

大域結合 IF 振動子の初期敏感性

安宅 正之*

平成 18 年 9 月 11 日

Integrate-and-fire (IF) モデルは、非線形結合振動子系における最もシンプルなモデルの一つである。Mirollo and Strogatz [1] は、Peskin のモデル [2] を一般化し、大域結合でかつ相互作用が全て等しければ、有限個の振動子の集団はほとんどの初期状態で有限時間内に同調することを示した。我々は、振動子の数が無限個である場合を解析的に研究し、同調を起こさない (二つの振動子群が位相 π ずれて不安定点にある) 特定の相互作用力 ε が存在することを示した [3]。本研究では、振動子が 2 種の相互作用力 ε_1 と ε_2 のいずれかを持つような振動子集団の振る舞いについて研究した。

我々の使ったモデルは、次のようなものである。 x_i は i 番目の振動子の状態変数で Peskin [2] のモデルに従う。

$$\tau \frac{dx_i}{d\phi} = S - x_i, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

S は $S > 1$ な定数で、 $\tau = \ln[S/(S-1)]$ を満たす。 ϕ は振動周期が 1 となるように規格化された時間に対応する変数である。

状態変数 x_i が 1 を越えると、 i 番目の振動子は発火し x_i は 0 へとリセットされる。振動子間の相互作用は、振動子の発火時のみに起こる (パルス型結合振動子)。つまり、 i 番目の振動子が発火したら、 i 番目の振動子が持つ ε を他の全ての振動子の状態変数 x_j ($j \neq i$) に加える。ここで加える ε は、発火した振動子 i に固有な ε で、 ε_1 か ε_2 のどちらかの値を取る。 $x_j + \varepsilon > 1$ となる場合は、余剰分は無視して状態変数を 0 に戻す。

$$\begin{aligned} x_i(t) = 1 \rightarrow x_j(t^+) &= \min(1, x_j(t) + \varepsilon(i)) \quad \forall j \neq i. \\ \varepsilon(i) &= \varepsilon_1 \text{ or } \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2)$$

相互作用の時間遅れは考慮しない。また、 n 個の振動子が同時に発火した場合は、発火した振動子の ε の平均を取り、他の振動子の状態変数に加える。

以上の条件で数値シミュレーションを行った (図 1)。 ε_1 と ε_2 が定まっても、同調までの時間が一位に求まらない事が分かる。これは、系の初期敏感性が大きく寄与した結果である。

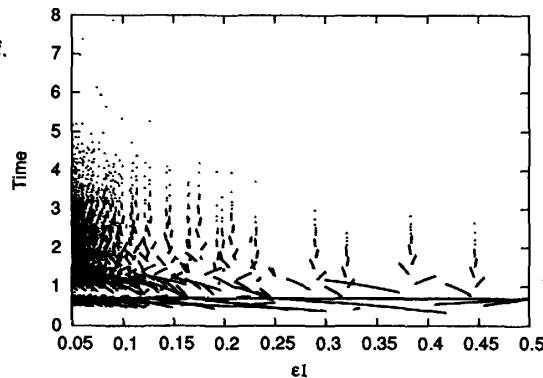


図 1: 全ての振動子が同調するまでの時間。 $0.05 < \varepsilon_1 < 0.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, and $S = 1.2$.

参考文献

- [1] Renato E. Mirollo and Steven H. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(6):1645–1662, December 1990.
- [2] Charles S. Peskin. *Mathematical Aspects of Heart Physiology*, section 7.7, pages 268–278. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1975. Section title is “Self-Synchronization of the Cardiac Pacemaker”.
- [3] Masayuki Ataka and Takao Ohta. Anomalous synchronization of integrate and fire oscillators with global coupling. *Prog. Theor. Phys.*, 113(1):55–62, January 2005.

*広大理, 京大理 / masayuki.ataka@gmail.com