベクトルの反変成分、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数、 ρ : 流体の密度、 k : 乱れエネルギー、 ε : 乱れエネルギー散逸率、 F^j : 重力加速度ベクトルの反変成分をそれぞれ表す。 g_{ij}, g^{ij} は計量テンソルの共変成分及び反変成分であり、次のような関係がある。

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \delta_{kl}, \quad g^{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \delta_{kl}, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (30)$$

ここに、 x^j はデカルト座標系を表す。また、

$$g = \det[g_{ij}] \quad (31)$$

であり、 ∇_j は共変微分(covariant derivative)を表す。

非線形 $k-\varepsilon$ モデルによる構成則は、Pope⁵⁴⁾ および Gatski・Speziale⁵⁵⁾ による表現を一般曲線座標系に変換することにより、次のように表される。

$$-\overline{v^i v^j} = D_i S^{ij} - \frac{2}{3} k \delta_s^i g^{sj} - \frac{k}{\varepsilon} D_i [\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3] \quad (32)$$

$$D_i = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad Q_1 = S^{ia} g_{ai} \Omega^{ij} + S^{j\beta} g_{\beta i} \Omega^{ij}, \quad Q_2 = S^{ia} g_{ai} S^{ij} - \frac{1}{3} S^{ka} g_{am} S^{m\beta} g_{\beta k} \delta_i^j g^{ij},$$

$$Q_3 = \Omega^{ia} g_{ai} \Omega^{ij} - \frac{1}{3} \Omega^{ka} g_{am} \Omega^{m\beta} g_{\beta k} \delta_i^j g^{ij}, \quad S^{ij} = g^{ja} \nabla_a V^i + g^{ia} \nabla_a V^j, \quad \Omega^{ij} = g^{ja} \nabla_a V^i - g^{ia} \nabla_a V^j$$

モデル係数は、ストレインプラメータ S とローテーションパラメータ Ω の次のような関数で与える⁵⁶⁻⁵⁸⁾。

$$\alpha_1 = -0.1325 f_M, \quad \alpha_2 = 0.0675 f_M, \quad \alpha_3 = -0.0675 f_M$$

$$f_M = \frac{1}{1 + 0.02 M^2}, \quad C_\mu = \min \left[0.09, \frac{0.3}{1 + 0.09 M^2} \right], \quad M = \max(S, \Omega)$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S^{ia} g_{aj} S^{j\beta} g_{\beta i}},$$

$$\Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega^{ia} g_{aj} \Omega^{j\beta} g_{\beta i}}$$

非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いた計算結果として、図-21 に複断面流れの低水路・高水敷境界面に生じる大規模渦周辺の3次元解析結果(直角座標系)⁵⁸⁾、図-22 に越流型水制周辺の流れの3次元解析結果(移動一般座標系)⁵⁹⁾を示す。

計算法は有限体積法であり、圧力、 k および ε を直方体格子の中央で、流速ベクトルの成分を側面で定義する完全スタガード格子系が用いられている。計量テンソル、クリストフフェル記号等を格子点上で定義し、計算の過程で必要となる位置の値については、その都度内挿により求めている。用いている計

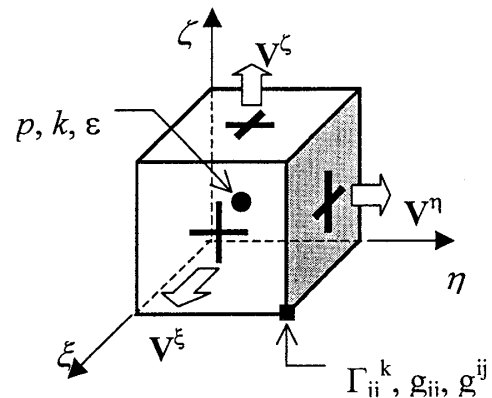


図-20 水理量の配置

算格子上の水理量の配置を図-20中に示している。

鉛直方向に変化する移動一般座標を用いているので、格子点位置は自由表面と底面を等間隔に分割することで1時間ステップ毎に更新される。自由水面変動量は、反変成分表示の基礎式においては次のように極めて簡単な式により計算される⁵²⁾。

$$\Delta h = \sqrt{g_{33}} V^3 \Delta t \quad (34)$$

上式で、 Δt : 計算時間間隔、 Δh : Δt 時間の水面変動量、添字 3 は鉛直方向を表す。

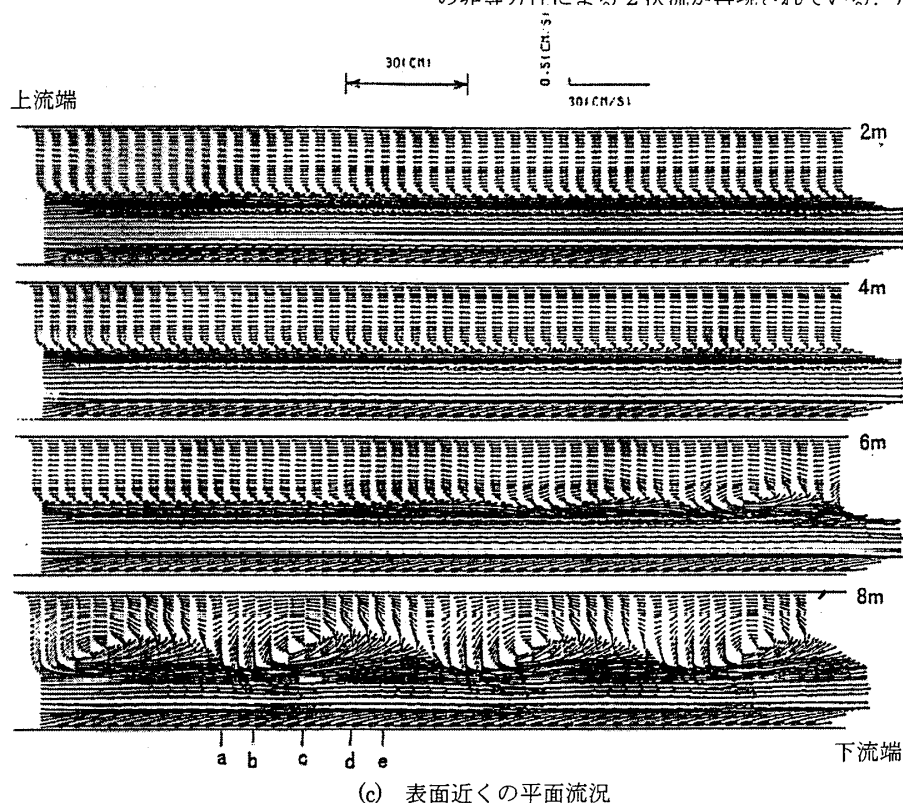
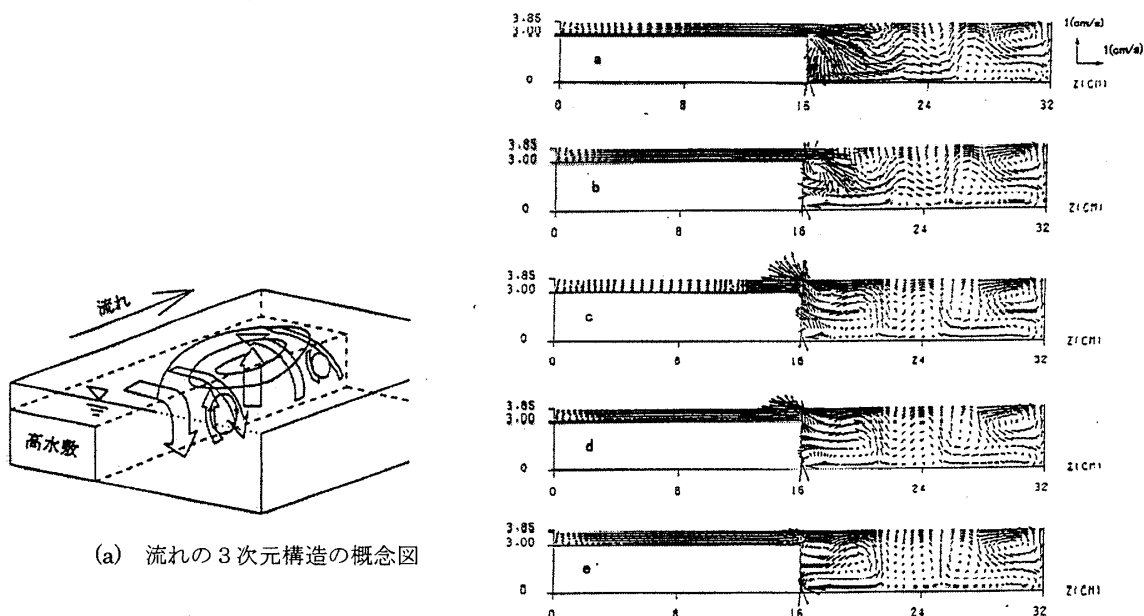


図-21 非線形 $k-\varepsilon$ モデルによる複断面開水路流れに生じる大規模渦の3次元数値解析

3. 河床・河道変動の数値解析

河床・河道変動の数値解析は、河川流のモデリングと解析法、及び河床・河道変動の素過程に関する研究と連動して進展してきた。まず、河床・河道変動の素過程について簡単にまとめ、その後、河川流の解析法と関連付けて河床・河道変動解析の進展について説明する。

河床変動の発生に関する安定解析と無次元水理量を用いた発生の領域区分、及び非線形解析による平衡状態の特性解析、河川蛇行の発生・発達過程に関する理論、固定砂州と流路蛇行の間の共鳴理論、河床変動の形状特性や流れの抵抗則などに関する数多くの研究については紙面の制約のため本稿では取り扱わないので、参考文献を参照されたい⁶⁰⁻⁶⁵⁾。(参考のため Appendix I に河床変動の実例を示した。)

3. 1 土砂輸送及び河床・河道変動に関わる素過程⁶⁰⁻⁶⁵⁾

3. 1. 1 土砂の輸送形態

河床・河道変動を解析するためには、流水中の土砂の輸送過程に関する素過程をモデル化する必要がある。古くから数多くの研究が行われてきた。得られた成果の詳細は多くの著書、委員会報告、原論文を参照していただき、ここでは基本的事項について簡単に記述する。

周知のように、流れによって河川を輸送される土砂は、輸送形態によって大きく次のように分類されている。

- ・掃流砂：河床に存在する砂礫で構成され、流れの抗力と揚力の効果で河床上を転動、滑動、サルテーション（小跳躍）を繰り返しながら輸送される。
- ・浮遊砂：乱れの作用の下で、河床に存在する砂粒が浮遊し、不規則に変動しながら長時間流水中に保持されながら輸送される。ただし、沈降と浮遊を通して河床砂礫との交換が行われる。
- ・ウォッシュロード：河床に存在しない微小な粒径範囲の土砂の成分で上流の土砂生産地から流出してきたものがそのまま流送される。河床砂礫との交換が行われない。

さらに、掃流砂と浮遊砂の遷移機構に着目した詳細な研究も行われてきたが、実用的な解析法に適用されるには至っておらず、今後の発展が期待される⁶⁶⁾。

3. 1. 2 掃流砂の輸送過程のモデル化

上記の輸送形態のうち、掃流砂の輸送過程について簡単に説明する。

ある地点に静止していた粒子群は、変動する流れの抗力と揚力の作用で確率的に動き始める。その後、転動やサルテーションによって短時間移動して停止し長時間休止することが知られている。この一連の過程を、河床表面の砂粒が単位時間に移動開始する確率密度であるピックアップ・レート(pick-up rate)と、動き始めた砂粒が河床に停止するまでの距離であるステップ・レングス(step-length)を用いて確率的に表現する方法を非平衡流砂モデル、または確率過程モデルと呼ぶ。

この方法はさらに、砂粒が移動する短い時間を無視する移動速度無限大のモデルと、移動過程も砂粒群の運動方程式を解くなどして考慮するモデルに分けられる。

非平衡流砂モデルはある地点を通過する砂粒の時空間的履歴をある程度忠実に考慮しようとしており、小規模河床波や河川構造物周辺の局所洗掘のような、河床変動の空間的スケールが砂粒移動のスケールと同等のオーダーの場合に適用される。

一方、河床変動の空間的スケールが砂粒移動のスケールより十分大きい場合、ある地点を通過する単位時間あたりの砂粒群の体積（流砂量）を、過去の履歴に関係なく局所的な水理量（流速、水深、底面せん断応力など）で評価する平衡流砂モデルを用いることが多い。流砂量を評価するために、これまで砂粒に作用する抗力や揚力とそれに抵抗する力の関係から導かれたもの、次元解析的に導かれたものなど多くの関係式が提案され、実験的に検証されてきた。平面 2 次元流れの解析と連動させるときは、流線方向と流線に直交する方向の流砂量を評価する必要がある。前者は上記 1 次元の流砂量式が適用され、後者は横断方向の河床勾配などを考慮して導かれた横断方向流砂量式が適用される。これらを一般座標系の基礎式に組み込む場合には、後述するように若干の演算が必要である。

実際に河床変動の解析を行うには、平面的な格子を考え、その格子から単位時間にピックアップされる砂粒量と上流からその格子に堆積する砂粒量を非平衡流砂モデルで評価して河床面の高さを計算する方法、格子の上流側と下流側断面を通過する流砂量の差で計算する方法が用いられる。後者は厳密には静止している河床面ではなく掃流砂層も含んだ高さを評価していることになる。

3. 1. 3 河岸侵食のモデル化

一方、蛇行などの流路の変動を解析する場合には、河道内の流れと河床変動を上記の方法で計算するとともに、何らかの河岸侵食・崩壊モデルを組み込む必要がある。たとえば、側岸侵食量を側岸での摩擦速度や断面平均流速からの偏差で評価する方法、間歇的河岸崩壊をモデル化する方法が用いられ、直線流路の拡幅、蛇行の発生・発達過程の理論解析や数値解析が行われている。（文献67の参考文献を参照）

例として、長谷川⁶⁸⁾が提案した河岸が非粘着性材料の場合の崩壊・堆積モデルの概念図を図-22に示す。線(1)はある崩壊直前の河岸横断形状である。線(3)は崩落幅だけ流路外方向に平行移動させた線を表し、次の崩壊・堆積が生じた後の河岸横断形状である。水中の横断勾配は水中安息角である。水面より上方の横断勾配は安息角より大きいが、非粘着性材料でも間隙水の表面張力の効果で見かけの粘着力が作用するためと考えられている。

崩落発生の判定は、崩落幅に対して崩落部の面積と埋め戻し部の面積が等しくなったとき生じるとする条件が適用される。このモデルでの崩壊・堆積過程は、間歇的に生じる過程の一回々々を再現しているのではない。侵食過程にある河岸の断面形状は観測結果から相似性を有することが知られており、トータルの河岸侵食量は河岸近傍の河床低下量で計算可能であると仮定している。

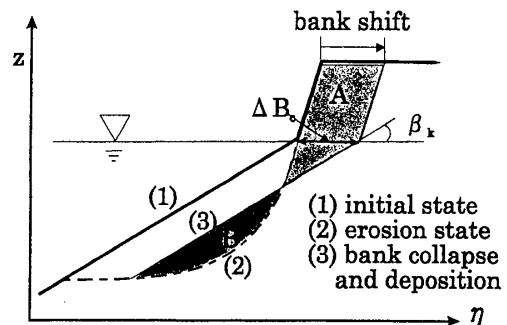


図-22 河岸崩壊・堆積モデルの概念図

3. 1. 4 混合砂の取り扱い

平野⁶⁹⁾は混合砂河床において砂粒の移動が起こるのは河床の表面のごく薄い層（交換層）であると考え、河床をこの交換層とそれ以下の原河床に分け、粒度分布の変動は交換層のみで進行するものと考えた。この場合、粒度分布の変動は次式で計算される。より詳細なモデルが江頭⁷⁰⁾により提案されている。

$$\frac{\partial f_{bi}}{\partial t} = \frac{1}{\theta_E} \frac{\partial z_i}{\partial t} - \frac{1}{\theta_E} \frac{\partial z_b}{\partial t} \{ \zeta f_{bi} + (1 - \zeta) f_{bi0} \}, \quad \frac{\partial z_b}{\partial t} > 0: \zeta = 1, \quad \frac{\partial z_b}{\partial t} < 0: \zeta = 0 \quad (35)$$

ここに、 z_b : 河床高さ、 θ_E : 交換層の厚さ、 f_{bi0} : 原河床の粒径階 i の含有率。

3. 2 河床・河道変動の数値解析

これまでに説明してきた河川流のモデリングと河床・河道変動の素過程のモデルを組み合わせ、種々の河床・河道変動の数値解析が行われてきた。

3. 2. 1 水深積分モデルによる小規模河床波の再現

流れのモデルとして2. 2 (3) 波状路床上の流れで説明した鉛直加速度を考慮した水深積分モデル（ブシネスク方程式原型）式(5)を用い、非平衡流砂モデルを組み合わせに行った砂堆のシミュレーション結果を図-21に示す⁷¹⁾。水深積分モデルの中で底面せん断応力の評価を工夫するとともに、砂粒の移動のスケールと河床変動のスケールが同等なので下記の非平衡流砂モデルを用いている。初期に流れと波状路床の共鳴関係式を満たす波長の河床波が発生し、その後平衡状態まで発達する様子、それに伴い流れの抵抗（水深）が増加していることがわかる。このモデルで反砂堆も再現することができる。

$$\frac{\partial y_b}{\partial t} = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{A_3}{A_2} d(p_d - p_s) \quad (36)$$

ここに、 p_s : ピックアップレイト、 p_d : デポジットレイト、 d : 砂粒の粒径、 λ : 河床の空隙率。ピックアップレイト及びステップレングスは下記の式で評価される⁷²⁾。

$$p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = 0.03\tau_* (1 - 0.035/\tau_*)^3 \quad (37)$$

$$f_s(s) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (38)$$

ここに、 σ : 砂粒の密度、 τ_* : 無次元掃流力、 Λ : ステップレングス、 s : 砂粒がピックアップされ

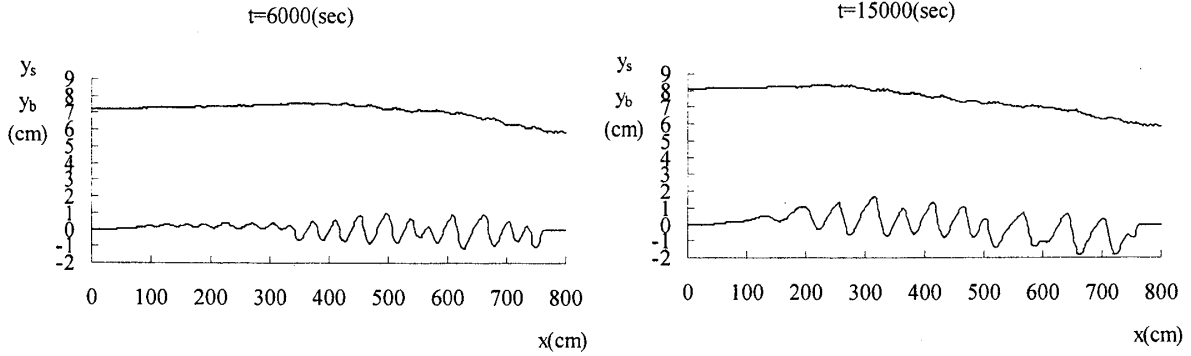


図-23 砂堆の発生・発達過程と流れの抵抗の増加の数値解析結果

た位置からの距離, A_2, A_3 : 形状係数 ($= \pi/4, \pi/6$).

3. 2. 2 中規模河床波の数値解析

静水圧を仮定した通常の水深積分モデルと平衡流砂モデルを用いた線形安定解析から, 水理条件によって河床に与えられた微小擾乱が不安定になることが示され⁷³⁾, この基礎式の組み合わせで中規模河床波を再現できる可能性が示された. その後, 清水等⁷⁴⁾, Nelson 等⁷⁵⁾により交互砂州の数値計算が行われた. 最近でも, 複列砂州の再現, 交互砂州の形成に及ぼす浮遊砂や混合砂の影響, 固定砂州と河道湾曲の共鳴現象など様々な研究が行われている⁷⁶⁻⁸¹⁾.

流れ解析の基礎式は式(12)と同様である. また, 基準水平面に置かれた直角座標系で表示された流砂の連続式は下記のようなになる.

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} \right) = 0 \quad (39)$$

ここに, z_b : 河床高, λ : 河床材料の空隙率, (q_{Bx}, q_{By}) : $x-y$ 座標系の単位幅流砂量の成分である.

これを一般座標系で表示すれば以下のようなになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z_b}{J} \right) + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_B^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q_B^\eta}{J} \right) \right) = 0 \quad (40)$$

ここに, (q_B^ξ, q_B^η) : 流砂量の反変成分であり, 以下に示す手順に従って評価する.

まず, 流線とその直角方向すなわち (s, n) 方向の単位幅流砂量 (q_{Bs}, q_{Bn}) を, たとえば次式に表される Meyer-Peter・Muller 式と長谷川式で評価する.

$$\text{M-P・M 式: } q_{Bs} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right)} g d^3 \quad (41)$$

$$\text{長谷川式: } q_{Bn} = q_{Bs} \left(\frac{u_{nb}}{u_{sb}} - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial z_b}{\partial n} \right) \quad (42)$$

ここに, d : 河床材料の粒径, τ_* : 無次元掃流力, τ_{*c} : 無次元限界掃流力, ρ : 水の密度, σ : 河床材料の密度, (u_{sb}, u_{nb}) : 河床における流速の (s, n) 方向成分, μ_s, μ_k : 河床材料の静止および動摩擦係数である.

