

種数 3 の曲線の方程式と moduli について

日大 理工 佐々木隆二

良く知られている様に、非特異平面 4 次曲線は、28 本の複接線 (bitangent) を持つ。これらの接線の 7 本が、次の条件 (A) を満たす時、その 7 本は、Aronhold system をなすといわれる。

- (A) どの相異なる 3 本の 6 個の接点も、2 次曲線に含まれない。

我々は、次の集合を主な考察の対象とする。

$$\mathcal{M}^{(2)} = \left\{ (C, \phi) \left| \begin{array}{l} C \text{ は非特異平面 4 次曲線} \\ \phi: \{1, 2, \dots, 7\} \xrightarrow{\sim} A \\ A \text{ は } C \text{ の 1 つの Aronhold system} \end{array} \right. \right\} / \cong$$

我々の第 1 の目標は、moduli 空間 $\mathcal{M}^{(2)}$ を具体的に書き表れる事である (定理 8)。次に、この事実を使って、次数 3、level 2 の modular 函数体は、有理函数体である事を示す。さらに、その 6 個の生成元を具体的に与える。

これらの問題は、最初、Riemannにより研究され、Weber Frobenius に至って完成された。然し乍ら、理解しにくい所もあるのだから（少くとも筆者にとり）少し整理して述べてみることにする。

§ 1 代数曲線の Theta characteristics

この節では、代数曲線の Theta characteristic の理論を、手短かに復習する（c.f. [5]）。

k を標数が 2 と異なる代数体、 C を k 上の種数 $g \geq 1$ の完備非特異代数曲線とする。 C 上の invertible sheaf L が $L^2 \simeq \omega_C$ なるとき、 L は half-canonical と呼ばれる。但し、 ω_C は C 上の canonical invertible sheaf である。 C 上の half-canonical invertible sheaf の全体を $T = T(C)$ と書くことにする。このとき次が成立する。

(i) $T \neq \emptyset$

(ii) $L \in T$ に対し、 $f_L: J(C)_2 \longrightarrow T(C)$ を $x \mapsto L \otimes \mathcal{O}(x)$ で定義すると、 f_L は全単射である。特に $\text{Card } T(C) = 2^{2g}$ である。ここで、 $\mathcal{O}(x)$ は $(J(C) \ni) x$ に対応する invertible sheaf、 $J(C)_2$ は $J(C)$ の 2 分体全体のなす群。

(iii) $e: T(C) \longrightarrow \{\pm 1\}$ を

$$e(L) = \begin{cases} 1 & \text{if } h^0(C, L) \equiv 0 \pmod{2} \\ -1 & \text{if } h^0(C, L) \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

によって定義する。 $T_{\pm} = \{L \in T(C) \mid e(L) = \pm 1\}$ とおく
 と $\text{Card } T_{\pm} = 2^{g-1}(2^g \pm 1)$ である (複号同順)。 T_+ , T_- の
 元を夫々、even theta characteristic, odd theta characteristic
 と呼ぶ。

$T(C)$ の元 L_1, L_2, L_3 に対し $e(L_1, L_2, L_3) = e(L_1) \cdot e(L_2) \cdot$
 $e(L_3) \cdot e(L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes \omega_C^{-1})$ と定義し、 $e(L_1, L_2, L_3) = -1$ の時、
 $\{L_1, L_2, L_3\}$ は azygetic であるという。

§2 種数3の non-hyperelliptic 曲線の複接線

今後、 C は、種数3の完備非特異曲線、non-hyperelliptic
 であるとする。一次系 $\Gamma(C, \omega_C)$ による $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\Gamma(C, \omega_C))$
 への埋め込みの像と C とを同一視する。 $\mathbb{P}^2$ の直線 l は、 $l \cdot C$
 $= 2(P+Q)$ なる時、複接線と呼ばれる。

命題1 C の複接線全体と、 $T(C)_-$ の間には自然な全単射
 がある。対応は、証明の中で示される。

証明、 l を C の複接線とし、 $l \cdot C = 2(P+Q)$ とする。

$L = \mathcal{O}(P+Q)$ は half-canonical invertible sheaf で、 $h^0(L)$
 $= 1$ 。故に $e(L) = -1$ 、即ち $L \in T_-$ 。逆も明白。