次に, (q_{Bs}, q_{Bn}) から, 流線と x 軸のなす角度 γ を用いて流砂量ベクトルの (x, y) 方向成分 (q_{Bx}, q_{By}) を求める.

$$q_{Bx} = q_{Bs} \cos \gamma - q_{Bn} \sin \gamma, \quad q_{By} = q_{Bs} \sin \gamma + q_{Bn} \cos \gamma$$

さらに, 次式より直角座標系の流砂量成分 (q_{Bx}, q_{By}) を反変成分 (q_B^ξ, q_B^η) に変換する.

$$q_B^\xi = \xi_x q_{Bx} + \xi_y q_{By}, \quad q_B^\eta = \eta_x q_{Bx} + \eta_y q_{By}$$

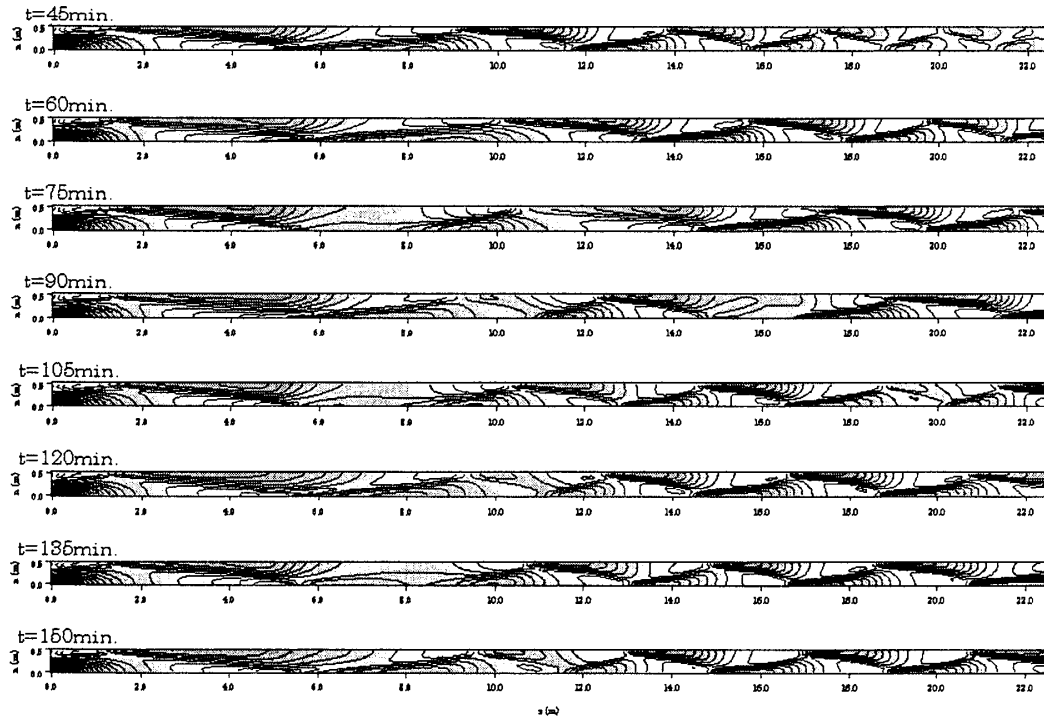


図-24 交互砂州の形成と伝播過程の数値解析結果

また、長谷川式⁶⁸⁾における2次流による河床での流速 u_{nb} は次式で算出する。

$$u_{nb} = -N_* \frac{h}{R} u_{sb} \quad (43)$$

ここに、 R ：流線の曲率半径、 N_* ：係数(=7.0)である。

図-24に、上記の基礎式系を用いた交互砂州の形成・移動過程の数値計算結果を示す⁸⁰⁾。

3. 2. 3 侵食性河岸を有する流路の変動

河岸侵食に伴う流路の変動に関しても、側岸侵食に伴う1次元河床変動式を用いた流路拡幅過程の解析、側岸侵食現象における流砂の非平衡性やせん断応力分布算出法の重要性に着目した研究、平面形状の安定性と蛇行の発達減衰、及びこれらの数値解析的研究など多くの研究が行われてきた⁸²⁻⁸⁵⁾。

最近では、河岸侵食による流路の変動の数値計算を行う場合、流れ解析に2. 2 (8)で述べた移動一般座標系を用いる方法に、河床変動モデル(平衡・非平衡)と3. 1 (3)で述べた河岸侵食モデルを組み込むことで河岸線の移動と河床変動の数値解析が行われている。

写真-3に砂地に掘った溝に通水した後の流路変動に関する実験結果を示した。図-25, 26は上記の移動一般座標系での水深積分モデルと非平衡流砂モデルの組み合わせたモデルで数値解析した結果である^{84,85)}。まず交互砂州が生じ、次に交互砂州の発達により流れが蛇行することで水衝部で交互に河岸侵食が生じ、徐々に流路の蛇行が発達していく様子が再現されている。

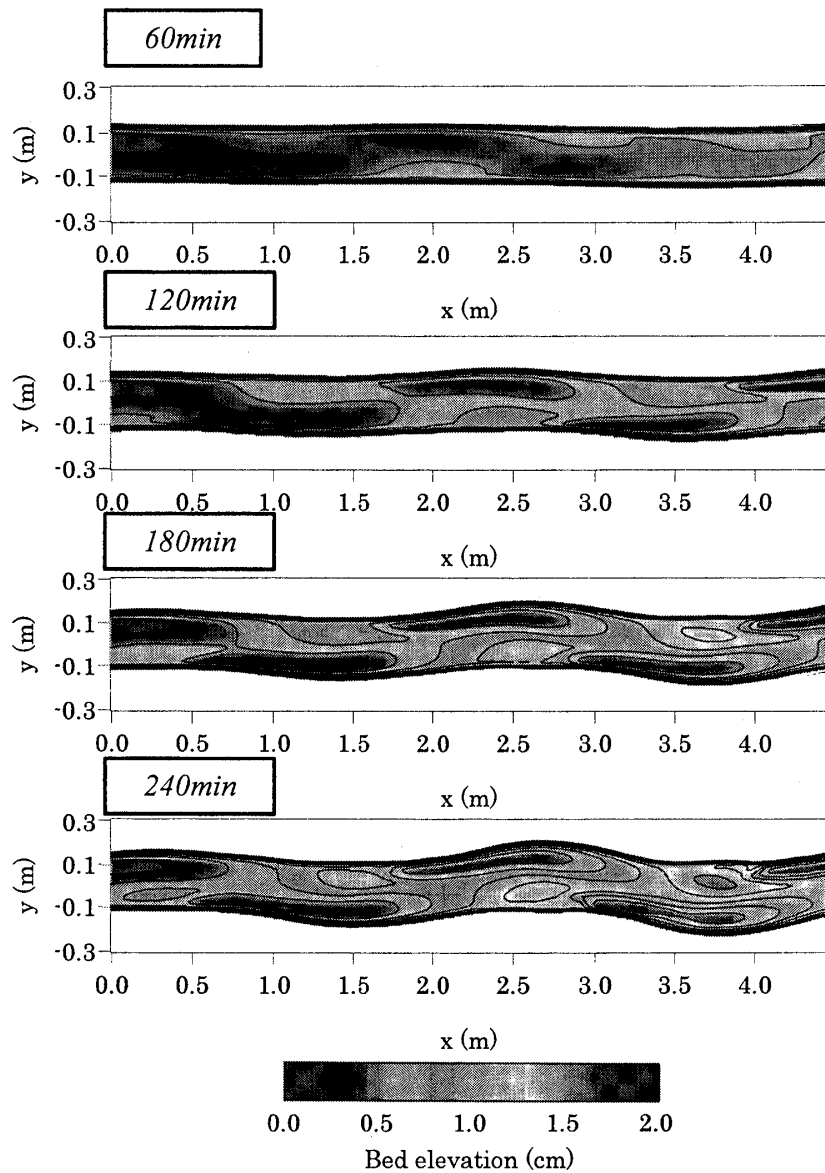


図-25 侵食性流路の河岸侵食による変動に関する数値解析結果

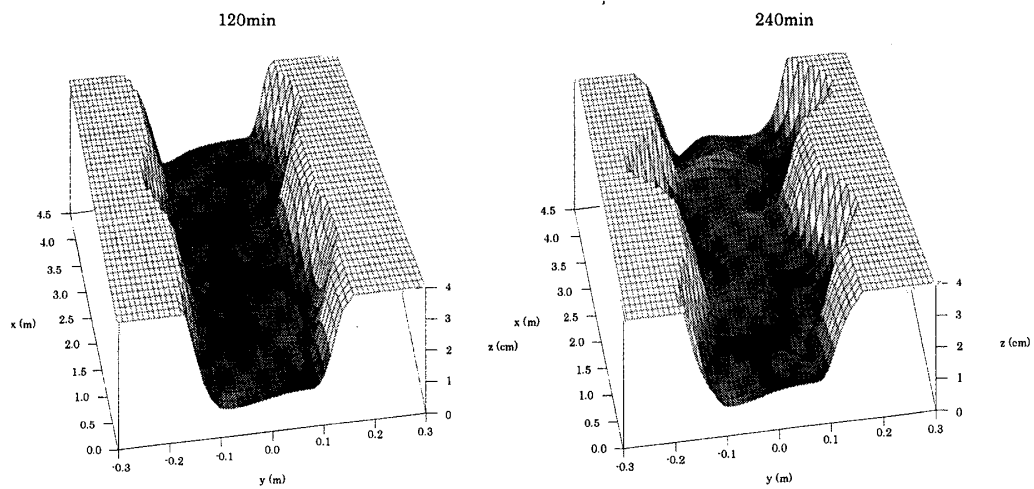


図-26 侵食性流路の河岸侵食による変動に関する数値解析結果（鳥瞰図）

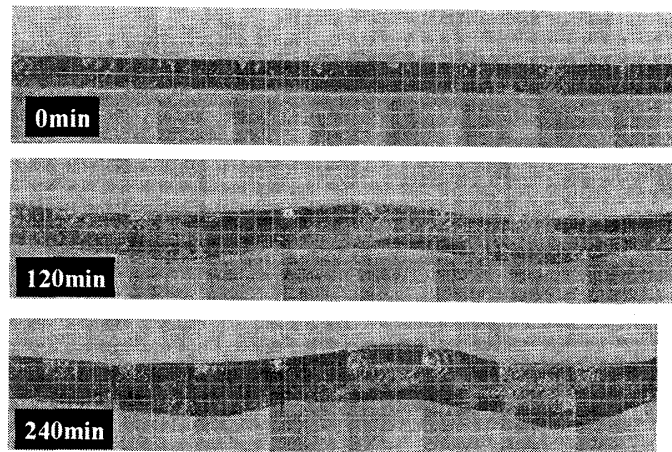


写真-3 直線水路での河岸侵食実験

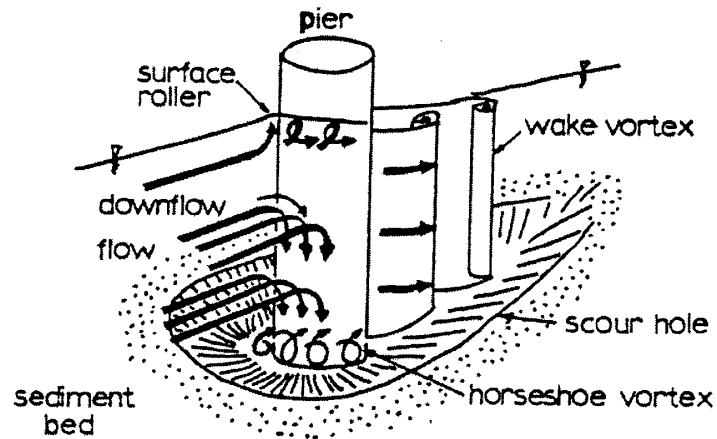


図-27 橋脚周辺の流れ構造と局所洗掘現象の概念図

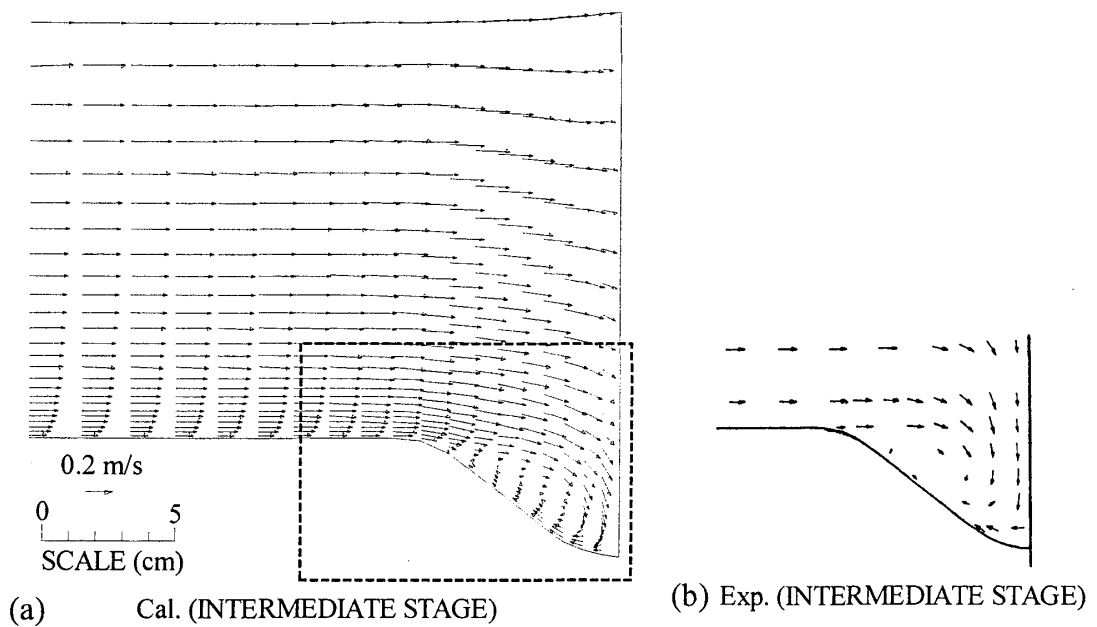


図-28 非線形 $k-\varepsilon$ モデルと粒子の運動方程式を解く非平衡流砂モデルによる橋脚周辺の局所洗掘の数値解析結果

3. 2. 4 河川構造物周辺の局所洗掘現象の数値解析

河川構造物周辺の流れは強い3次元性を示すため、局所洗掘の予測は3次元流れ解析と平衡または非平衡の河床変動解析を連動して行われる。これまでに、橋脚や水制周辺の局所洗掘、複断面蛇行河道の低水路の河床変動予測などが行われてきた^{45-50,86-88}。

ここでは例として橋脚周りの局所洗掘の数値解析結果を示す⁸⁷。現象の概念図を図-27に示した。流れ解析として、乱流モデルとして非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用い、数値計算法として移動一般座標系の基礎式に有限体積法を適用した3次元解析法を用いている。この流れ解析と並行して、砂粒群の運動方程式を解く非平衡流砂モデルを用いて河床変動の計算を行った結果を図-28に示す。本非線形 $k-\varepsilon$ モデルの構造物周りの3次元流れに対する適用性は別途検討しており、馬蹄形渦やカルマン渦もほぼ再現できることを確かめている^{56,57}。

4. おわりに

本稿では、河川流とそれに伴う河床変動や河川蛇行の数値解析について、まず流れと流砂過程の実用的なモデル化を概説するとともに、それらを組み合わせた数値解析結果の例を示した。今後、流れと流砂過程に関して、粒子法などを適用したより精緻なシミュレーションの研究がより進展すると考えられる。それと同時に、河川源流域から河口までの長距離・長時間の土砂動態を連続して取り扱うことができる、3次元的效果を考慮した水深積分型モデルの高精度化の進展も実用的観点から期待される。

参考文献

- 1) 土木学会水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度，土木学会論文報告集，第210号，pp.65-91，1973.
- 2) 細田 尚・岩佐義朗・河村直明・米山 望：不規則なサルテーション粒子を伴う開水路流れの流速分布解析，第5回数値流体力学シンポジウム論文集，493-496，1991.
- 3) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次：PSIセルモデルによるSaltation層の解析，海岸工学論文集，第39巻，pp.266-270，1992.
- 4) 井上和也：開水路非定常流の数値解析法とその水工学への応用に関する研究，京都大学学位論文，1986.
- 5) 細田 尚・朝位孝二：ダム破壊流れの1次元解析，水工学における計算機利用の講習会講義集（土木学会水理委員会基礎水理部会），23-31，1999.
- 6) 朝位孝二・細田 尚：移流方程式の数値解析，水工学における計算機利用の講習会講義集（土木学会水理委員会基礎水理部会），13-22，1999.
- 7) Iwasa, Y., Hosoda, T. and Yokosi, S.: Flow behaviors in headrace tunnel of run-of-the river power stations, Proc. International Symposium of Channel Flow and Catchment Runoff, Univ. of Virginia, 669-678, 1989.
- 8) Iwasa, Y.: Analytical considerations on cnoidal and solitary waves, Memoirs Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.17, No.4, 1955.
- 9) 細田 尚・岩佐義朗：開水路における波動の分散性，第26回水理講演会論文集，401-407，1982.

- 10) 細田 尚・多田彰秀：鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析，水工学論文集，第 38 巻，457-462，1994.
- 11) Madsen, P.A., Murry, R. and Sorensen, O.R.: A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp.374-388, 1991.
- 12) Nwogu, O.: Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Water, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.
- 13) 音田慎一郎・細田 尚・木村一郎：鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と多次元数値解析結果を用いた検証について，水工学論文集，第 46 巻，pp.589-594，2002.
音田慎一郎・細田 尚・木村一郎：鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルの改良とその検証について，土木学会論文集，2004.5（印刷中）.
- 14) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible channels, J. Fluid Mech., Vol.16, Part 4, 1963.
- 15) Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Vol.96, HY2, pp.357-366, 1970.
- 16) Iwasa, Y. and Kennedy, J.F.: Free surface shear flow over a wavy bed, Proc. ASCE, Vol.94, HY2, pp.431-454, 1968.
- 17) 日野幹雄・宮永洋一：波状境界をもつ二次元管路流の解析，土木学会論文報告集，No.264, pp.63-75, 1977.
- 18) Kobayashi, N.: Turbulent flows over a wavy boundary and formation of bed forms in erodible channels, Dissertation for the degree of Ph.D. at MIT, 1979.
- 19) 細田 尚・余越正一郎・岩佐義朗：3次元波状路床上の流れに関する解析，広島大学工学部研究報告，第 32 巻，第 1 号，47-51，1983.
- 20) 細田 尚・村本嘉雄・宮本雅章：水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析，土木学会論文集 No. 558/2-38，81-89，1997.
- 21) 細田 尚・余越正一郎：高速湾曲流に関する二，三の検討，土木学会論文集，第 387／II-8，171-178，1987.
- 22) 岩佐義朗・細田 尚：漸縮水路の高速流に関する数値解析，京都大学防災研究所年報，第 32 号 B-2，657-667，1989.
- 23) 岩佐義朗・細田 尚・河村直明・米山 望：高速流における水際線の取扱いとその適用について，水工学論文集，第 35 巻，531-36，1991.
- 24) Hosoda, T. and Kimura, I.: Vortex formation with free surface variations in shear layer of plane-2D open channel flow, Proc. of 9th International. Symposium on Turbulent Shear Flows, Vol.1, P112, 1-4, Kyoto, Japan, 1993.
- 25) 木村一郎・細田 尚・友近文志：開水路流れ混合層におけるせん断不安定波動の空間的増幅特性，土木学会論文集，No. 509／II-30，99-109，1995.
- 26) Kimura I. and Hosoda T.: Fundamental properties of flows in an open channel with a rectangular dead zone, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.123, No.2, 98-107, 1997.
- 27) Kimura, I. and Hosoda, T.: Numerical simulation of tidal vortices in the Naruto Straits, CD-Proc. of the 28th

Congress of the International Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 6p, 1999.

- 28) Kimura I., Hosoda T., Muramoto, Y. and Yasunaga, R.: Numerical analysis of horizontal vortices in compound open channel flows by the two-layered flow model, Proc. of the 27th Congress of the International Association for Hydraulic Research, Theme A, 823-828, 1997.
- 29) 細田 尚・長田信寿・村本嘉雄：移動一般座標による開水路非定常流の数値解析，土木学会論文集 No. 553/2-34, 267-272, 1996.
細田 尚・音田慎一郎・浜崎宏正：移動一般座標系での浅水流方程式の数値解析法とその検証，土木学会応用力学論文集 Vol.6, pp.873-882, 2003.
- 30) 長田信寿：一般座標系を用いた平面 2 次元非定常流れの数値解析，水工学における計算機利用の講習会講義集（土木学会水理委員会基礎水理部会），61-76, 1999.
- 31) 村本嘉雄・井上喬之：開水路彎曲流の内部機構，京大防災研究所年報，第 8 号，pp.415-428, 1965.
- 32) Kalkwijk, J.P.Th. and De Vriend, H.J.: Computation of the flow in shallow river bends, J. Hydraulic Res., 18, No.4, pp.327-342, 1980.
- 33) Ikeda, S. and Nishimura, T.: Flow and bed profile in meandering sand-silt rivers, J. Hydraulic Engrg., ASCE, Vol.112, No.7 (1986), pp.562-579.
- 34) Johannesson, H. and Parker, G.: Secondary flow in mildly sinuous channel, J. Hydraulic Engrg., ASCE, Vol.115, No.3 (1989), pp.289-308.
- 35) 西本直史・清水康行・青木敬三：流線の曲率を考慮した蛇行水路の河床変動計算，土木学会論文集，No.456/II-21, 1992, pp.11-20.
- 36) 細田 尚・長田信寿・岩田通明・木村一郎：一般座標系での主流と 2 次流の遅れを考慮した平面 2 次元モデル，水工学論文集，第 44 巻，587-592, 2000.
Hosoda, T., Nagata, N., Kimura, I. and Michibata, K.: A depth averaged model of open channel flows with lag between main flows and secondary currents an a generalized curvilinear coordinate, Advances in Fluid Modeling & Turbulence Measurements, World Scientific, pp.63-70, 2002.
- 37) 長田信寿・細田尚・村本嘉雄：河岸侵食を伴う河道変動の特性とその数値解析手法に関する研究，土木学会論文集，No.621/II-47,, 23-39, 1999.
- 38) Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, J. Hydraulic Div., ASCE, 100(11), pp.1631-1648, 1974.
- 39) Hicks, F.E., Jin, Y.C. and Steffler, P.M.: Flow near sloped bank in curved channel, J. Hydraulic Engrg., ASCE, Vol.116, No.1 (1990), pp.55-70.
- 40) 細田 尚：任意曲面上の開水路流れの水深積分モデルとその応用について，水工学論文集，第 45 巻，607-612, 2001.
- 41) 細田 尚・井上和也・多田彰秀：管路・開水路流れ境界面の伝播を考慮した非定常流の数値解析法，京都大学防災研究所年報，第 36 号 B-2, 593-605, 1993.
- 42) 多田彰秀・細田 尚・井上和也：管路・開水路流れ境界面の発生する管水路のサージ現象，京都大学防災研究所年報，第 37 号 B-2, 475-488, 1994.
- 43) 細田 尚・多田彰秀・井上和也・北原政宏：管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う急変非定常流の解析法に関する基礎的研究，土木学会論文集，No.503/II-29, 89-97, 1994.

- 44) 細田 尚・多田彰秀・岩田道明・村本嘉雄・古八健夫：地表流と地下水路流の相互作用を考慮した非定常流解析法，応用力学論文集 Vol.1, .293-301, 1998.
- 45) Shimizu, Y. and Itakura, T.: Calculation of bed variation in alluvial channels, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.115, No.3, pp.367-384, 1987.
- 46) Fukuoka, S., Watanabe, A. and Okada, S.: Analysis of bed topography in a compound meandering channel using a 3-D numerical model with assumption of hydrostatic pressure, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.17, No.2, pp.97-105, 1999.
- 47) 福岡捷二・西村達也・高橋晃・川口昭人・岡信昌利：越流型水制工の設計法の研究，土木学会論文集，No.593/II-43, pp.51-68, 1998.
- 48) 福岡捷二・富田邦裕・堀田哲夫・宮川朝浩：橋脚まわりの局所洗掘推定のための実用的数値シミュレーションの開発，土木学会論文集，No.497/II-28, pp.71-79, 1994.
- 49) 檜谷 治：河川および浅水湖の3次元流れと平面2次元河床変動に関する研究，京都大学学位論文，1992.
- 50) 牛島 省・清水隆夫・保坂 稔：局所洗掘数値解析手法の発電所放水口前面への適応性，水工学論文集，第42巻，pp.1009-1014, 1998.
- 51) 棚津家久・山上路生：非定常開水路流れの内層における乱流構造に関する数値計算，水工学論文集，第46巻，pp.397-403, 2002.
- 52) Takizawa, A., Koshizuka, S. and Kondo, S.: Generalization of physical component boundary fitted co-ordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.15, pp.1213-1237, 1992.
- 53) 木村一郎・細田 尚・音田慎一郎：完全スタガード移動一般曲線座標系における開水路乱流シミュレータの開発，四日市大学環境情報論集，Vol.5, pp.145-170.
- 54) Pope, S.B.: A more general effective viscosity hypothesis, J. Fluid Mech., Vol.72, pp.331-340, 1975.
- 55) Gatski, T.B. and Speziale, C.G.: On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, J. Fluid Mech., Vol.254, pp.59-78, 1993.
- 56) Kimura, I. and Hosoda, T.: 3-D unsteady flow structures around rectangular column in open channels by means of non-linear $k-\epsilon$ model, Proc. of 1st International Symposium on TURBULENCE and SHEAR FLOW PHENOMENA, Santa Barbara, USA, pp.1001-1006, 1999.
- 57) Kimura, I. and Hosoda, T.: A non-linear $k-\epsilon$ model with realizability for prediction of flows around bluff bodies, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 42, pp.813-837, 2003.
- 58) Hosoda, T., Sakurai, T., Kimura, I. and Muramoto, Y.: 3-D computations of compound open channel flows with horizontal vortices and secondary currents by means of non-linear $k-\epsilon$ model, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.17, No.2, 87-96, 1999.
- 59) 木村一郎・細田 尚・音田慎一郎・富永晃宏：非線形 $k-\epsilon$ モデルによる斜め越流型水制周辺の三次元流況に関する数値解析，応用力学論文集，Vol.5, 2002.
- 60) 吉川秀夫編：流砂の水理学，丸善，1985.
- 61) 中川博次・辻本哲郎：土木学会編 新体系土木工学 23 移動床流れの水理，技報堂出版，1986.

- 62) 土木学会水理委員会「洪水流の三次元流況と流路形態」研究小委員会：洪水流の三次元流況と流路形態に関する研究（小委員会報告書），1982.
- 63) 村本嘉雄：流路形態，土木学会水工学シリーズ，A-8，1976.
- 64) 土木学会水理委員会「流砂量と河床形状」研究小委員会：流砂量と河床形状に関する研究（小委員会報告書），1990.
- 65) 土木学会水理委員会基礎水理部会：水理講演会 10 年の歩みとこれからの基礎水理学の展開（基礎水理部会報告書），1999.
- 66) 関根正人：掃流砂・浮遊砂に関する最近の研究をふりかえって，水理講演会 10 年の歩みとこれからの基礎水理学の展開（基礎水理部会報告書），pp.55-60，1999.
- 67) 長田信寿：流路変動過程の数値解析法とその応用に関する研究，京都大学学位論文，1998.
- 68) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究，北海道大学学位論文，1983.
- 69) 平野宗夫：Armoring をともなう河床低下について，土木学会論文報告集，第 195 号，pp.55-65，1971.
- 70) 芦田和男・江頭進治・劉 炳義：蛇行流路における流砂の分級および河床変動に関する数値解析，水工学論文集，第 35 巻，pp.383-390，1991.
- 71) 細田 尚・加藤隆彰：水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション，水工学論文集，第 44 巻，617-622，2000.
音田慎一郎・細田 尚：水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析，水工学論文集，第 48 巻，pp.973-978，2004.
- 72) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to load motion, Proc. ASCE, Vol. 106, HY12, pp.2029-2051, 1980.
- 73) 黒木幹男・岸 力：中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究，土木学会論文報告集，第 342 号，pp.87-96，1984.
- 74) 清水康行・板倉忠興・山口甲：2 次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション，第 31 回水理講演会論文集，pp.689-694，1987.
- 75) Nelson, J. and Smith, J.: Flow in meandering with natural topography, River Meandering, Water Resources Monograph 12, American Geophysical Union, pp.69-102, 1989,
- 76) 清水康行・Tubino, M.・渡邊康玄：自由砂州と固定砂州の共鳴条件における河床変動計算，水工学論文集，第 36 巻，pp.15-22，1992.
- 77) 渡邊康玄・Tubino, M.：掃流砂・浮遊砂を伴う流れの交互砂州の発生に関する研究，水工学論文集，第 36 巻，pp.7-14，1992.
- 78) 芦田和男・江頭進治・劉 炳義：二層モデルによる複断面河道の流れおよび河床変動の数値解析，京大防災研究所年報，第 35 号，B-2，pp.41-62，1992.
- 79) 竹林洋史：直線河道の砂州に関する土砂水理学的研究，立命館大学学位論文，1999.
- 80) 長田信寿・内倉嘉彦・細田尚・矢部昌之・高田保彦・岩田通明・村本嘉雄：各種河道条件下における交互砂州の挙動について，水工学論文集，第 43 巻，743-748，1999.

- 81) Kurabayashi, H., Shimizu, Y. and Fujita, M.: Numerical calculation of bed deformation in multiple and braided bar stream, J. of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.20, No.1, pp.127-136, 2002.
- 82) Ikeda, S., Parker, G., Sawai, K.: Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development, J. Fluid Mech., Vol. 112, 363-377, 1981.
- 83) 清水康行・平野道夫, 渡邊康玄: 河岸侵食と自由蛇行の数値計算, 水工学論文集, 第 40 巻, pp.921-926, 1996.
- 84) 長田信寿・細田 尚・村本嘉雄・Md. Munsur Rahman : 移動一般座標系による側岸侵食を伴う河道変動の数値解析, 水工学論文集, 第 40 巻, pp.927-932, 1996.
- 85) Nagata, N., Hosoda, T., and Muramoto, Y.: Numerical analysis of river channel processes with bank erosion, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.126, No.4, 243-252, 2000.
- 86) Peng, J., Tamai, N. and Kawahara, Y.: Numerical modeling of local scour with spur dikes, Proc. 28th IAHR Congress, B110-B115, 1999.
- 87) Nagata, N., Hosoda, T., Nakato, T. and Muramoto, Y.: 3D numerical simulation of flow and local scour around a cylindrical pier, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.19, No.2, pp.113-125, 2001.
- 88) 長田信寿・細田尚・村本嘉雄・中藤達昭 : 3次元移動座標系・非平衡流砂モデルによる水制周辺の河床変動解析, 土木学会論文集, No.684/II-56. pp.21-34, 2001.

Appendix A 1次元非定常流解析の基礎式の誘導

1次元非定常流解析で用いられる連続式の誘導過程を示す。

1次元運動量式も同様に導くことができる。

3次元直角座標系を用いて連続式を書き表せば式(A-1)となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-1})$$

ここに、 (x, y, z) ：空間座標、 (u, v, w) ：流速ベクトルの (x, y, z) 方向成分。ただし、 x 方向を流れ方向とする。

式(A-1)を図に示した断面で積分する。ライプニッツ公式を用いて式(A-1)の各項を積分すれば以下ようになる。

$$\int_{y_b}^{y_s} \int_{b_l}^{b_r} \frac{\partial u}{\partial x} dz dy = \int_{y_b}^{y_s} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{b_l}^{b_r} u dz - u_{b_r} \frac{\partial b_r}{\partial x} + u_{b_l} \frac{\partial b_l}{\partial x} \right) dy \quad (\text{A-2a})$$

$$\int_{y_b}^{y_s} \int_{b_l}^{b_r} \frac{\partial v}{\partial y} dz dy = \int_{y_b}^{y_s} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_{b_l}^{b_r} v dz - v_{b_r} \frac{\partial b_r}{\partial y} + v_{b_l} \frac{\partial b_l}{\partial y} \right) dy \quad (\text{A-2b})$$

$$\int_{y_b}^{y_s} \int_{b_l}^{b_r} \frac{\partial w}{\partial z} dz dy = \int_{y_b}^{y_s} (w_{b_r} - w_{b_l}) dy \quad (\text{A-2c})$$

境界面での条件

$$w_{b_r} - u_{b_r} \frac{\partial b_r}{\partial x} - v_{b_r} \frac{\partial b_r}{\partial y} - \frac{\partial b_r}{\partial t} = 0$$

を用いて式(A-2a)から式(A-2b)の和をとれば次式が導かれる。

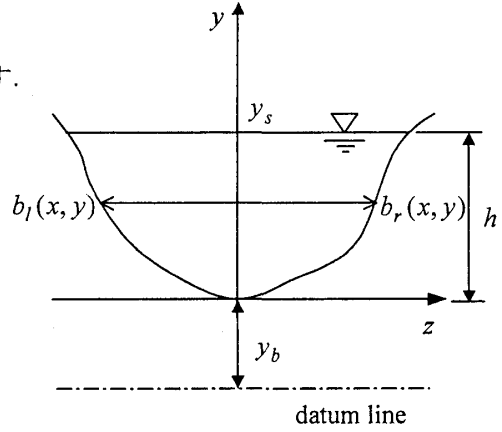
$$\int_{y_b}^{y_s} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{b_l}^{b_r} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b_l}^{b_r} v dz \right) dy = 0 \quad (\text{A-3})$$

式(A-3)をライプニッツ公式と自由表面の境界条件

$$v_{y_s} = \frac{\partial y_s}{\partial t} + u_{y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x} \quad (\text{A-4})$$

を用いて書き直せば式(A-5)となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_b}^{y_s} \int_{b_l}^{b_r} u dz - \left[\int_{b_l}^{b_r} u dz \right]_{y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x} + \left[\int_{b_l}^{b_r} u dz \right]_{y_b} \frac{\partial y_b}{\partial x} \\ & + \left[\int_{b_l}^{b_r} v dz \right]_{y_s} + \left[\int_{b_l}^{b_r} v dz \right]_{y_b} \\ & = \frac{\partial Q}{\partial x} - \int_{b_l}^{b_r} \left(u \frac{\partial y_s}{\partial x} - v \right) dz + \int_{b_l}^{b_r} \left(u \frac{\partial y_s}{\partial x} - v \right) dz = (b_r - b_s)_{y_s} \frac{\partial y_s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \\ & = b_s \frac{\partial y_s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$



ここに, b_s は次式で定義される水面幅を表す.

$$b_s \equiv b_r - b_l \quad (\text{A-6})$$

式(A-5)は, 容易に導かれる関係式

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b_s \frac{\partial y_s}{\partial t} \quad (\text{A-7})$$

を用いると, 慣用の 1 次元非定常流の連続式(A-8)に帰着することがわかる.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-8})$$

1 次元運動量式も, 主流方向の流速分布の一樣性と静水圧分布を仮定して, 連続式と同様に導かれる. 結果のみ示せば次式となる.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial uQ}{\partial x} + gA \frac{\partial y_s}{\partial x} = -gA \frac{\tau_{bx}}{\rho g R} \quad (\text{A-9})$$

ここに A : 断面積, R : 径深 ($\equiv$ 断面積/潤辺).

演習 A-1

式(A-7)を導け.

演習 A-2

次式を証明せよ.

$$\int_{y_b}^{y_s} \int_{b_l}^{b_r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz dy = gA \frac{\partial y_s}{\partial x}$$

Appendix B 1次元ダム破壊流れの数値解析法¹⁾

1. はじめに

不連続部（段波）の伝播を伴う開水路非定常流の典型的な例として1次元ダム破壊流れを取り上げ、まず特性曲線法に基づいた数値解析法の基本的な考え方、およびその考えを発展させた1次精度の流束差分法（FDS）を説明する。この際、不連続部（段波の部分）近傍での水理量の数値振動を回避するために、移流方程式形の線形結合で表される特性曲線上の関係式に対してTVDスキームが用いられる。また、洪水氾濫解析などで用いられている有限体積法と流束差分法の関係を示し、有限体積法から導かれる離散式に数値粘性項を付加した式が1次精度の流束差分法による差分式に対応することを説明する。

さらに、移流方程式の数値解析と対応して、高次精度の数値解析法について説明する。流束差分法の場合は、特性曲線上の関係式に高次精度のTVDスキーム、例えばTVD-MUSCLスキームを用いて高精度化されることが示される。また、実用的によく用いられているMacCormack法や、近年数値流体力学の分野で著しく普及してきたCIP法の適用についても説明する。

2. 基礎式と特性曲線法

2. 1 基礎式

1次元解析法で用いられる開水路非定常流の基礎式は次式となる。ただし、基準面を水平面としている。

$$\text{[連続式]} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{B1})$$

$$\text{[運動量式]} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial uQ}{\partial x} + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} = -gA \frac{\tau_{bx}}{\rho g R} + \frac{\partial (-u'^2 A)}{\partial x} \quad (\text{B2})$$

ここに、 Q :流量、 A :流水断面積、 u :断面平均流速、 z_s :基準水平面からの水位、 R :径深、 τ_{bx} :路床に作用する応力ベクトルのx-方向成分、 g :重力加速度、 u' :乱れ速度、 ρ :流体の密度、 t :時間、 x :空間座標。

運動量式(2)の右边第2項は乱れ速度による運動量輸送項であり、開水路非定常流の解析では無視されることが多い。また、右边第1項は通常式(3)で表される Manning 則を用いて評価される。

$$\frac{\tau_b}{\rho} = \frac{gn^2 u |u|}{h^{1/3}} \quad (\text{B3})$$

ここでは図-1に示したダム破壊流れを例として、特性曲線法に基づいた開水路非定常流の数値解析法に関する基本的事項の説明を目的としており、簡単のため単位幅で考えた基礎式(4)-(6)を用いる。式(2)の右边も無視されている。

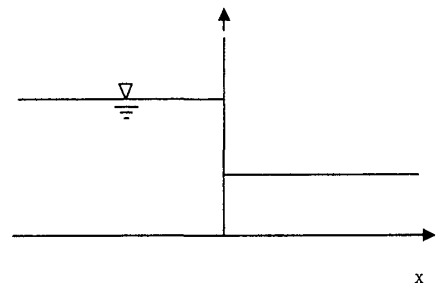


図 B-1 ダム破壊流れの説明図

$$[\text{連続式}] \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{B4})$$

$$[\text{運動量式}] \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (\text{B5})$$

または,

$$[\text{運動量式}] \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{B6})$$

ここに, h :水深, q :単位幅流量.

2. 2 特性曲線法

式(4)と(5)を行列表示すると式(7)となる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} = 0, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & h \\ g & u \end{bmatrix} \quad (\text{B7})$$

行列 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_{\pm}$ および左固有ベクトル $\mu_{\pm}$ は次式となる.

$$\text{固有値 } \lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}, \quad \text{左固有ベクトル } \mu_{\pm} = (1, \pm \sqrt{h/g}) \quad (\text{B8})$$

行列 $\mathbf{A}$ の左固有ベクトル $\mu_{\pm}$ を式(7)の左から乗じると, 特性曲線上の関係式(9)が導かれる.

$$\mu_{\pm} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} + \lambda_{\pm} \mu_{\pm} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial}{\partial t} (u \pm 2\sqrt{gh}) + \lambda_{\pm} \frac{\partial}{\partial x} (u \pm 2\sqrt{gh}) = 0 \quad (\text{B9})$$

式(9)は

$$\text{特性曲線} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh} \quad \text{上で} \quad u \pm 2\sqrt{gh} = \text{一定}$$

を意味しており, 図-2 に示すように時刻 t_2 の位置 R の水理量が時刻 t_1 の位置 P, Q の既知水理量で計算できることを示している.

特性曲線はその上で水理量を与えられたとき, 微係数が一意的に決まらない線, すなわち微係数の不連続が伝播する線としても定義される.

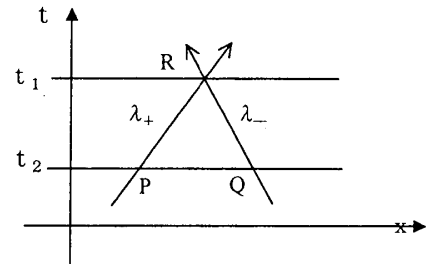


図 B-2 特性曲線法の説明図

2. 3 固定格子点の特性曲線法

特性曲線法を用いて実際に計算を行うには, 固定格子点の水理量を用いる方法が便利である. すなわち, 特性曲線上の関係式(9)が移流方程式の形になっており, 移流方程式の数値解析に用いられる方法を適用することができる.

もっとも簡単な方法は1次精度上流差分を用いることであり, 具体的な差分式を示せば

$$\frac{X_{\pm i}^{n+1} - X_{\pm i}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}(|\lambda_{\pm}| - \lambda_{\pm}) \frac{(X_{\pm i+1}^n - X_{\pm i}^n)}{\Delta x} + \frac{1}{2}(|\lambda_{\pm}| + \lambda_{\pm}) \frac{(X_{\pm i}^n - X_{\pm i-1}^n)}{\Delta x} = 0 \quad (\text{B10-a})$$

または書き換えて

$$\begin{aligned} \frac{X_{\pm i}^{n+1} - X_{\pm i}^n}{\Delta t} + \left[\frac{1}{2}(\lambda_{\pm} X_{\pm i+1}^n + \lambda_{\pm} X_{\pm i}^n) - \frac{1}{2}|\lambda_{\pm}| \frac{(X_{\pm i+1}^n - X_{\pm i}^n)}{\Delta x} \right] \\ - \left[\frac{1}{2}(\lambda_{\pm} X_{\pm i}^n + \lambda_{\pm} X_{\pm i-1}^n) - \frac{1}{2}|\lambda_{\pm}| \frac{(X_{\pm i}^n - X_{\pm i-1}^n)}{\Delta x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B10-b})$$

となる．ここに， n は時間ステップ， i は空間格子点位置を表し， $X_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh}$ である．

式(10)は TVD スキームでなので，段波のような不連続部でも数値振動が生じないことが期待される．また，式(10-b)は二つの $[\]$ がそれぞれ $i+1/2, i-1/2$ の数値流束を表しており，数値流束表示と言われる．

3. 流束差分離法 (FDS)

特性曲線法は基礎式が双曲型のときのみ適用でき，渦動粘性項のような高階微分の項が付加されるとそのままでは使用できない．そこで，固定格子点の特性曲線法の利点を保ちながら，差分式を元の保存則系 (式(4)の後半と式(6)) の差分式に変換する方法が考えられた．その代表として流束差分離法 (Flux Difference Splitting) について簡単に説明する．

基礎式として保存則系表示である式(4)の後半と式(6)を用いる．基礎式は行列表示すると式(11)，さらに展開して式(12)となる．

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - \frac{q^2}{h^2} & \frac{2q}{h} \end{bmatrix} \quad (\text{B12})$$

$\mathbf{A}$ の固有値，左固有ベクトルおよび右固有ベクトルで構成される行列 $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1}$ を次式で定義する．

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{h} + \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & \frac{q}{h} - \sqrt{gh} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [\mathbf{\Lambda}_{r+}, \mathbf{\Lambda}_{r-}] = \frac{1}{2\sqrt{gh}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{q}{h} + \sqrt{gh} & -\frac{q}{h} + \sqrt{gh} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_{/+} \\ \mu_{/-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q}{h} + \sqrt{gh} & 1 \\ -\frac{q}{h} - \sqrt{gh} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B13})$$

式(13)から次の関係が確認できる．

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{B14})$$

式(12)に左から $\mathbf{R}^{-1}$ を乗じ，その離散式を近似的に次式で表す．

$$\frac{(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_i^{n+1} - (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_i^n}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i+1/2}^n - (\mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (\text{B15})$$

式(15)は保存則型の移流方程式の離散式であり， $i+1/2, i-1/2$ での数値流束 $(\mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i+1/2}^n, (\mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i-1/2}^n$ を式(10-b)を参考に次式で表せば，TVD スキームを構成することができる．

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i+1/2}^n &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{\Lambda} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i+1} + \mathbf{\Lambda} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_i - |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i) \right) \\ (\mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i-1/2}^n &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{\Lambda} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_i + \mathbf{\Lambda} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q})_{i-1} - |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

式(15)に左から $\mathbf{R}$ を乗じれば, 保存則型表示の式(11)の離散式が得られる.

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_{i+1/2}^n - \mathbf{E}_{i-1/2}^n) \quad (\text{B17-a})$$

$$\mathbf{E}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{i+1} + \mathbf{E}_i - \mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i)) \quad \mathbf{E}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i-1} - \mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1})) \quad (\text{B17-b})$$

上式中, $\mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1}$ は次式を用いて $i+1/2$, $i-1/2$ で評価される.

$$h_{i+1/2} = \sqrt{h_i \cdot h_{i+1}}, q_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i} q_i + \sqrt{h_{i+1}} q_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad (\text{B18})$$

また, $\mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1}$ の表示は次式となる.

$$\mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{gh}} \begin{bmatrix} -|\lambda_+| \left(\frac{q}{h} - \sqrt{gh} \right) + |\lambda_-| \left(\frac{q}{h} + \sqrt{gh} \right) & |\lambda_+| - |\lambda_-| \\ -|\lambda_+| \left(\frac{q^2}{h^2} - gh \right) + |\lambda_-| \left(\frac{q^2}{h^2} + gh \right) & |\lambda_+| \left(\frac{q}{h} + \sqrt{gh} \right) - |\lambda_-| \left(\frac{q}{h} - \sqrt{gh} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{B19})$$

上記の方法で計算した結果を後述の図-5 に示す.TVD 条件を満たしたスキームになっており, 数値振動は生じていないが, 1 次精度であるため, 不連続部がかなり鈍っている.

4. 有限体積法

洪水氾濫解析法などにおいて, 流量と水深を空間的に互い違いに定義し, 次のようなスキームで計算を進める方法がよく用いられている.

$$\frac{h_{i+1/2}^{n+1} - h_{i+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (\text{B20})$$

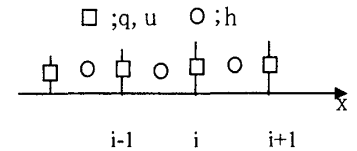


図 B-3 有限体積法での定義位置

$$\frac{\Delta q_i^{n+1} - \Delta q_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1/2}^n q_{i+a}^n - u_{i-1/2}^n q_{i-1+b}^n}{\Delta x} + g \frac{(h_{i+1/2}^n)^2 - (h_{i-1/2}^n)^2}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{B21})$$

$$a = \begin{cases} 0 & \text{for } u_{i+1/2}^n \geq 0 \\ 1 & \text{for } u_{i+1/2}^n < 0 \end{cases}, b = \begin{cases} 0 & \text{for } u_{i-1/2}^n \geq 0 \\ 1 & \text{for } u_{i-1/2}^n < 0 \end{cases}, u_{i+1/2}^n = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2}, u_i^n = \frac{q_i^n}{h_{i-1/2}^n + c}, c = \begin{cases} 0 & \text{for } q_i^n \geq 0 \\ 1 & \text{for } q_i^n < 0 \end{cases}$$

質量, 運動量の保存則をそのまま離散式に変換しており, 直感的にも理解しやすい. しかし, 移流項に数値粘性の大きい 1 次精度の上流差分を用いても, 段波のような現象をこのままのスキームで計算すると, 不連続部で数値振動が生じることが知られており, 何らかの改良が必要とされる. (跳水は数値振動を起こさずに再現されることが知られている.)