定義 $\{L_1, L_2, \dots, L_r\} \subset T(C)_-$ は $e(L_i, L_j, L_k) = -1$
 $(i+j+k \equiv 1 \pmod{2})$ の時、即ち、どの3つも azygetic の時、
 Aronhold system と呼ばれる。複接線についても、命題1
 により、同様に定義する。

次は容易に証明される。

補助定理 2 $L_1, L_2, L_3 \in T(C)_-$ のとき次は同値である。

(i) $\{L_1, L_2, L_3\}$ は aszygetic である。

(ii) $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes \omega_C^{-1} \in T(C)_+$. (ii)' $h^0(L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes \omega_C^{-1}) = 0$.

(iii) $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$ を含む 2 次曲線が存在しない。

但し $L_i \simeq \mathcal{O}(P_i + Q_i)$ ($i=1, 2, 3$)。

§ 3 次数 2 の Del Pezzo 曲面と非特異平面 4 次曲線

$P_1, P_2, \dots, P_7$ を $\mathbb{P}^2$ の 7 個の点とする。これらは射影的に独立であると仮定する。即ち、それらのどの 3 点も 1 つの直線にのらないし、かつどの 6 点も 1 つの 2 次曲線にはのらないとする。 $\{P_1, P_2, \dots, P_7\}$ を blow up して出来た曲面を X とする。これは良く知られた様に、次数 2 の Del Pezzo 曲面である。次の図を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 X \simeq \text{Proj} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, \omega_X^{-n}) \right) & & \\
 \pi \swarrow & & \searrow \varphi \\
 \mathbb{P}^2 & & \mathbb{P}(\Gamma(X, \omega_X^{-1})) = \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

ここで、 π は自然な birational morphism、 ω_X は X の canonical invertible sheaf、 φ は一次系 $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$ に付随する morphism である。 $C(\subset \mathbb{P}^2)$ を φ の branch locus とすると C は非特異 4 次曲線である。さらし $\Gamma = (0)$ 。

で $\varphi|_{\Gamma} : \Gamma \xrightarrow{\sim} C$ となる $\sigma \in \Gamma(X, \omega_X^{-2})$ が存在する。しかも $\varphi^{-1}(C) = 2 \cdot \Gamma$ となる。 $\pi^{-1}(P_i) = E_i$ 、 P_i, P_j を通る直線の π による Proper transform を G_{ij} とおき、 $\varphi(E_i) = l_i$ 、 $\varphi(G_{ij}) = l_{ij}$ とする (cf [8])

命題 3 (i) $\{l_1, \dots, l_7, l_{12}, \dots, l_{17}\}$ は C の複接線全体である。

(ii) $\{l_1, \dots, l_7\}$ は C の複接線の Aronhold system である。言い換えれば、 L_i を l_i に対応する half-canonical invertible sheaf とするとき、 $\{L_1, \dots, L_7\}$ は C の Aronhold system である。

証明。 (i) については、 [8] を参照のこと。

(ii) を証明する。 $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(E_i) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma}$ とおく。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma} \rightarrow 0$$

なる exact sequence に $\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X$ を tensor し long exact sequence をとれば

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \underbrace{\mathcal{L}_k}_{\otimes \omega_X}) \rightarrow H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_{\Gamma}^{-1}) \\ &\rightarrow H^1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X^3) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る。 $\because$ $\mathcal{O}_X(-\Gamma) \simeq \omega_X^2$ 、 $\omega_{\Gamma} \simeq \omega_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\Gamma}$ 但し、 ω_{Γ} は Γ の canonical invertible sheaf であることに注意しておく。 さて、 $H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X) = H^1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X^3) = \{0\}$ がわかる。 従って $H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_{\Gamma}^{-1}) = 0$ を得る。