式(17)を見て, $\mathbf{Q}$ のうちの q を考えると, 結果的に有限体積法において移流項に中心差分を用い, かつ数値粘性を付加したスキームと同等のスキームになっている. 数値粘性を構成する項の一つである $\mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_i$ を計算してみると近似的に次式が得られる.

$$\mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \frac{|\lambda_+| + |\lambda_-|}{2} h_i \\ \frac{(|\lambda_+| - |\lambda_-|) \sqrt{gh_i}}{2} h_i + \frac{|\lambda_+| + |\lambda_-|}{2} q_i \end{bmatrix} \quad (\text{B22})$$

上式は, FDS の場合, 連続式や運動量式に次のような数値粘性が付加されていることを示している.

$$[\text{連続式}] \quad \frac{|\lambda_+| + |\lambda_-|}{2} \Delta x \frac{h_{i+3/2} - 2h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{\Delta x^2} \quad (\text{B23-a})$$

$$[\text{運動量式}] \quad \frac{|\lambda_+| - |\lambda_-|}{2} \sqrt{gh_i} \Delta x \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{|\lambda_+| + |\lambda_-|}{2} \Delta x \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (\text{B23-b})$$

式(23)のままでは一次精度 FDS の計算結果と同等の精度になるため、式(23)に次式を乗して式(20), (21)に付加し計算した結果を後述の図-6 に示す。

$$\beta \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{|h_{i+1} + 2h_i + h_{i-1}|}, \quad \beta: \text{係数} \quad (\text{B24})$$

5. 高次精度の数値計算法

5.1 MacCormack 法

2 次精度のスキームで比較的プログラミングが容易な手法として予測子・修正子法がある。これは予測子段階で中間的な時刻の値を求めておき、修正子段階で所定の時刻の値を求めることで時間に関する計算精度を高める方法である。代表的なスキームとして MacCormack 法や 2 段階 Lax-Wendroff 法があげられる。ここでは航空工学の分野でよく用いられる MacCormack 法について解説する。

保存形表示の基礎式は一般に次式のように記述できる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (\text{B25})$$

f は u の関数である。

MacCormack 法では予測子段階と修正子段階で非対称な空間差分を用いるところに特徴がある。MacCormack 法による式 (25) の離散化は以下のようになる。

$$\begin{aligned} u_i^p &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n) \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left\{ (u_i^n + u_i^p) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1}^p - f_i^p) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B26})$$

予測子段階で得られる解に添え字 p をつけている。また $f_i^p = f(u_i^p)$ である。MacCormack 法では時間・空間とも 2 次精度スキームである。式 (25) は予測子段階で風上 (後退) 差分, 修正子段階で風下 (前進) 差分を用いているが, 予測子段階で風下差分, 修正子段階で風上差分の形式でも精度上は同等である。しかし打ち切り誤差の形が異なるので数値振動の様子は異なる。

さて式 (25) のままでは段波や跳水などの不連続な場所で数値振動が発生する。そこで数値振動を抑制するため人工粘性項を付加する。スキームの精度の低下を避けるため 3 次オーダーの人工粘性項を加えることが多い。人工粘性項を付加した MacCormack 法は以下のようになる。

$$\begin{aligned} u_i^p &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (f_i^n - f_{i-1}^n) + (q_i^n - q_{i-1}^n) \right\} \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left\{ (u_i^n + u_i^p) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(f_{i+1}^p - f_i^p) + (q_{i+1}^p - q_i^p) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

ここで $q_i^n = \frac{k}{8} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$, $k = 0 \sim 1$ の係数

不連続が著しく強い場合は上述の人工粘性項では不十分なこともあり得る。不連続の強い部分だけスキームが 1 次精度に落ちる Jameson の人工粘性項¹⁾ や TVD MacCormack 法²⁾ などが開発されている。詳しくは参考文献を参照されたい。

5.2 TVD MUSCL 法

Roe の FDS 法による離散化式をもう一度記述する.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) \quad (\text{B28})$$

数値流束 $f_{i+1/2}^n$ は以下のようになる.

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} [f_{i+1}^n + f_i^n - |A|_{i+1/2} (u_{i+1}^n - u_i^n)] \quad (\text{B29})$$

A は流束ヤコビアン行列である.

3. で述べたようにこれは 1 次精度スキームである. MUSCL 法を用いることで高次精度に拡張することができる. MUSCL 法による数値流束は次式で表される.

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} [f \{ (u_R)^n_{i+1/2} \} + f \{ (u_L)^n_{i+1/2} \} - |A|_{i+1/2} \{ (u_R)^n_{i+1/2} - (u_L)^n_{i+1/2} \}] \quad (\text{B30})$$

ここで $(u_L)^n_{i+1/2} = u_i^n + \frac{1}{4} \{ (1-k)\Delta_i^- + (1+k)\Delta_i^+ \}$, $(u_R)^n_{i+1/2} = u_{i+1}^n + \frac{1}{4} \{ (1-k)\Delta_{i+1}^+ + (1+k)\Delta_{i+1}^- \}$,

$$\Delta_i^+ = u_{i+1}^n - u_i^n, \quad \Delta_i^- = u_i^n - u_{i-1}^n, \quad \Delta_{i+1}^+ = u_{i+2}^n - u_{i+1}^n, \quad \Delta_{i+1}^- = u_{i+1}^n - u_i^n$$

$|A|_{i+1/2}$ は式 (18) に示すような Roe の平均で評価する. k の値と差分スキームの対応は以下のようになる.

k	スキーム
-1	2 次上流差分
1/3	3 次上流差分
1/2	QUICK スキーム
1	2 次中心差分

式 (30) は TVD 条件を満足しないがフラックス制限関数を導入することで TVD 化することができる. フラックス制限関数に minmod 関数を使用する場合は Δ^+ , Δ^- をの代わりに,

$$\bar{\Delta}^+ = \min \text{mod}(\Delta^+, b\Delta^-), \quad \bar{\Delta}^- = \min \text{mod}(\Delta^-, b\Delta^+)$$

$$\min \text{mod}(x, y) = x(|x| < |y|, x \times y > 0), y(|x| > |y|, x \times y > 0), 0(x \times y < 0)$$

を用いればよい. ここで b は k の関数で

$$b = \frac{3-k}{1-k}$$

と定義される. 空間に関する差分精度の次数が向上した場合, 時間に関する差分精度の次数も同様に向上させておかないと計算が不安定になる場合がある. 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いれば以下のようになる.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{3}{2} (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) - \frac{1}{2} (f_{i+1/2}^{n-1} - f_{i-1/2}^{n-1}) \right\} \quad (\text{B31})$$

5.3 CIP 法

FDS 法は保存表示された基礎式において, できるだけ物理的に正しい界面数値流束を評価することで風上差分を形成するものである. 計算格子にはレギュラー格子を用いるが, 数値流束を得るために流束ヤコビアン行列を解く必要がある. 一方, 4 章でも述べたように水深と流量を交互に配置するスタッガード格子を用いれば, 流束ヤコビアン行列を解く必要もなく基礎式を比較的容易に離散化できる. こ

では加速度項の離散化に CIP 法を用いた解析法を紹介する。

基礎式は連続の式および運動方程式であるが、CIP 法では新たな未知量として流量の導関数が加わり、その輸送方程式も基礎式として加わる。基礎式を以下に示す。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{B32})$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = -q \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \right) \quad (\text{B33})$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u \frac{\partial q'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -q \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} \right) \right\} \quad (\text{B34})$$

ここで $q' = \partial q / \partial x$ である。式 (34) は式 (33) を x で微分すれば得られるが、式 (33) の左辺第 2 項の流速 u は局所的に一定として微分している。

式 (32) は以下のように離散化される。

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{q_{i+1/2}^n - q_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (\text{B35})$$

CIP 法では加速度項（移流項）とその他の項を分離して計算を進める。具体的に記述すれば以下のようになる。まず移流項以外の項を計算する。

$$\frac{q_{i+1/2}^* - q_{i+1/2}^n}{\Delta t} = -q_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - \frac{g(h^2/2)_{i+1}^n - g(h^2/2)_i^n}{\Delta x} \quad (\text{B36})$$

$$\frac{q_{i+1/2}^* - q_{i+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{(q_{i+5/2}^* - q_{i+5/2}^n) / \Delta t - (q_{i-1/2}^* - q_{i-1/2}^n) / \Delta t}{2\Delta x} \quad (\text{B37})$$

次に CIP 法を用いて q , q' の移流計算を行う。

$$q_{i+1/2}^{n+1} = A_1 q_{i-1/2}^* + A_2 q_{i+1/2}^* + A_3 q_{i-1/2}' + A_4 q_{i+1/2}' \quad (\text{B38})$$

$$q_{i+1/2}'^{n+1} = B_1 q_{i-1/2}^* + B_2 q_{i+1/2}^* + B_3 q_{i-1/2}' + B_4 q_{i+1/2}' \quad (\text{B39})$$

ここで

$$A_1 = \alpha^2(3-2\alpha), \quad A_2 = 1-A_1, \quad A_3 = \alpha^2(1-\alpha)\Delta x, \quad A_4 = -\alpha(1-\alpha)^2\Delta x$$

$$B_1 = 6\alpha(\alpha-1)/\Delta x, \quad B_2 = -B_1, \quad B_3 = \alpha(3\alpha-2), \quad B_4 = (\alpha-1)(3\alpha-1), \quad \alpha = u_{i+1/2}^n \Delta t / \Delta x$$

α はクーラン数である。 α が負の場合はスキームの対称性から $i-1/2 \rightarrow i+3/2$, $\alpha \rightarrow |\alpha|$ と置き換えれば良い。

CIP 法は TVD スキームではないのでダム破壊流れ問題では不連続部分で数値振動が発生する。実際に計算を行うときには人工粘性項を付加する。

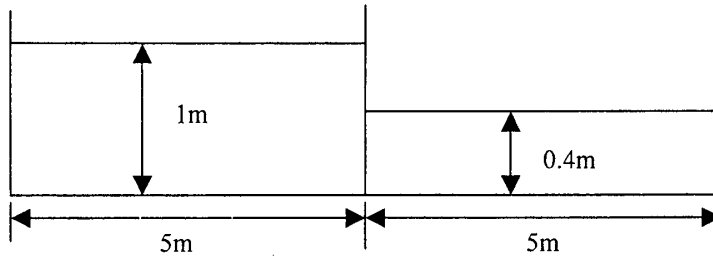
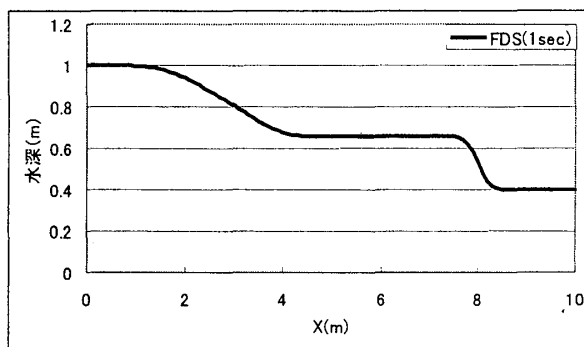


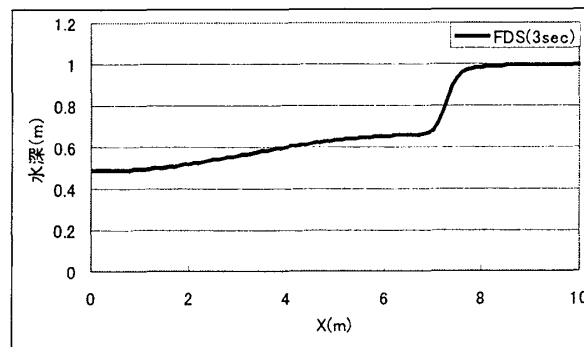
図 B-4 ダム破壊流れ（初期状態）

6. 計算例

2次元水槽のダム破壊流れの計算例を示す。図-4に示すような長さ10mの水槽がある。中央部に隔壁を設けており、隔壁より左側の水深は1m、右側は0.4mである。隔壁を瞬間的に引き上げてダム破壊流れを発生させる。計算格子間隔は $\Delta t=0.01\text{sec}$ 、 $\Delta x=0.1\text{m}$ である。1秒後と3秒後の結果を図-6～8に示す。

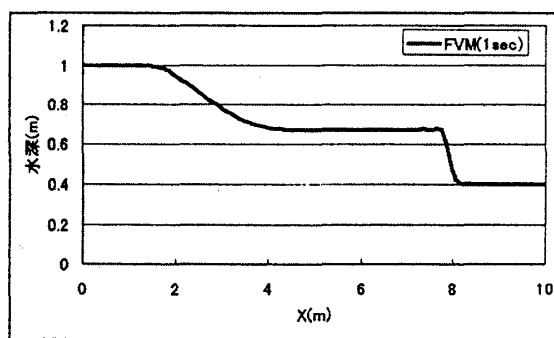


(a) FDS 1秒後

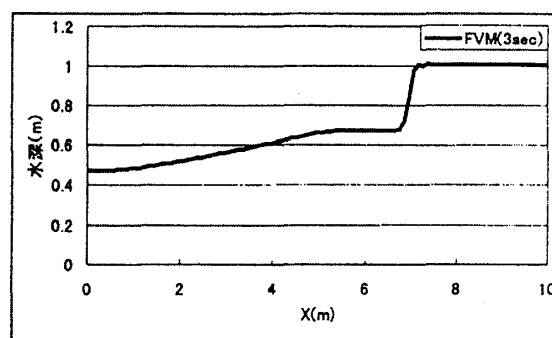


(b) FDS 3秒後

図 B-5 ダム破壊流れ計算結果

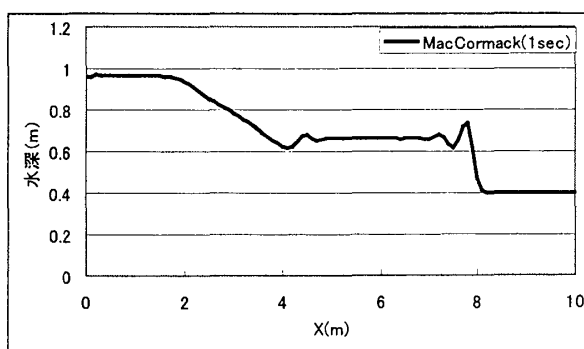


(a) FVM 1秒後

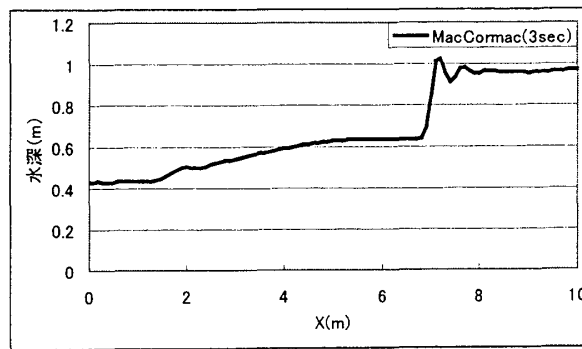


(b) FVM 3秒後

図 B-6 ダム破壊流れ計算結果

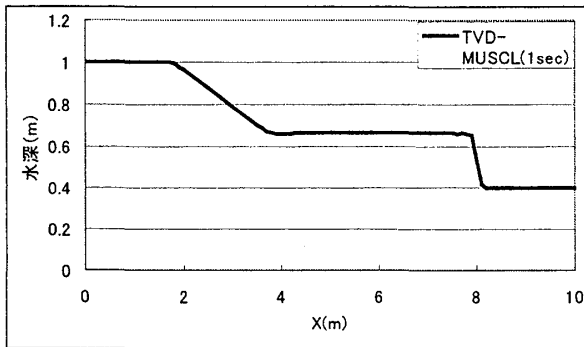


(a) MacCormack 1秒後

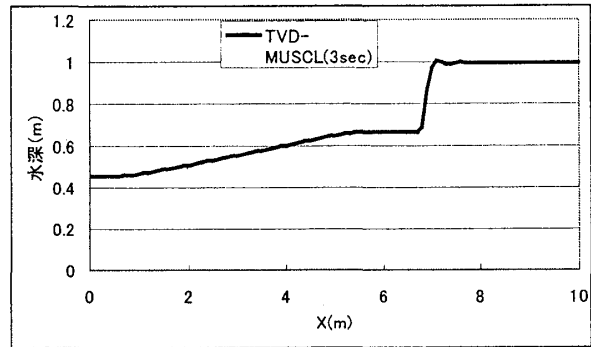


(b) MacCormack 3秒後

図 B-7 ダム破壊流れ計算結果

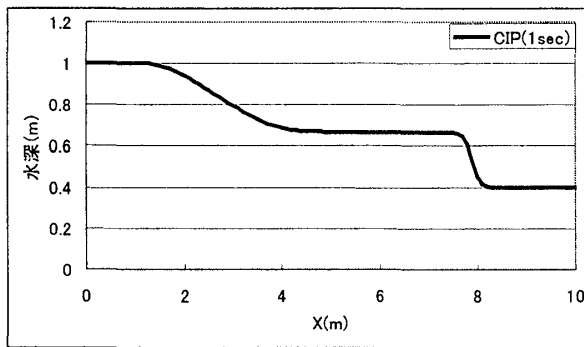


(a) TVD-MUSCL 1 秒後

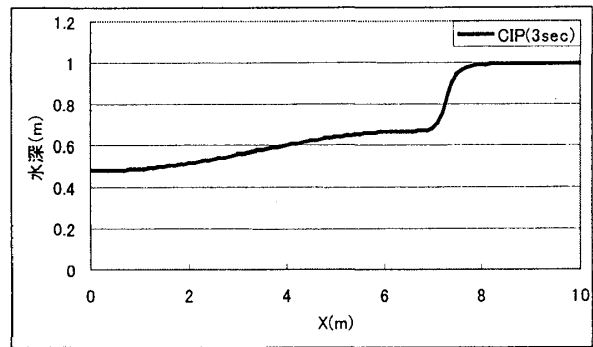


(b) TVD-MUSCL 3 秒後

図 B-8 ダム破壊流れ計算結果



(a) CIP 1 秒後



(b) CIP 3 秒後

図 B-9 ダム破壊流れ計算結果

引用文献

細田 尚・朝位孝二：ダム破壊流れの1次元解析，水工学における計算機利用の講習会講義集（土木学会水理委員会基礎水理部会），pp.23-31, 1998.

Appendix C 洪水流の理論

洪水流の理論について簡単にまとめる。ここでの内容は、洪水流や開水路非定常流の基本的特性を調べるために行われてきた理想的条件のもとでの解析結果を示したもので、実河川の解析には本文中に示した一般断面の基礎式が用いられる。

1. 基礎式の無次元化と無次元パラメータ

簡単のため広長方形断面を考えると、開水路非定常流を記述する基礎式は次のようになる (図 C-1 参照)。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial uq}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh(i_0 - i_f) \quad (\text{C.2})$$

ここに、 t : 時間, x : 空間座標, h : 水深, q : 単位幅流量, u : 平均流速 ($\equiv q/h$), i_0 : 路床勾配 ($\equiv \sin \theta$), i_f : 底面せん断応力項で、通常マンニングの粗度係数を用いて $i_f = n^2 q^2 / h^{10/3}$ と評価される。

図 C-2 に示すように、基準点 $x=0$ において基底流 ($h=h_0, u=u_0$) に図に示されるような擾乱が与えられたとしよう。擾乱の時間スケール T_0 , 空間スケール L , 基底流の水深 h_0 , および平均流速 u_0 を用いて次のような無次元量を導入する。

$$t' = \frac{t}{T_0}, x' = \frac{x}{L}, h' = \frac{h}{h_0}, q' = \frac{q}{h_0 u_0} \quad (\text{C.3})$$

空間スケールを $L \equiv T_0 u_0$ とおいて、無次元量を用いて基礎式を無次元化すれば次のようになる。

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial q'}{\partial x'} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\lambda Fr_0^2 \left(\frac{\partial q'}{\partial t'} + 2 \frac{q'}{h'} \frac{\partial q'}{\partial x'} - \frac{q'^2}{h'^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} + \frac{h'}{Fr_0^2} \frac{\partial h'}{\partial x'} \right) = h' \left(1 - \frac{q'^2}{h'^{10/3}} \right) \quad (\text{C.5})$$

ここに、 λ , Fr_0 (フルード(Froude)数) は次式で定義される無次元パラメータである。

$$\lambda = \frac{h_0}{Li_0}, Fr_0 = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (\text{C.6})$$

λ は林が導いたパラメータであって、 $\lambda \ll 1$ で式()の左辺を無視した基礎式で記述できる波を kinematic wave, 逆に $\lambda \gg 1$ で式(C.5)の右辺を無視した基礎式で記述できる波を dynamic wave と呼ぶ。

2. 洪水波形の構成

図 C-2 に示したような洪水波形の伝播を考え、時間スケールとして図に示した T_0 を用いたとき $\lambda \ll 1$ の条件が満たされているとしよう。その場合でも、波形の立ち上がりは基底流の上を dynamic wave の波速 ($dx/dt = v_0 + \sqrt{gh_0}$) で伝播する。すなわち、洪水流のピーク付近の流れが kinematic wave として取り扱う場合でも、波先付近では dynamic wave として取り扱う必要があることがわかる。

このことから、洪水波の波形は、波先付近とピーク付近を別々に考え、その後に両者を接続することによって構成される (図 C-3 参照)。そこでまず、Lighthill・Whitham の理論によって得られる波先付近の波形と摂動法によるピーク付近の波形の解析法について述べ、その後に両者の接続と考えられる速水の理論について説明しよう。