即ち $h^0(L_i \otimes L_j \otimes L_k \otimes \omega_X^{-1}) = 0$ となり、補助定理 2 により、

$\{L_i, L_j, L_k\}$ は azygetic であることがわかる。 証終。

命題 4 自然な写像 $\Gamma(X, \pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1)) \otimes \Gamma(X, \omega_X^{-1}) \rightarrow \Gamma(X, \pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1) \otimes \omega_X^{-1})$ は全射である。

証明。 Generalized lemma of Castelnuovo ([9]) により $h^1(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1) \otimes \omega_X) = h^2(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1) \otimes \omega_X^2) = 0$ を言えば良い。
 $\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1) = \mathcal{L}$ とおく。 $\mathcal{L} \otimes \omega_X$, $\mathcal{L}^{-1}$ は共に effective ではない。従って、 $h^0(\mathcal{L} \otimes \omega_X) = 0$, $(H^2(\mathcal{L} \otimes \omega_X))^V \simeq H^0(\mathcal{L}^{-1}) = \{0\}$ (Serre duality)。一方 Riemann-Roch の定理により、

$$h^0(\mathcal{L} \otimes \omega_X) = \frac{1}{2}(\mathcal{L} \otimes \omega_X) \cdot (\mathcal{L} \otimes \omega_X \otimes \omega_X^{-1}) + 1 + h^1(\mathcal{L} \otimes \omega_X) + h^2(\mathcal{L} \otimes \omega_X)$$

を得、従って、 $h^0(\mathcal{L} \otimes \omega_X) = h^1(\mathcal{L} \otimes \omega_X) = 0$ を得る。また、 $\mathcal{L}^{-1} \otimes \omega_X^{-1}$ も effective ではないことが容易にわかる。従って $H^2(\mathcal{L} \otimes \omega_X^2) \simeq (H^0(\mathcal{L}^{-1} \otimes \omega_X^{-1}))^V = \{0\}$ を得る。 証終。

次は容易であるか、又は良く知られている。

補助定理 5 $h^0(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1)) = 3$, $h^0(\omega_X^{-1}) = 3$
 $h^0(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1) \otimes \omega_X^{-1}) = 8$ 。

次に下記の可換図を考える：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1)) \otimes \Gamma(\omega_X^{-1}) & \longrightarrow & \Gamma(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(1) \otimes \omega_X^{-1}) \\ \uparrow s & & \uparrow s \quad \cap \quad \Gamma(\pi^* \mathcal{O}_{P^2}(4)) \\ \Gamma(\mathcal{O}_{P^2}(1)) \otimes V & \xrightarrow{f} & W \subset \Gamma(\mathcal{O}_{P^2}(4)) \end{array}$$

但し、 $V = \{F \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) \mid F \text{ は } P_i (1 \leq i \leq 7) \text{ を 1 位の零点として持つ}\}$ 、 $W = \{F \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)) \mid F \text{ は } P_i (1 \leq i \leq 7) \text{ を 1 位の零点として持つ}\}$ である。 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ の basis を u_1, u_2, u_3 とし、自明でない、 $\text{Ker } f$ の元 (これは、命題 4 と補助定理 5 により定数倍を除いて一意的) を

$$u_1 \otimes F_1 + u_2 \otimes F_2 + u_3 \otimes F_3$$

とおく。このとき次が成立する。

命題 6 (Frobenius [3]) F_1, F_2, F_3 は V の basis をなす。

証明。 $a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 = 0$ ($a_1 \neq 0, a_2, a_3 \in k$) とする。 - 亦 $u_1 F_1 + u_2 F_2 + u_3 F_3 = 0$ である。従って、

$$\frac{F_1}{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}} = \frac{F_2}{\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{F_3}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}} = G$$

とおくと、 G は u_1, u_2, u_3 に関する斉次 2 次式である。このとき、 $F_i \in V$ 故 G は $\{P_1, \dots, P_7\}$ のうち少なくとも 6 点を通らなければならない。これは $\{P_1, \dots, P_7\}$ が射影的に独立であることに反する。 証終。