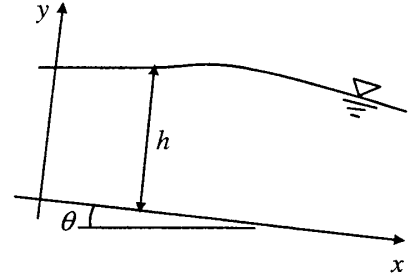


図 C-1 座標系

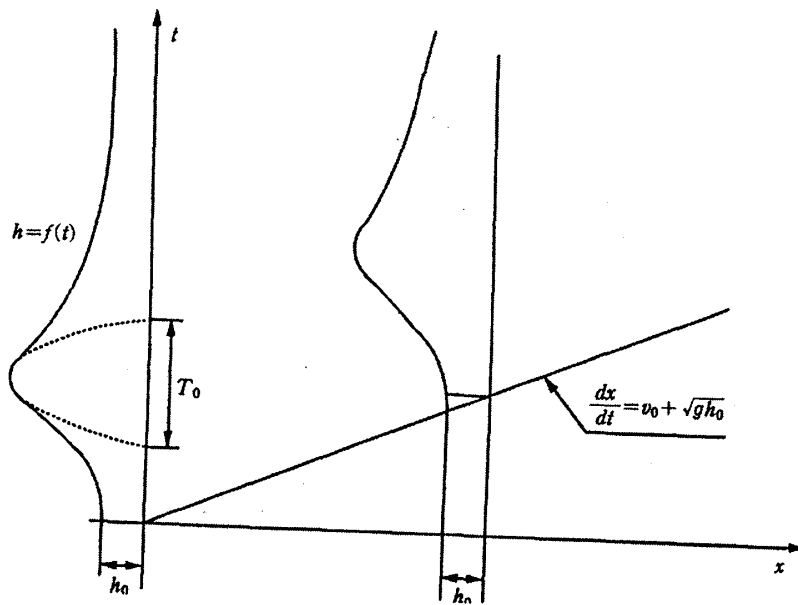


図 C-2 洪水伝播の説明図

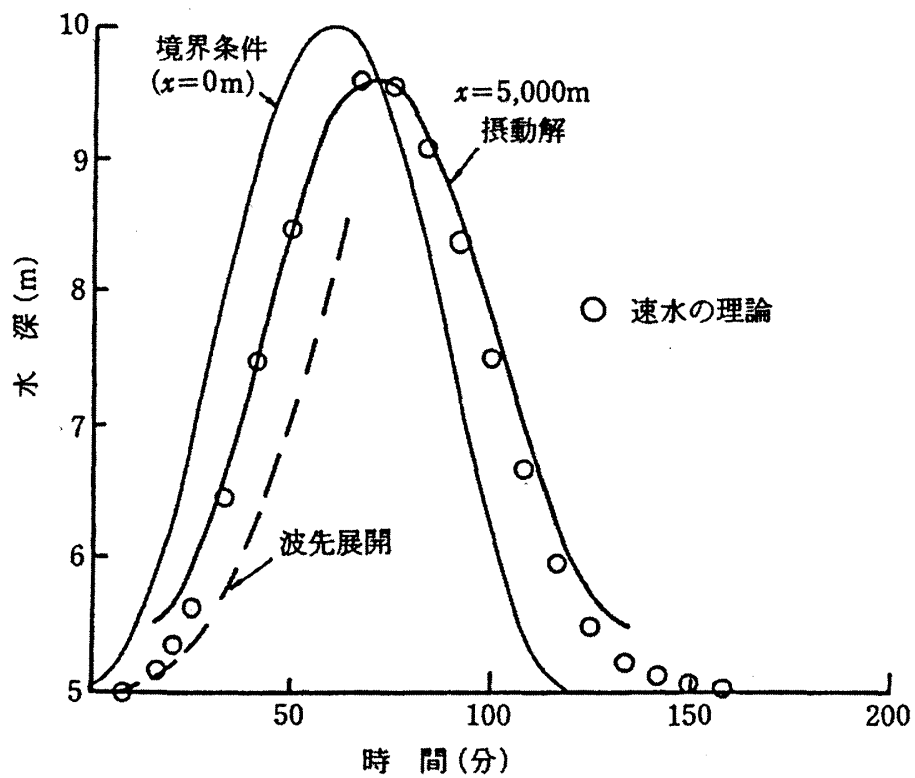


図 C-3 洪水波形の構成

3. 波先近傍の波形—Lighthill・Whitham の理論

波先は基底流の上を dynamic wave の波速 ($dx/dt = v_0 + \sqrt{gh_0}$) で伝播することから、波先と伴に移動する座標系から波形を観察することが考えられる。すなわち次のような座標変換を行う。

$$(x, t) \text{ 系} \rightarrow (\tau, t) \text{ 系}, \quad \tau = t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \quad (\text{C.7})$$

(τ, t) 系で基礎式(C.1), (C.2)は次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{v}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{v}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{v}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{v}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \frac{\partial h}{\partial \tau} = gh(i_0 - i_f) \quad (\text{C.9})$$

波先付近の波形を次のように展開する。

$$h = h_0 + \tau h_1(t) + \tau^2 h_2(t) \dots$$

$$v = v_0 + \tau v_1(t) + \tau^2 v_2(t) \dots, \quad (\tau \geq 0) \quad (\text{C.10})$$

これは、波の先端を中心とした波形のテイラー展開であって、式(C.10)を式(C.8),(C.9)に代入することによって、係数 h_1, h_2, v_1, v_2 が求められる。

得られた結果をまとめれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau^0: h_1 - \frac{v_0 h_1}{v_0 + \sqrt{gh_0}} - \frac{v_1 h_0}{v_0 + \sqrt{gh_0}} &= 0 \\ \frac{v_1}{g} - \frac{v_0 v_1}{g(v_0 + \sqrt{gh_0})} - \frac{h_1}{v_0 + \sqrt{gh_0}} &= 0 \\ \tau^1: \frac{dh_1}{dt} + 2h_2 - \frac{2v_0 h_2 + h_1 v_1}{v_0 + \sqrt{gh_0}} - \frac{2h_0 v_0 + v_1 h_1}{v_0 + \sqrt{gh_0}} &= 0 \\ \frac{1}{g} \frac{dv_1}{dt} + \frac{2v_2}{g} - \frac{2v_0 v_2 + v_1^2}{g(v_0 + \sqrt{gh_0})} - \frac{2h_2}{v_0 + \sqrt{gh_0}} &= -\frac{2i_0 v_1}{v_0} + \frac{4}{3} \frac{i_0 h_1}{h_0} \\ \tau^2: \frac{dh_2}{dt} + 3h_3 - \frac{3v_0 h_3 + 2h_1 v_1 + h_1 v_2}{v_0 + \sqrt{gh_0}} - \frac{3h_0 v_3 + 2h_1 v_2 + v_1 h_2}{v_0 + \sqrt{gh_0}} &= 0 \\ \frac{1}{g} \frac{dv_2}{dt} + \frac{3v_3}{g} - \frac{3v_1 v_2 + 3v_0 v_3}{g(v_0 + \sqrt{gh_0})} - \frac{3h_3}{v_0 + \sqrt{gh_0}} &= i_0 \left(-\frac{v_1^2 + 2v_0 v_2}{v_0^2} + \frac{8}{3} \frac{v_1 h_1}{v_0 h_0} + \frac{4}{3} \frac{h_2}{h_0} - \frac{14}{9} \frac{h_1^2}{h_0^2} \right) \end{aligned}$$

τ^0 および τ^1 に関する摂動方程式を整理すると次式が得られる。

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{h_0}} h_1 \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{3h_1^2}{2h_0(1+Fr_0)} - \lambda \left(1 - \frac{2}{3} Fr_0 \right) h_1, \quad \lambda \equiv \frac{gi_0}{v_0} \quad (\text{C.12})$$

式(C.12)を $t=0$ で $h_1 = h_1(0)$ のもとで解けば次式が得られる。

$$h_1(t) = \frac{K}{1 - (1 - K/h_1(0)) \exp(bt)} \quad (\text{C.13})$$

ここに、 b および K は次式で定義される。

$$b = \lambda \left(1 - \frac{2}{3} Fr_0 \right), \quad K = \frac{2}{3} b h_0 (1 + Fr_0) \quad (\text{C.14})$$

式(C.13)から $t > 0$ のとき $h_1(t)$ が無限大に近づく条件 (段波の生成条件) が次のように導かれる。

$$h_1(0) > K \quad \text{または} \quad Fr_0 > \frac{3}{2} \quad (\text{ただし, } h_1(0) > 0) \quad (\text{C.15})$$

さらに, $h_1(0)=0$ のときに式(C.12)から $h_1(t)=0$, $v_1(t)=0$ になり, この場合には τ^2 に関する摂動方程式から, 次式が導かれる.

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \lambda \left(\frac{2}{3} Fr_0 - 1 \right) h_2 \quad (\text{ただし, } h_1(0)=0 \text{ の場合}) \quad (\text{C.16})$$

$$h_2(t) = h_2(0) \exp(-bt) \quad (\text{C.17})$$

これまで Lighthill・Whitham に従って (τ, t) 系を用いたが, ある地点での波形の時間変化を求めるために, (x, τ) 系の下で次の摂動展開を用いて上記の結果を書き換える.

$$h = h_0 + \tau h_1(x) + \tau^2 h_2(x) \cdots$$

$$v = v_0 + \tau v_1(x) + \tau^2 v_2(x) \cdots, \quad (\tau \geq 0)$$

このとき, $h_1(x)$, $h_2(x)$ は式(C.13)および式(C.17)右辺の t を $x/(v_0 + \sqrt{gh_0})$ に書き換えたものになる.

$$h_1(x) = \frac{K}{1 - (1 - K/h_1(0)) \exp \frac{bx}{v_0 + \sqrt{gh_0}}} \quad (\text{C.18})$$

$$h_2(x) = h_2(0) \exp \left(- \frac{bx}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right), \quad (\text{ただし, } h_1(0)=0 \text{ の場合}) \quad (\text{C.19})$$

このように, 式(C.18) (あるいは $h_1(0)=0$ の場合は式(C.19)) を用いて波先付近の波形を求めることができる.

4. 洪水流のピーク近傍の波形

洪水流のピーク付近で $\lambda \ll 1$ の条件が満たされているとしよう. さらに, 通常洪水流は $Fr_0^2 \approx 0.1$ 程度であるから, 式(C.5)に現れる微小なパラメータ

$$\sigma = \lambda \cdot Fr_0^2 \quad (\text{C.20})$$

を用いて摂動法あるいは逐次近似法により h' および q' の近似解を求めることが考えられる. ここでは摂動法を適用した例を示そう.

h' および q' を次のように表す.

$$h' = h_1' + \sigma h_2' + \cdots$$

$$q' = q_1' + \sigma q_2' + \cdots \quad (\text{C.21})$$

以後, 簡単のため無次元量を表す ' を省略する.

式(C.21)を式(C.4), (C.5)に代入し, σ^0 と σ^1 に関して整理すると次のようになる.

$$\sigma^0: \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$h_1 - \frac{q_1^2}{h_1^{7/3}} = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$\sigma^1: \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + 2 \frac{q_1}{h_1^2} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{Fr_0^2} - \frac{q_1^2}{h_1^2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{10}{3} \frac{h_2}{h_1} - 2 \frac{q_2}{q_1} \quad (\text{C.25})$$

式(C.22), (C.23)は

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0, \quad \omega_1 = \frac{5}{3} h_1^{2/3} \quad (C.26)$$

と書き換えられる。これは、

$$\frac{dx}{dt} = \omega_1 \quad \text{上で} \quad h_1 = \text{const.} \quad (C.27)$$

あるいは、 $x=0$ における波形 $h_1(0, t) = f(t)$ を用いて、

$$h_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{\omega_1}\right) \quad (C.28)$$

と表すことができる。次に、 h_2, q_2 を求めるために式(C.22), (C.23)を用いて式(C.24), (C.25)を書き換えれば、 h_2 に関して次式が導かれる。

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = \omega_1 \left\{ -\frac{2}{3} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + G_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + G_2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \right\} \quad (C.29)$$

ここに、 G_1 および G_2 は次式で定義される。

$$G_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Fr_0^2} - \frac{24}{125} \frac{\omega_1^2}{h_1} \right), \quad G_2 = \frac{3}{10} \omega_1 h_1 \left(\frac{1}{Fr_0^2} - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{h_1} \right) \quad (C.30)$$

式(C.29)は、特性曲線上の関係式

$$\frac{dx}{dt} = \omega_1 \quad \text{上で} \quad \frac{dh_2}{dt} = \omega_1 \left\{ -\frac{2}{3} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + G_1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + G_2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \right\} \quad (C.31)$$

と等価であつて、特性曲線上で $\partial h_1 / \partial x, \partial^2 h_1 / \partial x^2$ は次式となる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{3f\dot{f}}{2\dot{f}x - 3f\omega_1}, \quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = \frac{3f}{(2\dot{f}x - 3f\omega_1)^2} \left\{ 2(\dot{f}x + 6f\omega_1)\dot{f}^2 - 9\omega_1 f^2 \ddot{f} \right\} \quad (C.32)$$

ここに、 $\dot{f} \equiv df/dt$ である。

$t=0$ で $h_2(0)=0$ のもとで式(C.31)の解を求めれば次式となる。

$$h = h_1 + \sigma h_2 = f \left[1 + \sigma \frac{9f}{10(2\dot{f}x - 3f\omega_1)} \left\{ \dot{f} \left(\frac{3}{Fr_0^2} - \frac{14}{25} \frac{\omega_1^2}{f} \right) \log \left(1 - \frac{2\dot{f}x}{3\omega_1 f} \right) - \left(\frac{1}{Fr_0^2} - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{f} \right) \left(\frac{5f^2 - 3f\ddot{f}}{2\dot{f}x - 3f\omega_1} \right) x \right\} \right] \quad (C.33)$$

上式で $\dot{f}=0$ とおけば、ピークの減衰特性を表す式(C.34)が得られる。

$$h_p(x) = f_p \left\{ 1 - \sigma \frac{27}{250} \frac{\ddot{f}_p}{f_p} x \left(\frac{1}{Fr_0^2 f_p^{1/3}} - \frac{4}{9} \right) \right\} \quad (C.34)$$

5. ピークから波先に向かう波形（速見の理論）

基礎式の無次元表示式(C.5)において、 Fr_0^2 は依然として 0.1 程度であるが、 λ が 1 のオーダーに近くなってきた場合を考えよう。このとき、式(C.5)左辺第 4 項（水面勾配項）は右辺と同等の大きさをもつと考えられる。速見は、洪水流の解析において水面勾配項を考慮する必要性を指摘し、次式を洪水流の基礎式と考えた（次元量で表示する）。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (C.35)$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i_0 - i_f) \quad \text{または} \quad q = \frac{1}{n} i_0^{1/2} h^{5/3} \left(1 - \frac{1}{i_0} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \quad (\text{C.36})$$

これは、 Fr_0^2 を摂動のパラメータとしたときの 1 次近似解の従う方程式に他ならない。式(C.36)を連続式に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \omega \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{q}{2 \left(i_0 - \frac{\partial h}{\partial x} \right)} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \omega = \frac{5}{3} \frac{q}{h} \quad (\text{C.37})$$

さらに $(i_0 - \partial h / \partial x)^{1/2}$ などをテイラー展開して上式を書き換えれば次の非線形拡散方程式が得られる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5}{3} \frac{h^{2/3}}{n} \left(i_0^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{h^{5/3}}{n} \left(\frac{1}{i_0^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\text{C.38})$$

この解を求めるために、速水は水深 h を基準となる水深のスケール（ここでは基底流の水深 h_0 を用いる。）の逆数を用いて次のように表示した。

$$h = h_0 \left(1 + \frac{\phi_1}{h_0} + \frac{\phi_2}{h_0^2} + \dots \right) \quad (\text{C.39})$$

これを式(C.38)に代入し、 $(1/h_0)$ 、 $(1/h_0)^2$ についてまとめれば次のようになる。

$$(1/h_0)^1: \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{5v_0}{3} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{v_0 h_0}{2i_0} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad (\text{C.40})$$

$$(1/h_0)^2: \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{5v_0}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{v_0 h_0}{2i_0} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \Gamma(x, t) \quad (\text{C.41})$$

$$\Gamma(x, t) = -\frac{10}{9} v_0 h_0 \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{5}{6} \frac{v_0 h_0}{i_0^{1/2}} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{v_0 h_0^2}{i_0^{1/2}} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{5}{6} \frac{v_0 h_0}{i_0} \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}$$

ϕ_1 および ϕ_2 に関する初期条件、境界条件

$$x=0, t \geq 0; \phi_1(0, t) = f(t) - h_0 = F(t)$$

$$\phi_2(0, t) = 0$$

$$x \geq 0, t=0; \phi_1(0, t) = 0, \phi_2(x, 0) = 0 \quad (\text{C.42})$$

のもとで式(C.40)、(C.41)を解けば、次のように ϕ_1 と ϕ_2 の解が導かれる。

$$\phi_1(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{F(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \omega_0(t-\tau))^2}{4D(t-\tau)} \right\} d\tau \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x, t) = & \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{\omega_0^2(t-\tau)^2 + (x-\xi)^2}{4D(t-\tau)} \right\} \exp \frac{\omega_0(x-\xi)}{2D} \Gamma(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & - \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{\omega_0^2(t-\tau)^2 + (x+\xi)^2}{4D(t-\tau)} \right\} \exp \frac{\omega_0(x-\xi)}{2D} \Gamma(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

ここに、 D, ω_0 は次式で定義される。

$$D = \frac{1}{2} \frac{v_0 h_0}{i_0}, \quad \omega_0 = \frac{5}{3} v_0$$

ここまで述べてきた解析法を用いて構成される洪水波形を示せば図 C.3 のようになる。ただし、速

水の理論は式(C.36)を数値解析したものであり、摂動解と波先展開による波形を内挿した形になっている。

参考文献

林 泰造：Mathematical theory and experiment of flood waves, 土木学会論文集, 18, pp.13-26, 1953.

室田 明, 岩田好一郎：段波の変形に関する研究, 土木学会論文集, 160, pp.49-58, 1968.

Lighthill, M.J. and Whitham, G.B.: On the kinematic waves, Part I, Proc. Roy. Soc. London, A, pp.281-316, 1955.

高橋 保：一様水路の不定流, 京都大学防災研究所年報, B-12, pp.515-527, 1969.

岩佐義朗, 井上和也：洪水流の数値シミュレーションに関する一考察, 第18回水理講演会論文集, 土木学会水理委員会, pp.109-114, 1974.

速水頌一郎：On the propagation of flood waves, Bulletin of Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., No.1, 1951.

Appendix D ブシネスク方程式原型の誘導

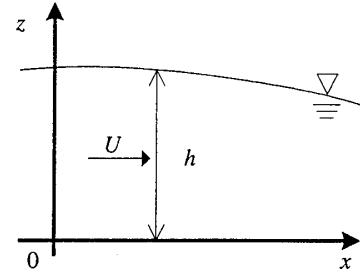
静水圧分布を仮定せず、鉛直方向の加速度を考慮した水深積分モデルを一般にブシネスク方程式と呼ぶ。水面波の分散関係を精度よく再現するために様々の改良モデルが提案されてきたが、ここでは最も単純な主流の流速分布が一様な場合のブシネスク方程式の誘導過程を示す。

まず主流流速の一様性を仮定する。

$$u(x, z) = U(x) \quad (D1)$$

これを連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (D2)$$



に代入し、0 から z まで積分すれば、鉛直流速の表示が得られる。

$$w = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (D3)$$

式(3)を鉛直方向の運動方程式に代入し、 z から h まで積分することで圧力分布を求めれば次式になる。

$$p = g(h - z) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left\{ -U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + h \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right\} \quad (D4)$$

式(4)を運動量方程式

$$\frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial hUU}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h p \, dz = 0 \quad (D5)$$

に代入すれば、ブシネスク方程式原型が導かれる。

上式中圧力の積分は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h p \, dz = & \frac{1}{2} gh^2 + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \\ & + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{3} hU^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{3} hU \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (D6)$$

式(5)と式(6)の線形分散関係は、当然ながらポテンシャル理論から導かれる微小振幅波の線形分散関係と適合せず、ブシネスク方程式の水の波への適用性を向上させるために多くの研究が行われてきた。下記の参考文献 1)～3)などを参照されたい。

参考文献

Madsen, P.A., Murry, R. and Sorensen, O.R. : A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, Vol.15, pp.374-388, 1991.

Nwogu, O. : Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Water, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, ASCE, Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.

音田慎一郎, 細田 尚, 木村一郎 : 鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルの改良とその検証について, 土木学会論文集, 2004.5 (印刷中)。

Appendix E 平面 2 次元水深積分モデル（運動量方程式）の誘導

3 次元の運動方程式は次式で表される。

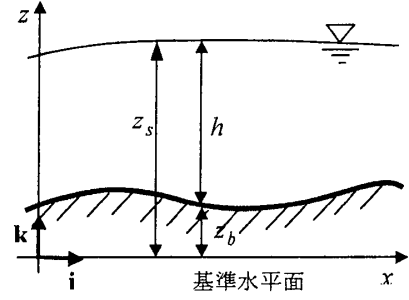
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

静水圧を仮定して水深積分（自由表面、路床の境界条件を考慮）。

Libniz 公式を用いる。

[慣性項]

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial u}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz - u_s \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial t} \\ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial uu}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} uu dz - u_s u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + u_b u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial vu}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} vud dz - u_s v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + u_b v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial wu}{\partial z} dz &= u_s v_s - u_b v_b \end{aligned}$$



境界条件

$$w_s = \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad w_b = \frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y}$$

を考慮すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} uu dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} vud dz \\ &= \frac{\partial U h}{\partial t} + \frac{\partial U U h}{\partial x} + \frac{\partial V U h}{\partial y} \end{aligned}$$

[圧力項]

自由表面の圧力を 0 とする（ゲージ圧）。高潮の解析などでは大気圧の変化を考慮する必要がある。

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{p}{\rho} \right) dz - \left(\frac{p}{\rho} \right)_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} g(z_s - z) dz + g(z_s - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} = g(z_s - z_b) \frac{\partial z_s}{\partial x} = gh \frac{\partial z_s}{\partial x} \end{aligned}$$

[応力項]

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{xx}}{\rho} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\tau_{xx}}{\rho} \right) dz - \left(\frac{\tau_{xx}}{\rho} \right)_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \left(\frac{\tau_{xx}}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} \right) dz - \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} \right)_s \frac{\partial z_s}{\partial y} + \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\ \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right) dz &= \left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right)_s - \left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right)_b \end{aligned}$$

コーシーの公式（応力テンソル $\mathbf{T}$ と応力ベクトル $\boldsymbol{\tau}_n$ の関係）

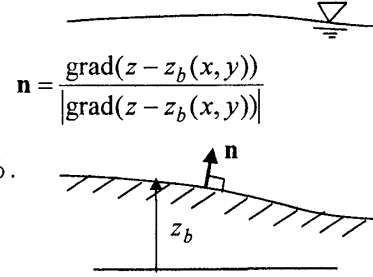
$$\tau_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

を用いる。ここに $\mathbf{n}$: 曲面にたてた単位法線ベクトル

$$\mathbf{T} \text{ の行列表示 } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

路床にたてた単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の表示は次式で表される。

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial z_b}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z_b}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y}\right)^2}}$$



よって、路床に作用する応力ベクトルの x 方向成分は

$$\tau_{bx} = \frac{-\tau_{xxb} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xyb} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{xxb}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y}\right)^2}}$$

通常

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y}\right)^2} \approx 1$$

と近似されることが多い。

風によって生じる流れを考慮しないときは、水表面に作用する応力ベクトルを 0 とする。

上記をまとめて運動量方程式ベクトルの x 方向成分を記述すれば下記のようなになる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + \frac{\partial VM}{\partial y} + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\bar{\tau}_{xx}}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\rho} \right) - \frac{\tau_{bx}}{\rho}$$

ここに、 $M \equiv Uh$ 。

Appendix F 開水路流れ混合層の線形せん断不安定解析

1. 基礎式

簡単のため応力項や底面せん断応力項を無視すると，平面2次元流れの基礎式は次のようになる．

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (F1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial uM}{\partial x} + \frac{\partial vM}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (F2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial uN}{\partial x} + \frac{\partial vN}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (F3)$$

2. 線形化方程式

図-1 に示した hyperbolic-tangent 型の主流流速分布を仮定して線形安定解析を行う．水深や流速を，主流とそれからのずれとして表す．

$$h = h_0 + h', u = U_0(y) + u', v = v' \quad (F4)$$

上式を基礎式に代入し線形化すると式(5)～式(7)となる．

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + U_0(y) \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (F5)$$

$$h_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + h_0 U_0(y) \frac{\partial u'}{\partial x} + h_0 \frac{dU_0(y)}{dy} v' + gh_0 \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (F6)$$

$$h_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + h_0 U_0(y) \frac{\partial v'}{\partial x} + gh_0 \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \quad (F7)$$

式(5)～式(7)から u' と v' を消去すると水深変動に関する線形化方程式(8)となる．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 h'}{\partial t^3} + 3U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t^2 \partial x} + (3U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial x^2} - gh_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial y^2} + U_0 (U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} - gh_0 U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial x \partial y^2} \\ & + 2gh_0 \frac{dU_0}{dy} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (F8)$$