定理 7 $l_1, l_2, \dots, l_7$ を $\mathbb{P}^2$ の 7 本の直線で、対応する、双対空間の点 $l_1^\vee, l_2^\vee, \dots, l_7^\vee$ が $(\mathbb{P}^2)^\vee$ の中で、射影的に独立であるとする。このとき、 $\{l_1, \dots, l_7\}$ を Aronhold system としてもつ、非特異 4 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ が存在する。

証明. $(\mathbb{P}^2)^\vee$ を $\{l_1^\vee, \dots, l_7^\vee\}$ に沿って 2 blow up した空間を X とかき、 $\pi: X \rightarrow (\mathbb{P}^2)^\vee$ を自然な写像とする。 u_1, u_2, u_3 を $(\mathbb{P}^2)^\vee$ の斉次座標とする。命題 6 により、 $l_1^\vee, \dots, l_7^\vee$ を 1 位の零点として、1 次独立な、 u_1, u_2, u_3 の 3 次式 F_1, F_2, F_3 が存在することがわかる。 $h: (\mathbb{P}^2)^\vee \rightarrow \mathbb{P}^2$ を $h(a) = (F_1(a): F_2(a): F_3(a))$ 、 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ を $\varphi(b) = (f_1(a): f_2(a): f_3(a))$ により、2 定義する。但し、 $f_1, f_2, f_3 \in \Gamma(X, \omega_X^{-1})$ は F_1, F_2, F_3 に対応する section である。すると次の可換図を得る:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varphi \\ (\mathbb{P}^2)^\vee & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

このとき、 $h(l_i^\vee) = \varphi(\pi^{-1}(l_i^\vee))$ は、直線 l_i のもので、 φ の branch locus を C とおけば、命題 3 により、 C が求めるものであることがわかる。 証終

$C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異 4 次曲線とし、 $\{l_1, \dots, l_7\}$ を C の複接線の Aronhold system とする。このとき、 $l_1^\vee, \dots, l_7^\vee \in (\mathbb{P}^2)^\vee$ は射影的に独立であり、 C の定義方程式は、次の様にして得られる。 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を X_1, X_2, X_3 とし、 l_1, l_2, l_3, l_4 は夫々 $X_1=0, X_2=0, X_3=0, X_1+X_2+X_3+X_4=0$ としてよい。

$${}^t(l_5, l_6, l_7) = (a_{ij})^t(X_1, X_2, X_3)$$

とあき、次の連立方程式

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

$$\frac{Y_1}{a_{11}} + \frac{Y_2}{a_{12}} + \frac{Y_3}{a_{13}} + a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = 0$$

$$\frac{Y_1}{a_{21}} + \frac{Y_2}{a_{22}} + \frac{Y_3}{a_{23}} + a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = 0$$

$$\frac{Y_1}{a_{31}} + \frac{Y_2}{a_{32}} + \frac{Y_3}{a_{33}} + a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = 0$$

を考える。この方程式の解を Y_1, Y_2, Y_3 (Y_i は X_1, X_2, X_3 の 1 次式) とした時、 C は $\sqrt{Y_1 X_1} + \sqrt{Y_2 X_2} + \sqrt{Y_3 X_3} = 0$ 、即ち
 (*) $(Y_1 X_1)^2 + (Y_2 X_2)^2 + (Y_3 X_3)^2 - 2 Y_1 Y_2 X_1 X_2 - 2 Y_2 Y_3 X_2 X_3 - 2 Y_3 Y_1 X_3 X_1 = 0$ 。
 で与えられる。(cf [1]) 上記定理 7 は、 (a_{ij}) がどのような条件の下で、(*) で与えられる 4 次曲線が非特異であるかを云っている。さらに、命題 3 を考慮に入れれば、 C の他の 21 本の複接線も $\{a_{ij}\}$ により (implicit にではあるが) 有理的に表わされることもわかる。これらの具体的表示については、[1], ch XIII を参照されたい。以上をまとめると、次の定理を得る。

定理 8

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(2)} = & \left\{ (C, \phi) \left| \begin{array}{l} C: \text{種数 3 の non-hyperelliptic な 非特異} \\ \text{完備代数曲線、} \phi: \{1, 2, \dots, 7\} \xrightarrow{\sim} A, \\ A \text{ は } C \text{ の 1 つの Aronhold system} \end{array} \right. \right\} / \cong \\ \Rightarrow & \left\{ (P_1, \dots, P_7) \left| P_i \in (\mathbb{P}^2)^7, \text{ 射影的に独立} \right. \right\} / \text{PGL}(3, k) \end{aligned}$$

A^6 の座標函数を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ とし

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{vmatrix} \quad \mu_2 = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_5 \\ \lambda_4 & \lambda_6 \end{vmatrix} \quad \mu_3 = \begin{vmatrix} \lambda_5 & \lambda_1 \\ \lambda_6 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$\mu_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mu_5 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mu_6 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mu_7 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_5 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_6 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$v_i = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 1 & \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 1 & \lambda_3 \lambda_4 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_5^2 & \lambda_6^2 & 1 & \lambda_5 \lambda_6 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq 7)$$

(i 行目を除く)

とおく。すると $\mathcal{M}^{(2)} \simeq \{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) \in A^6 \mid \lambda_i \neq 0, \lambda_i \neq \lambda_j, \mu_i \neq 0, v_i \neq 0 \}$ を得る。従って $\mathcal{M}^{(2)}$ は, affine variety である。その座標環は,

$$\mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6, \frac{1}{\mu_1}, \dots, \frac{1}{\mu_6}, \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_6}, \frac{1}{\mu_1}, \dots, \frac{1}{\mu_7}, \frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_7}]$$

で与えられる。

証明。前半は既に知, ている。後半の同型について: P_1, P_2, P_3, P_4 を夫々 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ と normalize すれば, 射影的独立性が上記の様に表わされる。

§4 modular variety $\mathcal{M}^{(2)}$ と $\mathbb{S}_3/\Gamma_3(2)$ との関係。

この節では基礎体を、複素数体 $\mathbb{C}$ にとる。 C を種数 g の完

備非特異代数曲線とする。 $\{x_1, \dots, x_{2g}\}$ を canonical homology basis、 $dw_1, \dots, dw_g$ をこれに関して正規化された第1種微分の空間の basis とする。そのとき $(\int_{x_j} dw_i) = (1_g, \tau)$ なる形になる。ここに τ は g 次の Siegel 空間 $\mathcal{S}_g$ の点である。 $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \end{pmatrix} \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}^{2g}$ ($\alpha', \alpha'' \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}^g$) に対し、

$$\theta[\alpha](\tau|z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^g} \Theta\left(\frac{1}{2}{}^t(\alpha' + p)\tau(\alpha' + p) + {}^t(\alpha' + p)(z + \alpha'')\right)$$

と定義する。但し $z \in \mathbb{C}^g$, $\Theta(*) = e^{2\pi i *}$ である。また $e(\alpha) = \Theta({}^t\alpha\alpha'')$ と定義する。 $e(\alpha) = 1$ (或 -1) となるに従って $\theta[\alpha](\tau|z)$ が z の函数として、偶 (或 奇) 函数となる。さらに $e(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = e(\alpha_1)e(\alpha_2)e(\alpha_3)e(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ と定義する。

$Sp_g(\mathbb{Z}) = \Gamma_g$ とし、 $\Gamma_g(2) = \{\sigma \in Sp_g(\mathbb{Z}) \mid \sigma - 1_{2g} \equiv 0 \pmod{2}\}$ とおく。 $Sp_g(\mathbb{Z})$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、 $\tau \mapsto \sigma \cdot \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$ は、 $\mathcal{S}_g$ の biholomorphic automorphism である。

以下、 C は non-hyperelliptic curve かつ $g=3$ とする。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}^6$ を Aronhold system 即ち、 $e(\alpha_i) = -1$, $e(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) = -1$ とする。このとき

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \theta[\alpha_i](\tau|0)}{\partial \tau_j} dw_j = \omega_i \quad (1 \leq i \leq 7)$$