3. 線形安定解析

$$\tilde{x} = \frac{x}{h_0}, \tilde{y} = \frac{y}{l}, \tilde{t} = \frac{tU_\infty}{h_0}, \tilde{h}' = \frac{h'}{h_0}, \tilde{U}_0 = \frac{U_0}{U_\infty}, Fr_0 \equiv \frac{U_\infty}{\sqrt{gh_0}} \quad (F9)$$

(l : 主流流速分布の長さのスケール)

ここに， $\sim$ は無次元量を表す．

$$\tilde{h}' = \varepsilon \phi(\tilde{y}) \exp[i(\tilde{k}\tilde{x} - \tilde{\beta}\tilde{t})] \quad (F10)$$

上式中の ε は擾乱の大きさを表す定数． $\tilde{k}$ ， $\tilde{\beta}$ は次式で定義される無次元変量．

$$\tilde{k} = kh_0, \tilde{\beta} = \frac{\beta h_0}{U_\infty} \quad (F11)$$

以後、～ を省略する。

空間に関する安定解析では、 k を $k = k_r + ik_i$ と実部と虚部に分解し、擾乱を次のように置く。

$$h' = \varepsilon \exp(-k_r x) \phi(y) \exp[i(k_r x - \beta t)] \quad (\text{F12})$$

Michalke¹ は、噴流のような空間的に流れが発達する場では、時間に関する安定解析より空間に関する安定解析の方が実験結果に適合することをレーリー方程式の場合について示している。

式(12)を式(8)の無次元形に代入すれば、 ϕ に関する関係式としてレーリー方程式に対応する次式が導かれる。

$$(kU_0 - \beta) \frac{d^2 \phi}{dy^2} - 2k \frac{dU_0}{dy} \frac{d\phi}{dy} + \left(\frac{l}{h_0} \right)^2 (kU_0 - \beta) \{ Fr_0^2 (kU_0 - \beta)^2 - k^2 \} \phi = 0 \quad (\text{F13})$$

図-1 に示した hyperbolic-tangent 型の流速分布

$$U_0 = (1 + \tanh y) / 2 \quad (\text{F14})$$

を仮定する。

問題は

[境界条件 $y \rightarrow \pm\infty$ のとき $\phi \rightarrow 0$ のもとで有意な解 ϕ が存在するための β と k の関係を求めること。] と書き表される。まず、 $y \rightarrow \pm\infty$ のときの ϕ の漸近形を求める。

$y \rightarrow -\infty$ のとき $U_0 \rightarrow 0, dU_0/dy \rightarrow 0$ であり、これを式(13)に代入し、実部、虚部に分ければ次式となる。

$$\frac{d^2 \phi_r}{dy^2} + C \phi_r + D \phi_i = 0 \quad (\text{F15a})$$

$$\frac{d^2 \phi_i}{dy^2} - D \phi_r + C \phi_i = 0 \quad (\text{F15b})$$

ここに、 C および D は各々次式となる。

$$C = \zeta^2 [Fr_0^2 \beta^2 - k_r^2 + k_i^2], \quad D = -\zeta^2 [-2k_r k_i] \quad (\text{F16})$$

ただし、 $\zeta = l/h_0$ とおいた。式(15a,b)を次のように書き換える。

$$\frac{d^4 \phi_r}{dy^4} + 2C \frac{d^2 \phi_r}{dy^2} + (C^2 + D^2) \phi_r = 0 \quad (\text{F17a})$$

$$\frac{d^4 \phi_i}{dy^4} + 2C \frac{d^2 \phi_i}{dy^2} + (C^2 + D^2) \phi_i = 0 \quad (\text{F17b})$$

上式の解を $\exp(\delta y)$ とおいて δ を求めれば次のようになる。

$$\delta_{\pm}^2 = -C \pm Di = \sqrt{C^2 + D^2} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \quad (\tan 2\theta = -D/C) \quad (\text{F18})$$

ここで、

$$C \geq 0 \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} \right) \text{ のとき,}$$

$$\delta_{\pm} = -(C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r\pm} + i \delta_{i\pm} \quad (\text{F19a})$$

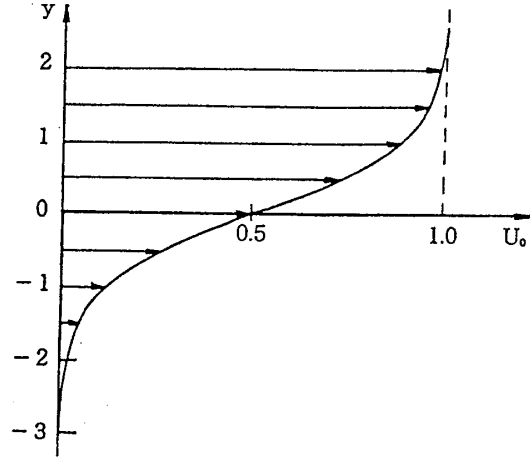


図 F-1 hyperbolic tangent 型流速分布

$C < 0 \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \right)$ のとき,

$$\delta_- = -(C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r-} + i \delta_{i-} \quad (\text{F19b})$$

$y \rightarrow +\infty$ の場合も $U_0 \rightarrow 1, dU_0/dy \rightarrow 0$ より式(15a,b)において

$$C = \zeta^2 [Fr_0^2 \{ (k_r - \beta)^2 - k_i^2 \} - k_r^2 + k_i^2], \quad D = -2\zeta^2 [Fr_0^2 (k_r - \beta)k_i - k_r k_i] \quad (\text{F20})$$

ここで,

$C \geq 0 \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right)$ のとき,

$$\delta_+ = (C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r+} + i \delta_{i+} \quad (\text{F21a})$$

$C < 0 \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < 0 \right)$ のとき,

$$\delta_+ = -(C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r+} + i \delta_{i+} \quad (\text{F21b})$$

式(19), (21)は後に k_r, k_i の同定を行うとき, ϕ の境界条件として用いられる.

次に, Michalke に従い次の変数変換を行う.

$$\phi \propto \exp\left(\int \Phi dy\right), \quad z = \tanh y \quad (\text{F22})$$

変換後の式(13)を実部と虚部に分けて次に示す.

$$\frac{d\Phi_r}{dz} = \frac{\zeta^2 [k_r^2 - k_i^2 - Fr_0^2 (a^2 - b^2)] - \Phi_r^2 + \Phi_i^2}{1 - z^2} + \frac{a(k_r \Phi_r - k_i \Phi_i) + b(k_i \Phi_r + k_r \Phi_i)}{a^2 + b^2} \quad (\text{F23a})$$

$$\frac{d\Phi_i}{dz} = \frac{2[\zeta^2(k_r k_i - Fr_0^2 ab) - \Phi_r \Phi_i]}{1 - z^2} + \frac{a(k_i \Phi_r + k_r \Phi_i) - b(k_r \Phi_r - k_i \Phi_i)}{a^2 + b^2} \quad (F23b)$$

ここに、 $a = k_r(1+z)/2 - \beta$, $b = k_i(1+z)/2$ である。また式(23a,b)の境界条件は、 $z = \pm 1$ において式(21), (22)で与えられる。ただし、式(23)の右辺第1項は、 $z = \pm 1$ において0/0の不定形となるため、 $z = \pm 1$ の $(d\Phi/dz)$ の値をロピタルの定理を用いて求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_r}{dz} &= \frac{\zeta^2 Fr_0^2}{2(c^2 + \delta_i^2)} \{c(k_r a - k_i b) - \delta_i(k_r b + k_i a)\} \\ &\quad + \frac{z}{(a^2 + b^2)(c^2 + \delta_i^2)} \{(k_r \delta_r - k_i \delta_i)(ac + b\delta_i) - (k_r \delta_i + k_i \delta_r)(a\delta_i - bc)\} \end{aligned} \quad (F24a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_i}{dz} &= \frac{\zeta^2 Fr_0^2}{2(c^2 + \delta_i^2)} \{\delta_i(k_r a - k_i b) + c(k_r b + k_i a)\} \\ &\quad + \frac{z}{(a^2 + b^2)(c^2 + \delta_i^2)} \{(k_r \delta_r - k_i \delta_i)(a\delta_i - bc) + (k_r \delta_i + k_i \delta_r)(ac - b\delta_i)\} \end{aligned} \quad (F24b)$$

ここに、 $c = z - \Phi_r$ とする。また、 $y \rightarrow -\infty$ のとき $\delta_r = \delta_{r-}$, $\delta_i = \delta_{i-}$, $y \rightarrow +\infty$ のとき $\delta_r = \delta_{r+}$, $\delta_i = \delta_{i+}$ の値をとる。 k_r, k_i をパラメータとして $z = -1$ および $z = 1$ からそれぞれ式(21), (22)および式(24)のもとで式(23)をRunge-Kutta法を用いて数値的に解き、 $z = 0$ における両方向からの Φ_r, Φ_i がそれぞれ一致するように k_r, k_i を同定することにより k_i と β の関係が導かれる。

4. 空間に関する安定解析結果の考察

$Fr_0 = 0.6$ において Φ_r, Φ_i が $z = 0$ で一致するように k_r, k_i を同定し、それを示したのが図-2である。さらに、 $Fr_0 = 0.3, 0.6, 0.9$ のそれぞれについて同定された ζk_i と $\zeta \beta$ の関係を図-3に、 β/k_r と $\zeta \beta$ の関係を図-4に示した。 $Fr_0 = 0.6$ の場合、 $\delta \beta = 0.205$ で増幅率が最大になっている。また、図-3で $k_i = 0$ (安定限界)となる0以外の $\zeta \beta$ の値は次のように求められる。すなわち、この安定限界では

$$k_i = 0, \frac{\beta}{k_r} = \frac{1}{2} \quad (F25)$$

の関係があり、これらを式(23)に代入する。

$$\frac{d\Phi_r}{dz} = \frac{\zeta^2 \beta^2 [4 - Fr_0^2 z^2] - \Phi_r^2 + \Phi_i^2}{1 - z^2} + \frac{2}{z} \Phi_r \quad (F26)$$

ここで、パラメータ $\frac{l}{h_0} \beta$ の0.5への漸近過程を考慮して、 $\Phi_i = 0, \Phi_r = \Gamma z$ ($\Gamma = \text{const.}$)となる解を仮定し式(26)に代入すると

$$\Gamma = -(\Gamma^2 + \zeta^2 \beta^2 Fr_0^2) \frac{\frac{4\zeta^2 \beta^2}{\Gamma^2 + \zeta^2 \beta^2 Fr_0^2} - z^2}{1 - z^2}$$

が得られる。ここで、 $\Gamma = \text{const.}$ となるためには

$$\zeta \beta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{Fr_0^2}{4}} \quad (F27)$$

であることが必要である。これより、 $Fr_0 \geq 2$ ではせん断不安定は生じないことがわかる。

次に式(22)の関係より

$$\frac{d\phi_r}{dz} = \frac{1}{1-z^2} (\Phi_r \phi_r - \Phi_i \phi_i) \quad (\text{F28a})$$

$$\frac{d\phi_i}{dz} = \frac{1}{1-z^2} (\Phi_r \phi_i + \Phi_i \phi_r) \quad (\text{F28b})$$

となる。この Φ と ϕ の関係から Φ の分布を用いて ϕ に変換する。求められた ϕ_r および ϕ_i (図-5) を用いて水深 h' を次式で計算することができる。

$$h' = \varepsilon \exp(-k_i x) \cdot [\phi_r \cos \xi - \phi_i \sin \xi] \quad (\text{F29})$$

ここで、 $\xi = k_r x - \beta t$ とした。さらに、式(29)と式(6), (7)より (u', v') を求める。すなわち (u', v') を

$$u' = \varepsilon \phi_u(y) \exp i(kx - \beta t) \quad (\text{F30a})$$

$$v' = \varepsilon \phi_v(y) \exp i(kx - \beta t) \quad (\text{F30b})$$

とおき、式(7)の無次元形に代入すれば、 ϕ_v と ϕ の関係式として次式が得られる。

$$(a^2 + b^2) \phi_{vr} = \frac{1}{Fr_0^2 \zeta} \{ (\Phi_r \phi_r - \Phi_i \phi_i) b - (\Phi_r \phi_i + \Phi_i \phi_r) a \} \quad (\text{F31a})$$

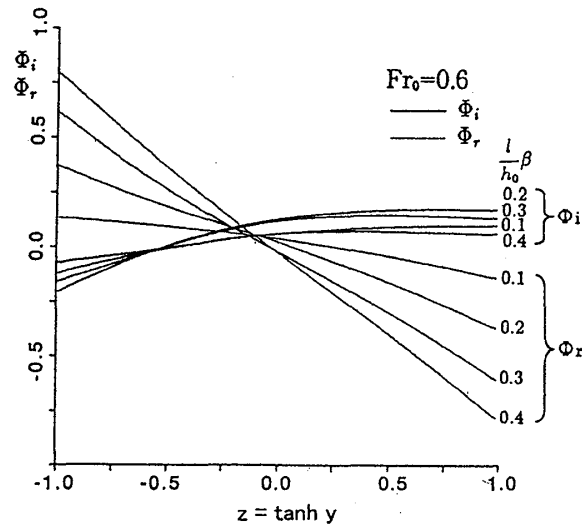


図 F-2 k_r と k_i の同定

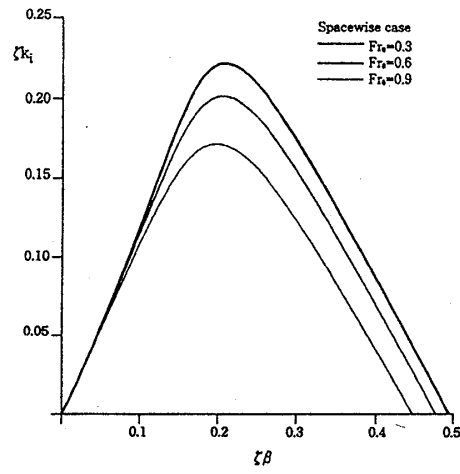


図 F-3 空間に関する安定解析における波数と増幅率の関係

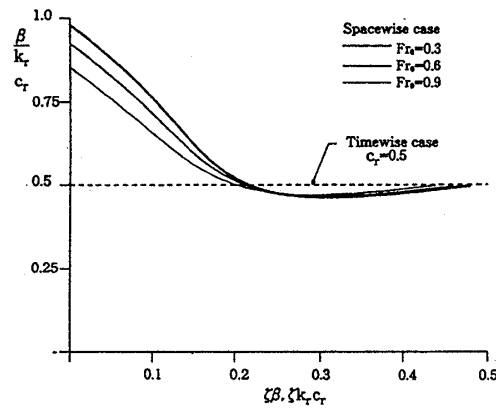


図 F-4 時間及び空間に関する安定解析における波数と位相速度の関係

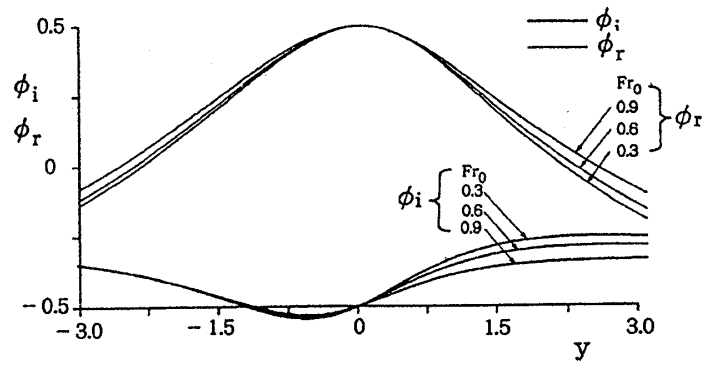


図 F-5 ϕ_r と ϕ_i の分布

$$(a^2 + b^2)\phi_{vi} = \frac{1}{Fr_0^2 \zeta} \{(\Phi_r \phi_r - \Phi_i \phi_i)a + (\Phi_r \phi_i + \Phi_i \phi_r)b\} \quad (F31b)$$

また, h', u', v' を式(6)の無次元形に代入すると,

$$(a^2 + b^2)\phi_{ur} = \frac{1 - \zeta^2}{2\zeta} (\phi_{vr}b - \phi_{vi}a) - \frac{1}{Fr_0} \{(k_r \phi_r - k_i \phi_i)a + (k_r \phi_i + k_i \phi_r)b\} \quad (F32a)$$

$$(a^2 + b^2)\phi_{ui} = \frac{1 - \zeta^2}{2\zeta} (\phi_{vr}a + \phi_{vi}b) - \frac{1}{Fr_0} \{(k_r \phi_i + k_i \phi_r)a - (k_r \phi_r - k_i \phi_i)b\} \quad (F32b)$$

となる. まず式(31)から ϕ_{vr}, ϕ_{vi} を求め, 次に式(32)から ϕ_{ur}, ϕ_{ui} を求める. これらを式(29)と同様に

$$u' = \varepsilon \exp(-k_i x) \cdot [\phi_{ur} \cos \xi - \phi_{ui} \sin \xi] \quad (F33a)$$

$$v' = \varepsilon \exp(-k_i x) \cdot [\phi_{vr} \cos \xi - \phi_{vi} \sin \xi] \quad (F33b)$$

に代入して, $(U_0 + u', v')$ を求めることができる. このようにして求められた水深分布図, 流速ベクトル図には, 線形解析であるにもかかわらず, 擾乱の渦への巻き上がりが生ずることが示される (図-6).

図-7 は横軸を y として ϕ_{ur}, ϕ_{ui} を示したものである. この図で ϕ_{ur} と ϕ_{ui} がそれぞれ y が 0 よりやや負の位置, 約 0.9 付近でどちらも 0 になることがわかり, Michaike がレーリー方程式に対して示しているのと同様, 流速変動に関する位相の反転が起こっていると考えられる.

5. 時間に関する安定解析

時間に関する安定解析では

$$h' = \varepsilon \phi(\tilde{y}) \exp[ik(x - ct)]$$

とおき, 時間 t にかかる係数 c について $c = c_r + ic_i$ と実部と虚部に分解し,

$$\tilde{h}' = \varepsilon \exp(-kc_i x) \phi(y) \exp[ik(x - c_r t)]$$

として解析を行う. この場合の波数と増幅率の関係を図-8 に示す.

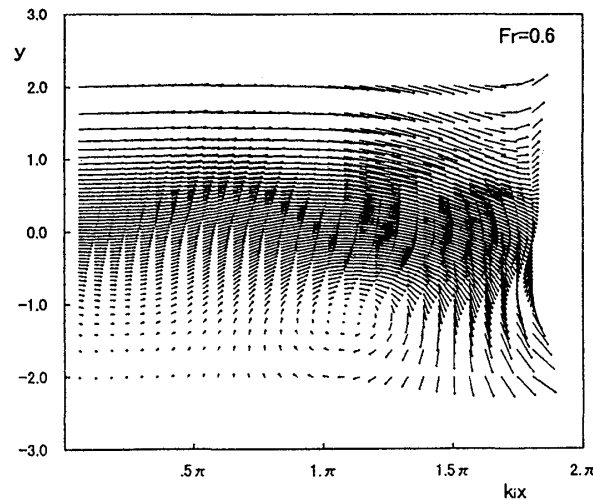


図 F-6 空間に関する安定解析における流速ベクトルの空間分布

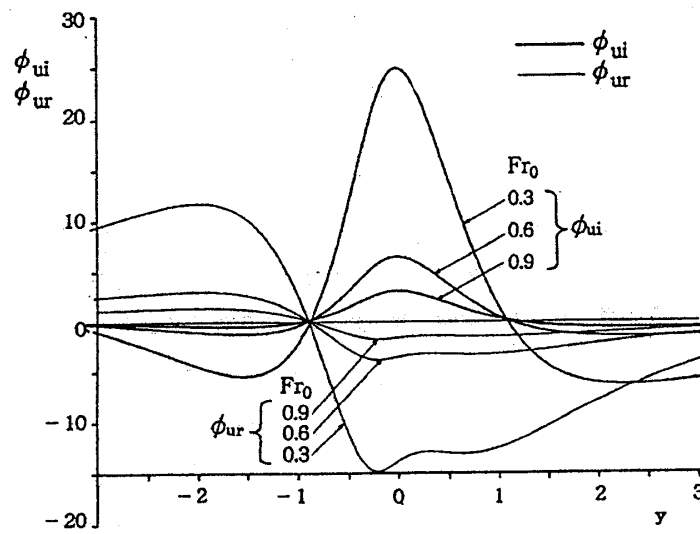


図 F-7 ϕ_{ur} と ϕ_{ui} の分布

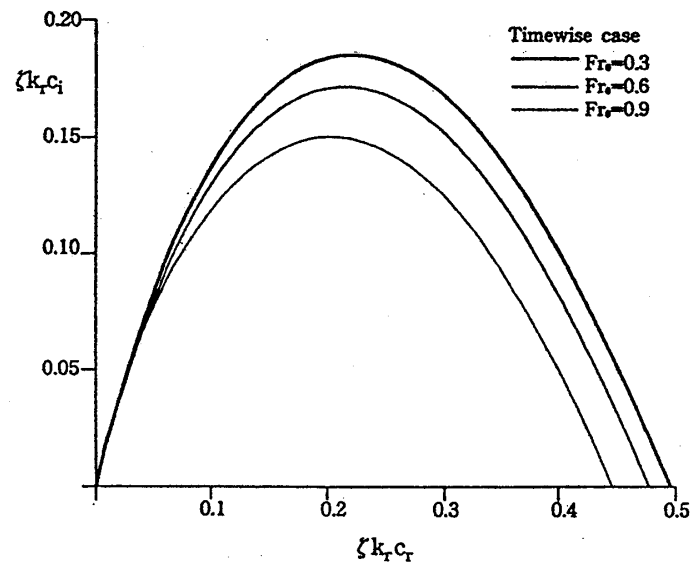


図 F-8 時間に関する安定解析における波数と増幅率の関係

Appendix G 湾曲の2次流の取り扱い

河川の湾曲部など流線が強制的に曲げられるとき、水柱に作用する横断方向の力を考えると、水面付近では圧力による力と遠心力の合力が湾曲の外岸側を向き、河床付近では内岸側を向く。この力のアンバランスにより横断面内に循環流が生じるが、この流れを湾曲の2次流と呼ぶ。

この流れは河川湾曲部の外岸側の河床を深く洗掘し、逆に内岸側に土砂を堆積させるため、河川地形を予測するためには湾曲の2次流の効果を考慮する必要がある。水深積分モデルに湾曲の2次流を考慮する方法について簡単に説明する。

水深平均した2次元流れ場を考え（図 G-1 参照）、その流線方向とそれに直交する方向の水深積分された運動量方程式を記述すれば式(1)及び(2)となる。

$$c_{s2} \frac{\partial \overline{u_s^2} h}{\partial s} + c_{sn} \frac{\partial \overline{u_s} A_n h}{\partial n} + \frac{c_{sn} \overline{u_s} A_n h}{R} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial s} - \frac{\tau_{bs}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^s \frac{\tau_{ss}}{\rho} dz + \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^s \frac{\tau_{ns}}{\rho} dz + 2 \int_{z_b}^s \frac{\tau_{ns}}{\rho R} dz \quad (G1)$$

$$c_{sn} \frac{\partial \overline{u_s} A_n h}{\partial s} + c_{n2} \frac{\partial A_n^2 h}{\partial n} + \frac{h(c_{s2} \overline{u_s^2} - c_{n2} A_n^2)}{R} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial n} - \frac{\tau_{bn}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^s \frac{\tau_{ns}}{\rho} dz + \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^s \frac{\tau_{nn}}{\rho} dz - \int_{z_b}^s \frac{\tau_{ss} - \tau_{nn}}{\rho R} dz \quad (G2)$$