とおく。すると、次を満たす、2次の positive divisor σ_i , $1 \leq i \leq 7$, が存在する: $(\omega_i)_0 = 2\sigma_i$, $e(\alpha_i) = e(\mathcal{O}(\sigma_i))$,

$e(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) = e(O(\pi_i), O(\pi_j), O(\pi_k))$. 従って, $\{O(\pi_1), \dots, O(\pi_7)\}$ は, C の half-canonical invertible sheaves の Aronhold system をなす. (cf [2], Ch I).

$$D_j \theta_i = \frac{\partial \theta[\alpha_i](\tau|z)}{\partial z_j} \Big|_{z=0}$$

と書き, $(i) = {}^t(D_1 \theta_i, D_2 \theta_i, D_3 \theta_i)$, $[i, j, k] = \det \begin{pmatrix} D_1 \theta_i & D_1 \theta_j & D_1 \theta_k \\ D_2 \theta_i & D_2 \theta_j & D_2 \theta_k \\ D_3 \theta_i & D_3 \theta_j & D_3 \theta_k \end{pmatrix}$ とおく.

$U = \{(P_1, \dots, P_7) \in (\mathbb{P}^2)^7 \mid \text{射影的に独立}\}$ の元 $(P_1, \dots, P_7)$ に対し, 次を満たす $\sigma \in \text{PGL}(3)$ が, 一意的に存在する:

$$\sigma(P_1, \dots, P_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_7 & \lambda_8 & \lambda_9 \end{pmatrix}$$

Φ_2 を $(P_1, \dots, P_7) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_6) \in A^6$ によって定義すると, $\Phi_2(U)$ は, 定理 8 で得られた, A^6 の affine 開集合である. それを $M^{(2)}$ と書く. $\mathcal{G}_3^\circ = \{\tau \in \mathcal{G}_3 \mid \mathbb{C}^3 / (1, \tau) \mathbb{Z}^6 \text{ は non-hyperelliptic curve の Jacobian variety}\}$ とし,

$\Phi_1: \mathcal{G}_3^\circ \longrightarrow U$ を $\Phi_1(\tau) = (1), (2), \dots, (7)$ で定義する.

この時, $\Phi_2(\Phi_1(\tau)) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6)$ は 次の様に与えられる:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{[5, 2, 3][1, 2, 4]}{[4, 2, 3][1, 2, 5]} & \lambda_2 &= \frac{[1, 5, 3][1, 2, 4]}{[1, 4, 3][1, 2, 5]} & \lambda_3 &= \frac{[6, 2, 3][1, 2, 4]}{[4, 2, 3][1, 2, 5]} \\ \lambda_4 &= \frac{[1, 6, 3][1, 2, 4]}{[1, 4, 3][1, 2, 6]} & \lambda_5 &= \frac{[7, 2, 3][1, 2, 4]}{[4, 2, 3][1, 2, 7]} & \lambda_6 &= \frac{[1, 7, 3][1, 2, 4]}{[1, 4, 3][1, 2, 7]} \end{aligned}$$

$\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1: \mathcal{G}_3^\circ \longrightarrow M^{(2)}$ とおくと, 次を得る.

定理 9 重は、次の様に分解し:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_3^0 & \xrightarrow{\Phi} & M^{(2)} \\ \pi \searrow & & \nearrow \tilde{\Phi} \\ & \mathbb{G}_3^0 / \Gamma_3(2) & \end{array}$$

$\tilde{\Phi}$ は同型写像である。ここで、 π は自然な全射である。

証明、まず前半部を証明する。 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_3(2)$,
 $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^6$ とする。 $\sigma \cdot m = {}^t\sigma^{-1}m + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (c^+d)_0 \\ (a^+b)_0 \end{pmatrix}$ と定義する。
 但し $(c^+d)_0, (a^+b)_0$ は対角成分を 3 次の縦ベクトルとしたもの。
 このとき、theta 函数の変換公式により

$$\begin{pmatrix} D_1 \theta[\sigma \cdot m](\sigma, \tau|0) \\ D_2 \theta[\sigma \cdot m](\sigma, \tau|0) \\ D_3 \theta[\sigma \cdot m](\sigma, \tau|0) \end{pmatrix} = \gamma \cdot (c\tau + d) \begin{pmatrix} D_1 \theta[m](\tau|0) \\ D_2 \theta[m](\tau|0) \\ D_3 \theta[m](\tau|0) \end{pmatrix}$$