ここに、 s : 流線座標で基準点からの流線に沿った長さを表す、 n : 流線座標に直交する座標、 z : s - n 座標に直交する座標、 R : 流線の曲率半径、 h : 水深、 (u_s, u_n) : 流速の s - n 成分 directions、 z_b, z_s : 河床標高と水位、 $\tau_{ss}, \tau_{sn}, \tau_{nn}$: レイノルズ応力、 $\overline{u_s}$: 水深平均流速の s 方向成分、 A_n : 2次流を表現する代表流速で式(3)中に定義が記述されている。

$\overline{u_s}$ と A_n は次式で定義される。

$$u_s = \overline{u_s} \cdot f_s(\zeta), u_n = A_n \cdot f_n(\zeta), \zeta = z/h \quad (G3)$$

ここに f_s と f_n は流れ方向（水深平均流速場の流線方向）とそれに直交する方向の流速成分の相似分布形を表す。相似関数 f_s と f_n は次式で表される条件を満たしている。

$$\int_0^1 f_s(\zeta) d\zeta = 1, \int_0^1 f_n(\zeta) d\zeta = 0.$$

式(1), (2)中の係数 c_{s2}, c_{sn}, c_{n2} は相似関数 f_s, f_n を用いて式(4)で定義される。

$$c_{s2} = \int_0^1 f_s(\zeta)^2 d\zeta, c_{sn} = \int_0^1 f_s(\zeta) f_n(\zeta) d\zeta, c_{n2} = \int_0^1 f_n(\zeta)^2 d\zeta \quad (G4)$$

図 G-2 に Engelund モデルを用いて計算した c_{sn}, c_{n2} と粗度（路床の粗さ）パラメータの関係を示した。 c_{s2} は通常 1 とおく。

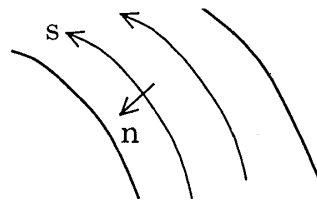
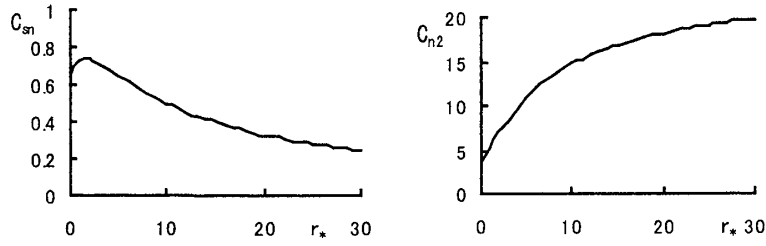


図 G-1 水深平均流速場の流線座標系

図 G-2 c_{sn} , c_{n2} と路床の粗度パラメータの関

流線に沿う二次流の発達過程（曲がりに対する2次流発達の遅れ）を考慮しない場合、 A_n は主流流速、曲率半径と次式で関係づけられる。

$$A_n = \frac{\overline{u_s} h}{R} \quad (G5)$$

式(1), (2)を一般座標系に変換する。そのために、まず直交曲線座標系から直角座標系に座標変換した後一般座標系に変換する。

式(1), (2)を直角座標系に座標変換すると式(6), (7)となる。

$$c_{s2} \left(\cos \theta \frac{\partial \overline{u_s}^2 h}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \overline{u_s}^2 h}{\partial y} \right) + c_{sn} \left(-\sin \theta \frac{\partial \overline{u_s} A_n h}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \overline{u_s} A_n h}{\partial y} \right) + c_{sn} \frac{2 \overline{u_s} A_n h}{R} = \dots \quad (G6)$$

$$c_{sn} \left(\cos \theta \frac{\partial \overline{u_s} A_n h}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \overline{u_s} A_n h}{\partial y} \right) + c_{n2} \left(-\sin \theta \frac{\partial A_n^2 h}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial A_n^2 h}{\partial y} \right) - \frac{h(c_{s2} \overline{u_s}^2 - c_{n2} A_n^2)}{R} = \dots \quad (G7)$$

ここに θ : 直角座標の x 方向と流線のなす角度。

さらに式(6), (7)に eq.(6) $\times \cos \theta$ - eq.(7) $\times \sin \theta$, and eq.(6) $\times \sin \theta$ - eq.(7) $\times \cos \theta$ の演算を施して運動量方程式の x, y 方向成分を求めれば式(8), (9)となる。

[x-component]

$$c_{s2} \left(\frac{\partial u^2 h}{\partial x} + \frac{\partial uv h}{\partial y} \right) + c_{sn} \left(-\frac{\partial \overline{u_s} A_n h \sin 2\theta}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_s} A_n h \cos 2\theta}{\partial y} \right) + c_{n2} \left(\frac{\partial A_n^2 h \sin^2 \theta}{\partial x} - \frac{\partial A_n^2 h \cos \theta \sin \theta}{\partial y} \right) = \dots \quad (G8)$$

[y-component]

$$c_{s2} \left(\frac{\partial uv h}{\partial x} + \frac{\partial v^2 h}{\partial y} \right) + c_{sn} \left(\frac{\partial \overline{u_s} A_n h \cos 2\theta}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_s} A_n h \sin 2\theta}{\partial y} \right)$$

$$+c_{n2} \left(-\frac{\partial A_n^2 h \sin \theta \cos \theta}{\partial x} + \frac{\partial A_n^2 h \cos^2 \theta}{\partial y} \right) = \dots \quad (G9)$$

ここに (u, v) :水深平均流速の x, y 方向成分.

さらに, 式(8), (9)に演算 $\xi_x \times \text{eq.}(8) + \xi_y \times \text{eq.}(9)$, $\eta_x \times \text{eq.}(8) + \eta_y \times \text{eq.}(9)$ を施して, 運動量方程式の反変成分を求めれば次式となる.

[ξ -component]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V \frac{Q^\xi}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(U \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + V \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(U \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + V \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) \\ &= -gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J} \\ &+ \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\xi_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2 h} \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2 h} \right) \\ &+ \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'v'h} \right) + \frac{2\xi_x \xi_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v'h} \right) \\ &+ \xi_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \xi_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4}) \end{aligned} \quad (G10)$$

[η -component]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U \frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V \frac{Q^\eta}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(U \frac{\partial \eta_x}{\partial \xi} + V \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(U \frac{\partial \eta_y}{\partial \xi} + V \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} \right) \\ &= -gh \left(\frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\eta}{\rho J} \\ &+ \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\eta_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2 h} \right) + \frac{\eta_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2 h} \right) \\ &+ \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v'h} \right) + \frac{2\eta_x \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'v'h} \right) \\ &+ \eta_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \eta_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4}) \end{aligned} \quad (G11)$$

ここに $S_{\xi 1} \sim S_{\eta 4}$ は次式で定義される.

$$\begin{aligned} S_{\xi 1} &= -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta - \xi_y A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta) \right], \quad S_{\xi 2} = -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta - \eta_y A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta) \right], \\ S_{\xi 3} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin^2 \theta - \xi_y A_n^2 h \cos \theta \sin \theta) \right], \quad S_{\xi 4} = c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \sin^2 \theta - \eta_y A_n^2 h \cos \theta \sin \theta) \right], \\ S_{\eta 1} &= c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta + \xi_y A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta) \right], \quad S_{\eta 2} = c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta + \eta_y A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta) \right], \\ S_{\eta 3} &= -c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin \theta \cos \theta - \xi_y A_n^2 h \cos^2 \theta) \right], \quad S_{\eta 4} = c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \cos \theta \sin \theta - \eta_y A_n^2 h \cos^2 \theta) \right] \end{aligned}$$

ここに, (Q^ξ, Q^η) : 単位幅流量フラックスベクトルの反変成分, (M, N) : 単位幅流量フラックスベクトルの (x, y) 成分, (U, V) : 流速ベクトルの反変成分, J : 座標変換のヤコビアン, $(\tau_b^\xi, \tau_b^\eta)$: 底面せん断

応力ベクトルの反変成分, $-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}$: レイノルズ応力テンソルの直角座標成分.

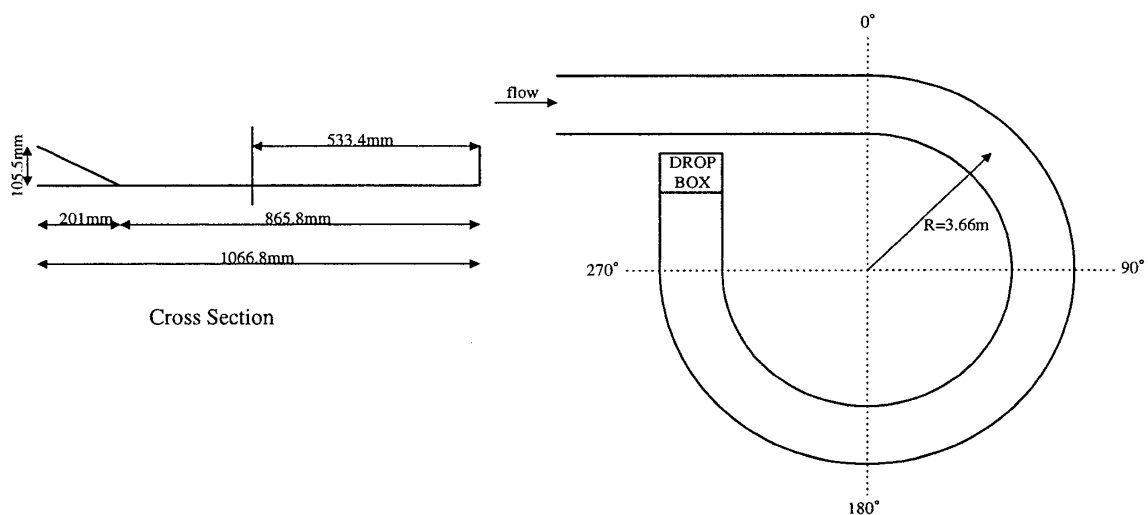
一般座標系において, 流線の曲がりに対する2次流の発達過程を考慮したモデルも開発されているが, ここでは説明を省略する.

図 G-4 に図 G-3 に示した湾曲水路の流れの計算結果を示した. 2次流による横断方向の運動量輸送を考慮することにより, 湾曲水路外岸側の流速が速くなる現象が再現されることがわかる.

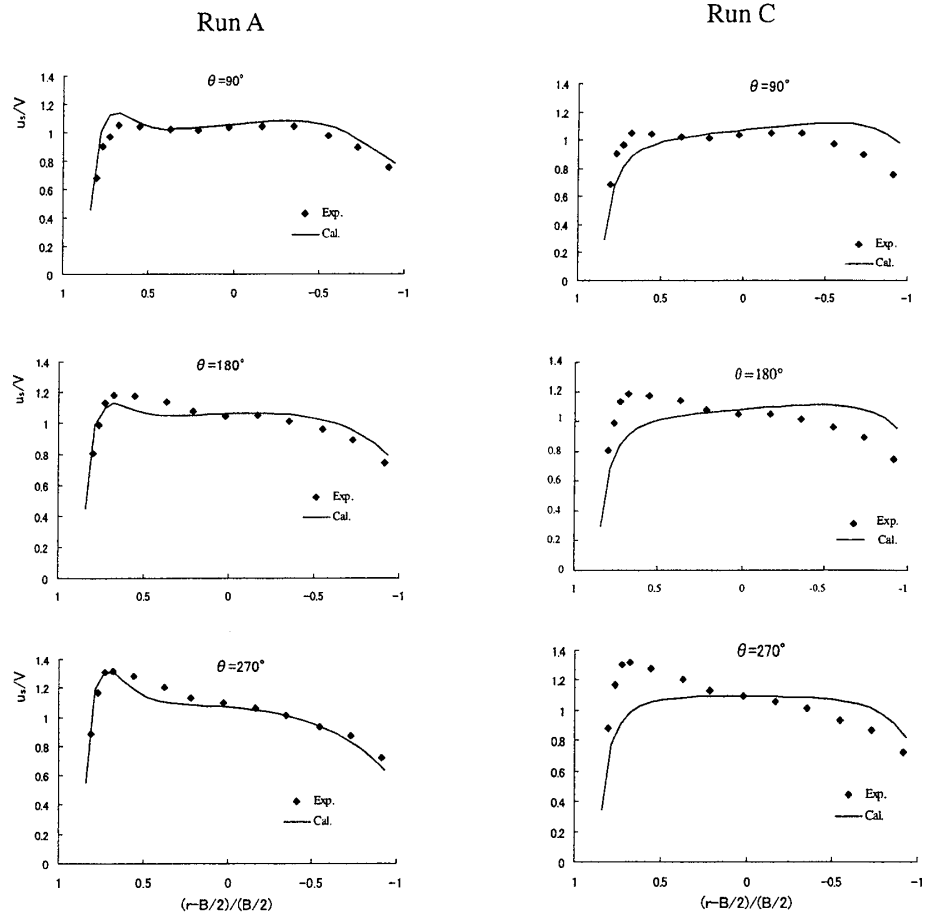
図 G-5 には Engelund モデルにより計算した2次流の流速分布を示した. 実験結果とほぼ適合していることがわかる.

参考文献

- 1) Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, Proc. ASCE, *J. Hydraulic Div.*, Vol.100, HY11, pp.1631-1647, 1974.
- 2) Hosoda, T., Nagata, N., Kimura, I. and Michibata, K.: A depth averaged model of open channel flows with lag between main flows and secondary currents an a generalized curvilinear coordinate, *Advances in Fluid Modeling & Turbulence Measurements*, World Scientific, pp.63-70, 2002.



図G-3 実験水路 (Hicks等による)



図G-4 主流方向流速の横断分布（左：2次流を考慮した場合，右：考慮しない場合，図の左が湾曲水路の外岸側）

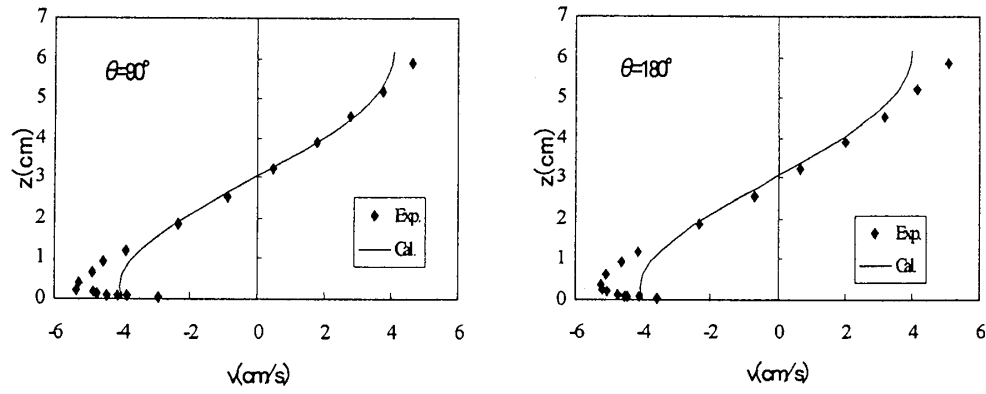


図 G-5 2次流流速分布

Appendix H 蛇行を繰り返す水路の高速流の水面の形

連続蛇行水路の流れは、蛇行河川の流路変動、流路と固定砂州の関係などに着目した多くの研究が行われてきた。流れだけに着目すると、浅水流方程式の線形解析及び非線形解析を用いて、高フルード数領域に水路蛇行と水面の共鳴関係が存在すること、共鳴関係近傍では流れの抵抗則が増加し流路蛇行と $\pi/2$ の位相差を有する特有の水面形が生じることが知られている。

ここでは、数値実験により得られた共鳴関係近傍での水面の応答特性について説明する。

数値計算は平面形状が sine-generated curve の実験水路に合わせて行われた。水路の平面図を図 H-1 に示した。水路の幾何学的無次元パラメータは次式で定義される。

$$\lambda = \frac{2\pi h_0}{L}, \quad \varepsilon = \frac{B}{2h_0}, \quad \nu = \frac{h_0}{R} \quad (\text{H1})$$

ここに、 h_0 ：平均水深、 L ：水路中心軸に沿って測られた蛇行波長、 B ：水路幅、 R ：曲頂部の最小曲率半径を表す。

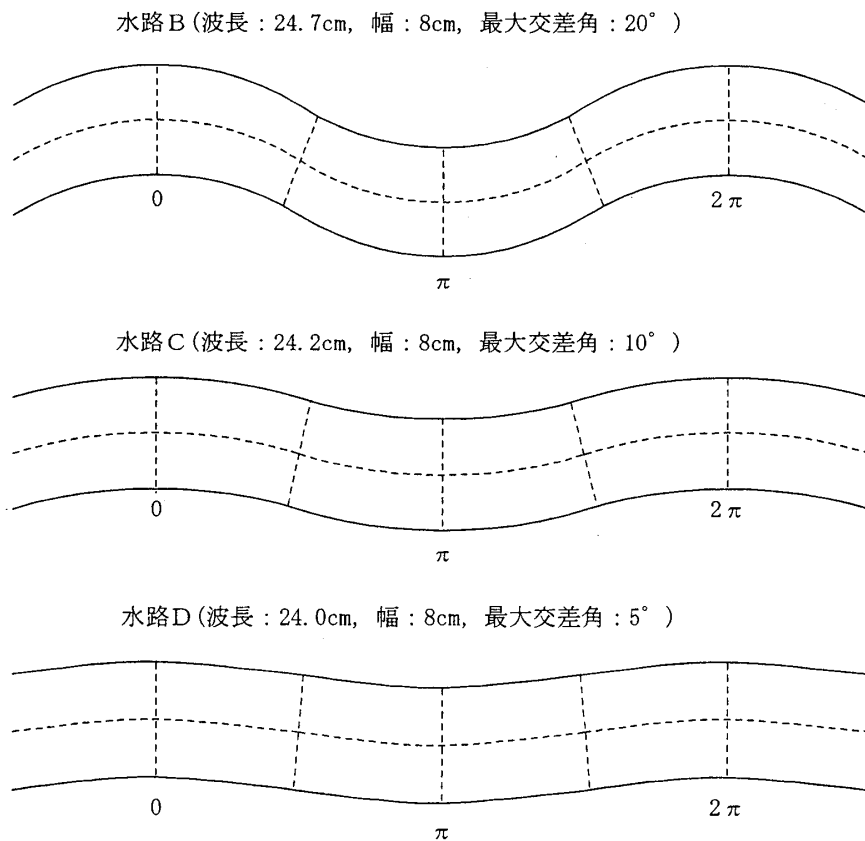


図 H-1 水路の平面形状

水路の側壁に沿う水深変動の振幅と等流のフルード数の関係を図 H-2 に示す。(フルード数が大きいほど水路の勾配が大きい。) 共鳴関係の存在が確認できる。また、平面形状と水深変動の位相差とフルード数の関係を図 H-3 に示す。共鳴関係を境に水路側壁に沿う水深分布が同位相から逆位相に反転することがわかる。(同位相とは湾曲の外岸で水深分布が極大になる場合であり、逆位相とは逆に極小になる場合である。)

注：等流のフルード数とはまっすぐな水路にある勾配で通水したときの流れのフルード数で、粗度係数(抵抗係数)を与えれば事前に計算または予測できる。対象としている蛇行水路の流れのフルード数は、蛇行により見かけの抵抗係数が増加するため、事前に予測できない。

さらに図 H-4 と図 H-5 には、それぞれ水路 D と B の共鳴点前後の水面形パターンを示した。共鳴関係の前後で位相の反転がみられるとともに、非線形性の強い水路 B では、共鳴関係近傍で跳水を伴うような特徴ある水面形パターンが生じている。

図 H-6 に、水路 B の共鳴点近傍の水面形パターンについて実験と数値計算結果の比較を示した。数値解析結果は実験に見られる水面パターンをよく再現している。

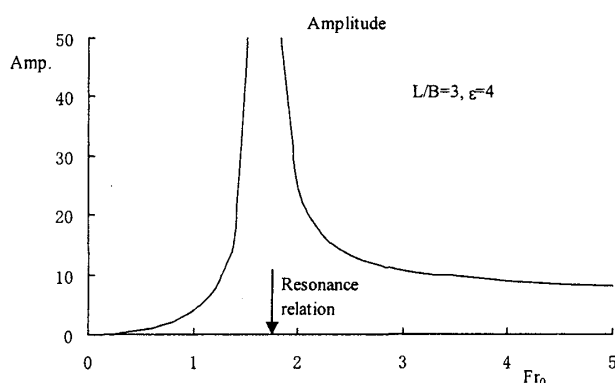


図 H-2 水深変動の振幅とフルード数の関

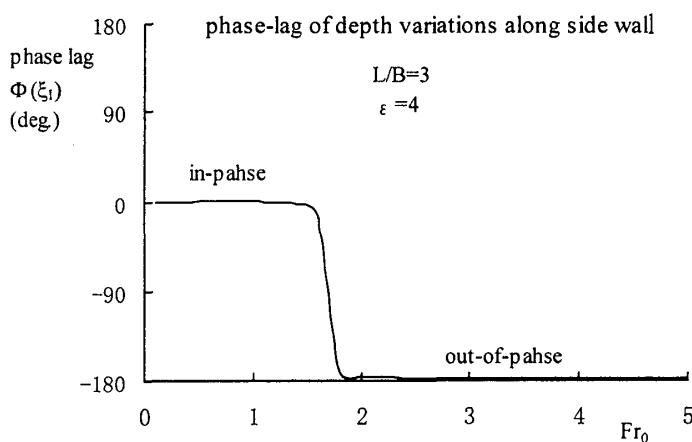


図 H-3 水深変動の位相差とフルード数の関係

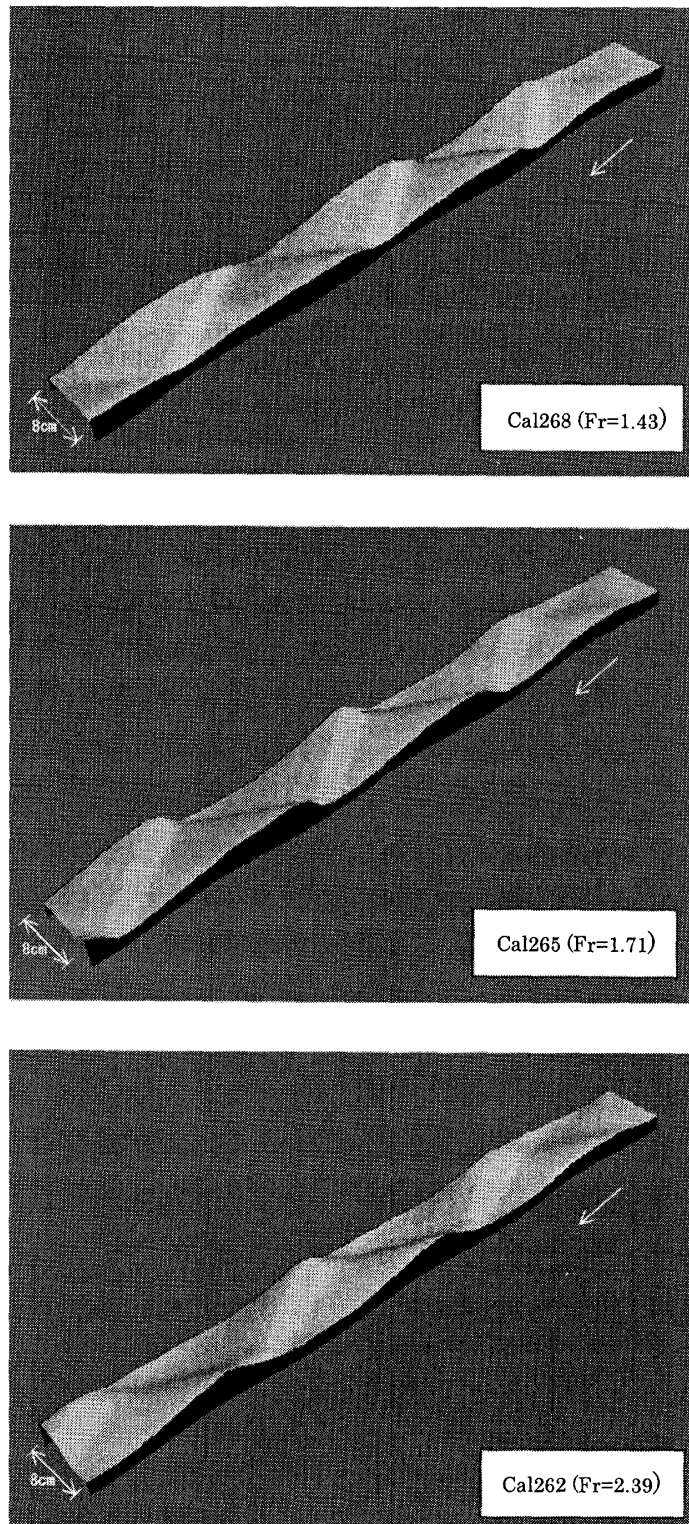


図 H-4 水路 D の水面形パターンの変化

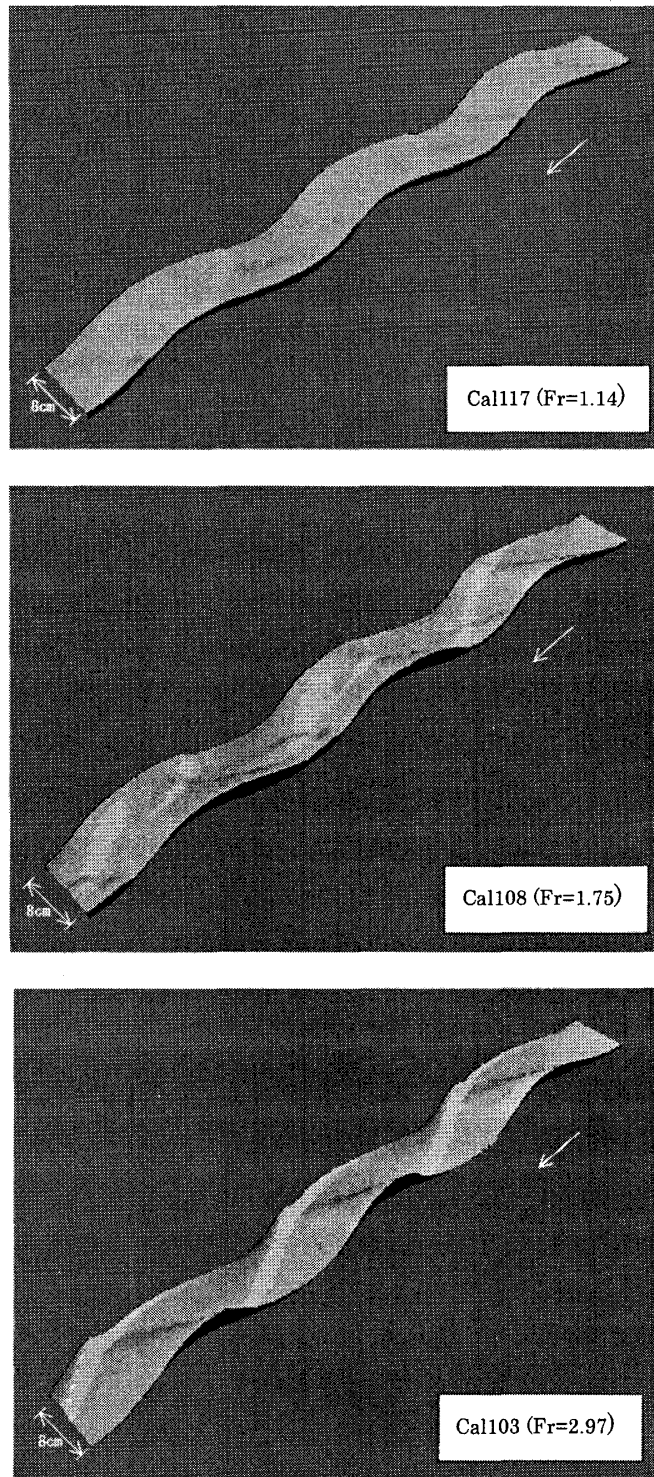
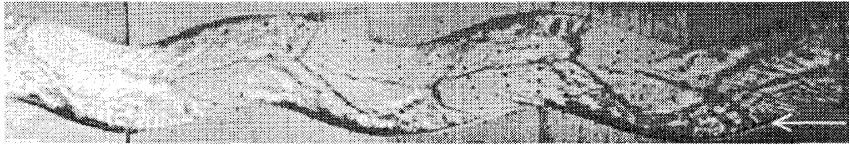


図 H-5 水路 B の水面形パターンの変化

実験（水路 B）



数値計算（水路 B）

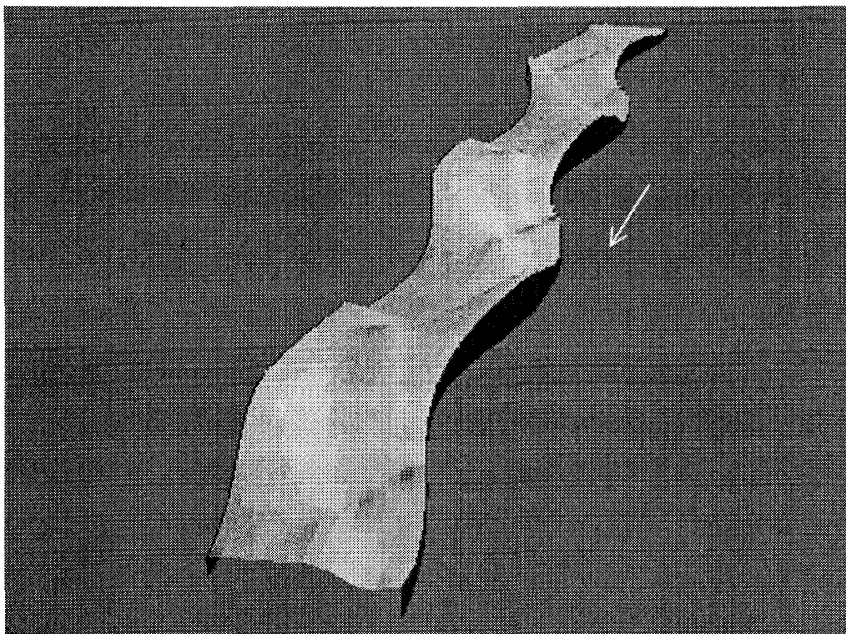
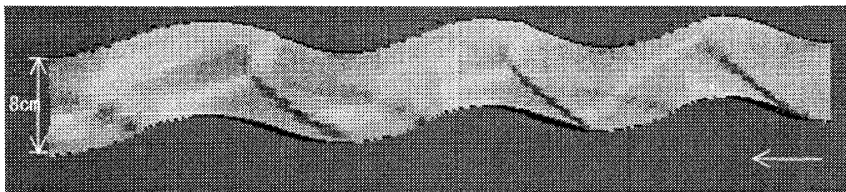


図 H-6 共鳴点近傍の水面形パターン（実験と数値解析結果の比較）

図 H-7 は等流のフルード数で整理した計算結果の振幅とフルード数の関係を示す。計算結果は線形理論と大きくずれており、また図-9 に示した非線形応答の概念図に示すような応答の非線形性が再現されている。一方図-8 に示したように、実際に計算されたフルード数で整理すると、計算結果は線形理論に適合するようになる。

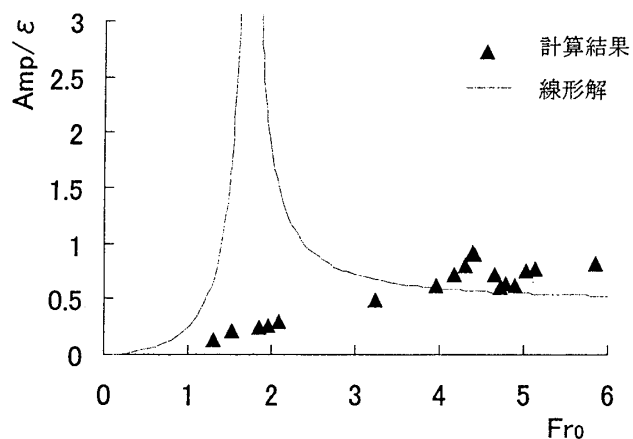


図 H-7 計算結果の振幅とフルード数の関係

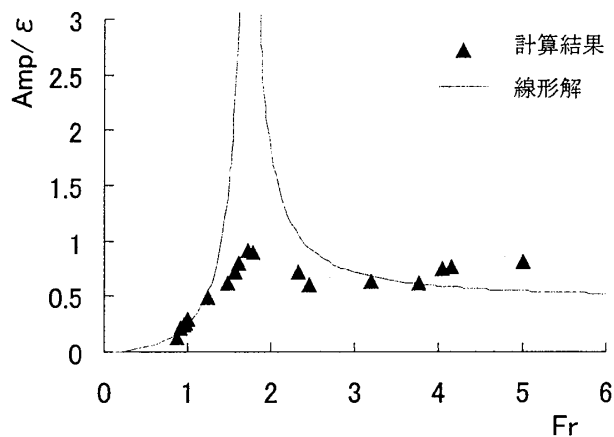


図 H-8 振幅とフルード数の関係
(再現された流れのフルード数で整理した場合)

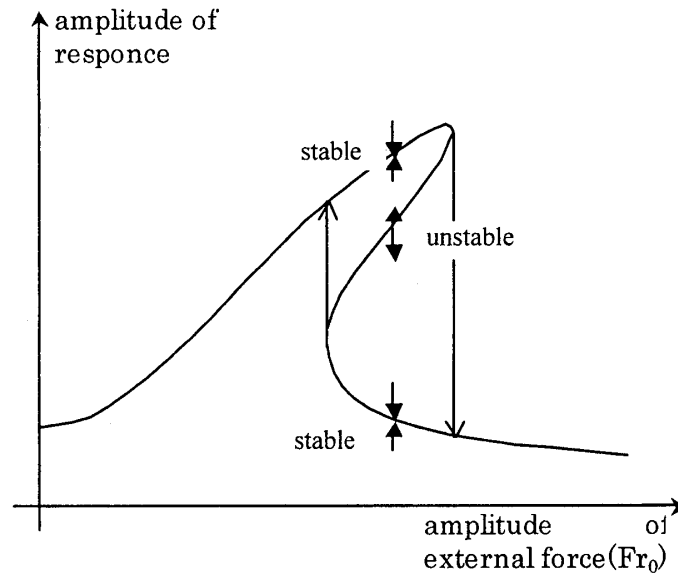


図 H-9 非線形応答関係

参考文献

- 細田 尚：連続蛇行水路の高速流の基本的特性，水工学論文集，第 43 巻，pp.311-316, 1999.
- 細田 尚：連続蛇行水路の高速流に関する非線形解析，土木学会論文集，No.656/II-52, pp.103-111, 2000.
- 細田 尚・西濱 真佐男：共鳴点近傍における連続蛇行水路の高速流の特性解析，水工学論文集，第 47 巻，2003.

Appendix I 川の中の砂の波

底が砂や礫で構成されている川や人工水路を眺めると、砂や礫による様々な波が生じていることがある。このような流れの底に形づくられる砂礫の波を河床波や河床変動と呼ぶ。図 I-1(a)は大雨の時に上流の風化花崗岩地帯から人工水路に流出してきた砂が形づくる砂堆(dunes)を示している。河床波の空間的変化のスケールが水深程度である砂堆は小規模河床波または小規模河床形態と呼ばれている。このような勾配の緩やかな水路（フルード数の小さな流れ）に形成される砂堆は形状が下流方向に移動するが、勾配が大きくなると形状が上流方向に移動する反砂堆が発生する場合がある。

一方、図 I-1(b)を見ると水路の横断方向に交互に砂の波が繰り返しており、交互砂州と呼ばれる。交互砂州のように変化の空間スケールが水路幅の河床波は中規模河床波または中規模河床形態と呼ばれている。空間スケールが異なるため、中規模河床形態の上に小規模河床形態が形成されていることもある。

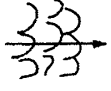
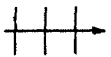
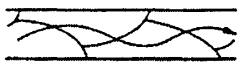
河川や人工水路に生じる河床波は上述のように変動の空間スケールや波の移動方向などで表-1 のように分類されている²⁾。実際の河川で見られる河床波の例を図 I-2～図 I-4 に示す。図 I-2 はこれも風化花崗岩地帯を流れる砂の川の斐伊川（島根県）で見られるうろこ状砂州（複列砂州）であり、単列の交互砂州が複列化したものと考えられている。図 I-3 は那賀川（徳島県）の河道が直線的な部分に見られる交互砂州を示す。砂州により流れは蛇行し、左右岸に交互に流れの水衝部が生じるため、護岸、根固め、水制などの河岸防護策が施されている。

図 I-4 は紀ノ川の河道湾曲部に形成された固定砂州と、河岸侵食対策としての水制群である。通常、流れの流線が曲げられると横断面内に遠心力と圧力の差に起因する 2 次流が発生することが知られている。この湾曲の 2 次流により砂礫の移動方向が変化し、通常湾曲部の内岸側（滑走斜面）には固定砂州（形状が移動しない）が形成され、外岸側（攻撃斜面）は深く洗掘されて淵が形成される。図 I-4 の水制群は、外岸側の洗掘による河岸の侵食、ひいては堤防の破堤を防御するために設けられた河川構造物である。一基の水制を水刎（みずはね）として機能させるのではなく、水制群が全体で粗度として働いて外岸側の流速を減少させ、流れの主流部を若干中央部に移動させるとともに外岸の洗掘を緩和している。

川岸が固定され移動しない場合の河床に生じる砂の波について説明したが、世界には河岸がまったく防護されておらず自由に蛇行する河川も数多く存在する。また、日本の河川でも、低水路に護岸が施されておらず、低水路が比較的自由に変動できる河川区間がある。（日本の河川では、通常流量が少ない時、中央の掘り込まれた低水路を流れ、洪水時に高水敷に冠水する 경우가多く、高水敷が冠水した状態の流れのことを低水路の流れと高水敷上の流れが複合しているという意味で複断面流れと呼ぶ。）

このような川の流路の変動を河道変動と呼ぶ。すなわち、砂に溝を掘って水を流した後の溝の形状変化のことであり、条件により初期の直線形状のまま川幅が広がり水深が浅くなる場合、河岸が交互に侵食され流路が蛇行する場合などが生じる。この河道変動と河床変動は密接に関連しており、初期に交互砂州が発生し流れが蛇行することが河道が蛇行する一因であると考えられている。図 I-5 に国土地理院・数値地図 50m メッシュ（標高）を用いて表示した四万十川の穿入蛇行を示す。四万十川は現在も付加作用が継続している四万十帯上を流れており、昔は堆積平野を自由蛇行していたと考えられている。ここ 200 万年程度の間に、隆起により日本列島の山岳地帯が形成されたが、この間の四万十川流域の隆起に伴い、川の下刻作用と側方侵食作用により、山間部を緩やかに美しく蛇曲する現在の四万十川が形成されたと考えられている。

表 I-1 河床にできる砂の波の分類

名 称	形状・流れのパターン		移動方向	備 考
	縦断面図	平面図		
小規模河床形態	砂 連 		下流	波長, 波高が砂の粒径と関係する
	砂 堆 		下流	波長, 波高が水深と関係する
	遷移河床 			砂連, 砂堆, 平坦河床が混在する
	平坦河床 			
	反砂堆 		上流 停止 下流	水面波と強い相互干渉作用をもつ
中規模河床形態	砂 州 			波長が水路幅と関係する
	交互砂州 		下流	
	うろこ状砂州 		下流	

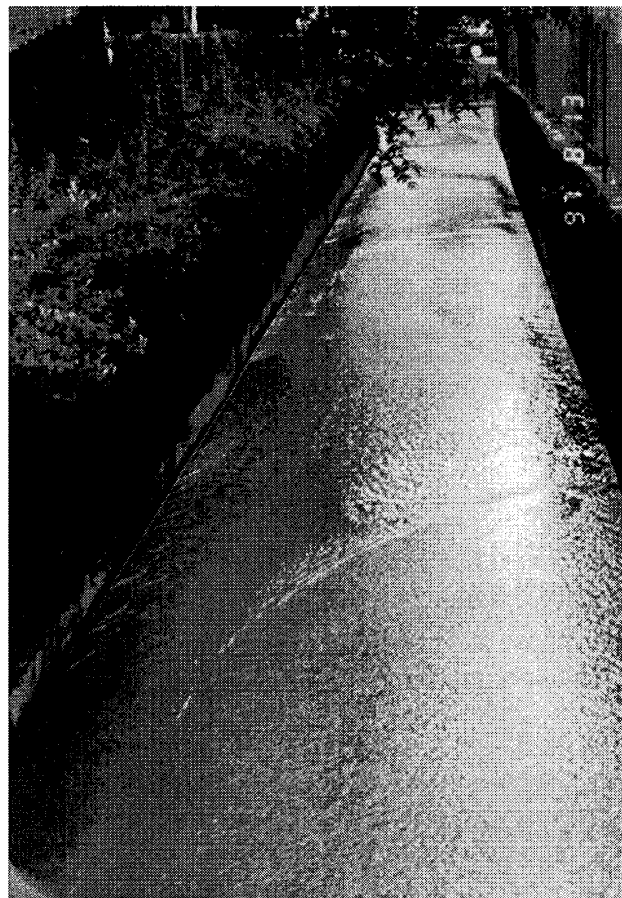


図 I-1 豪雨時に人工水路に生じた砂の波 (a) 砂堆(上), (b) 交互砂州 (下)



図 I-2 斐伊川（島根県）のうろこ状砂州（複列砂州）
（国土交通省出雲工事事務所提供）



図 I-3 那賀川（徳島県）の交互砂州
（国土交通省徳島工事事務所提供）

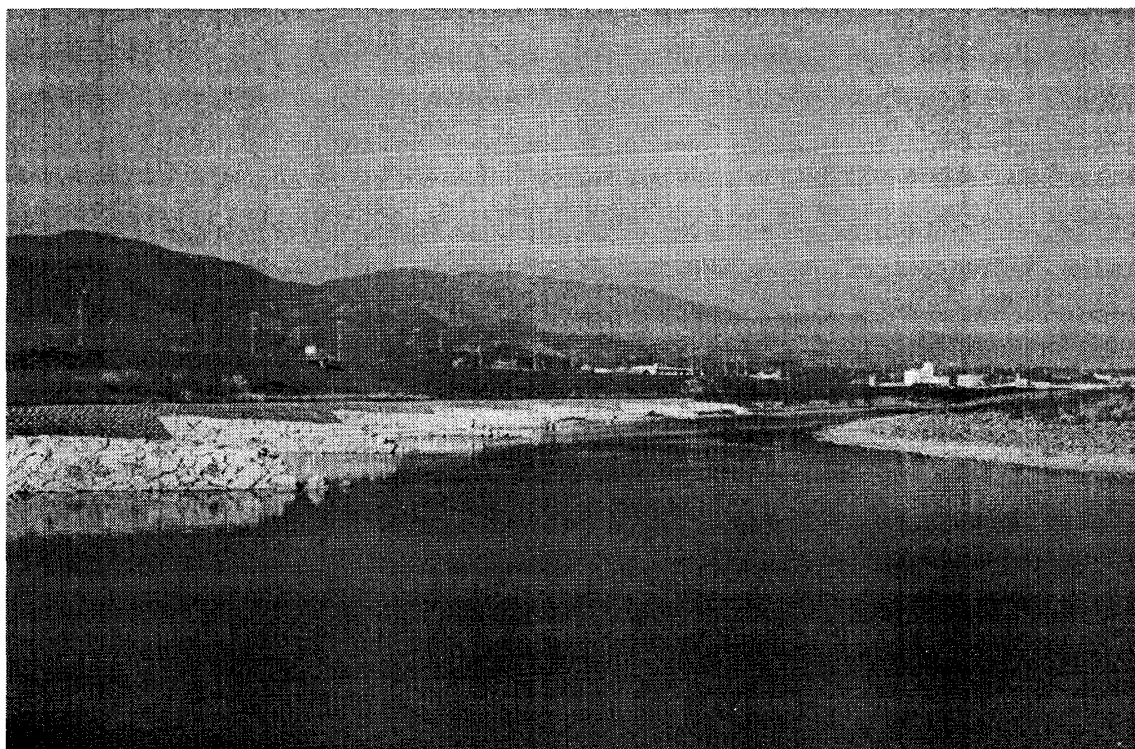


図 I-4 紀ノ川の河道湾曲部に形成された固定砂州と水制

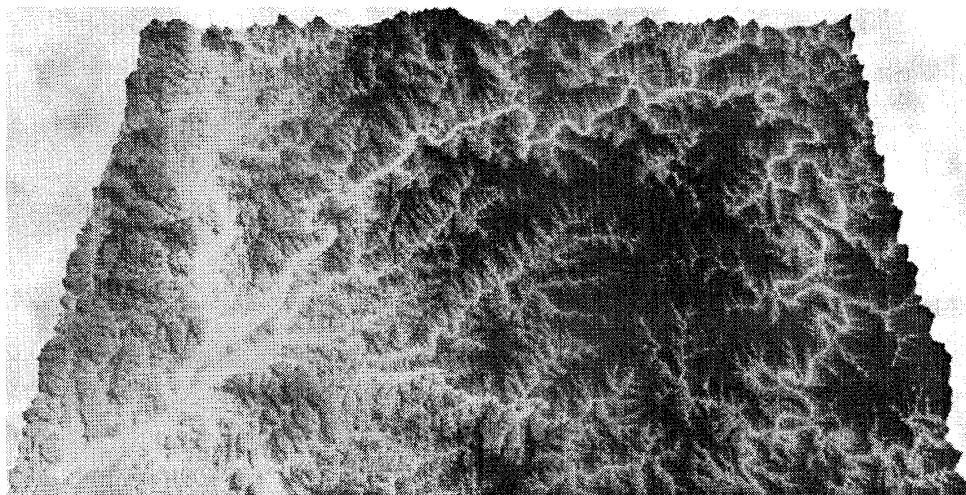


図 I-5 四万十川の穿入蛇行（国土地理院・数値地図 50m（標高）を用いて作成）