を得る。但し γ は零でない定数である。一方 $\sigma \in \Gamma_3(2)$

故 $\theta[\sigma \cdot m](\sigma, \tau|z) = \theta\left(\frac{1}{4} {}^t m' (a - 1_3) m''\right) \theta[m](\sigma, \tau|z)$

をうる。従って、次をみたす、零でない定数 γ' が存在する:

$$\begin{pmatrix} D_1 \theta[m](\sigma, \tau|0) \\ D_2 \theta[m](\sigma, \tau|0) \\ D_3 \theta[m](\sigma, \tau|0) \end{pmatrix} = \gamma' \cdot (c\tau + d) \begin{pmatrix} D_1 \theta[m](\tau|0) \\ D_2 \theta[m](\tau|0) \\ D_3 \theta[m](\tau|0) \end{pmatrix}.$$

故に、 $\Phi_1(\sigma, \tau) = (c\tau + d) \Phi_2(\tau)$ 、従って、 $\Phi_2(\Phi_1(\sigma, \tau)) = \Phi_2(\Phi_1(\tau))$ がわかる。

次に後半を証明する。重が全射であることは、定理 7 によってわかる。さて、 $\Phi(\tau_1) = \Phi(\tau_2)$ ($\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{G}_3^0$) とする。 C_i を τ_i に対応する曲線とする。このとき、 C_i の canonical homology basis $\{\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_g^{(i)}\}$ で、それに関する正規化された、第 1 種

微分の空間の basis $dw_1^{(i)}, dw_2^{(i)}, dw_3^{(i)}$ に對し

$$\left(\int_{\gamma_j^{(i)}} dw_k^{(i)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq 6 \\ 1 \leq k \leq 3}} = (1_3, \tau_i) \quad (i=1, 2)$$

となるものが存在する。さて、 $\Phi(\tau_1) = \Phi(\tau_2)$ 故

$$M \begin{pmatrix} D_1 \theta_i(\tau_1) \\ D_2 \theta_i(\tau_1) \\ D_3 \theta_i(\tau_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \theta_i(\tau_2) \\ D_2 \theta_i(\tau_2) \\ D_3 \theta_i(\tau_2) \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 7)$$

なる、 $M \in \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ が存在する。 $\phi_i: C_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ を
 $P \mapsto {}^t(dw_1^{(i)}(P), dw_2^{(i)}(P), dw_3^{(i)}(P))$ によつて定義すれば、

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbb{P}^2 \\ f \downarrow & \alpha & \downarrow \\ C_2 & \xrightarrow{\phi_2} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

を可換にする、同型 $f: C_1 \rightarrow C_2$ が存在する。故に Γ_3 の
 $\bar{\alpha} \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ なる $\sigma, \tau_1 = \tau_2$ 、 $M = (c\tau_1 + d)$ なるものがある。

従つて ${}^t(D_1 \theta[\sigma \cdot \alpha_i](\tau_2), D_2 \theta[\sigma \cdot \alpha_i](\tau_2), D_3 \theta[\sigma \cdot \alpha_i](\tau_2)) =$
 $\text{non zero const} \times {}^t(D_1 \theta[\alpha_i](\tau_2), D_2 \theta[\alpha_i](\tau_2), D_3 \theta[\alpha_i](\tau_2))$ となり、

$$\sigma \cdot \alpha_i \equiv \alpha_i \pmod{1} \quad (i=1, 2, \dots, 7)$$

このことから、 $\sigma \in \Gamma_3(2)$ が ~~解~~ 解る。従つて $\tilde{\alpha}$ は全単射である。Zariski 主定理により、 $\tilde{\alpha}$ は同型写像であることがわかる。証終

$\mathcal{G}_3^\circ / \Gamma_3(2)$ は $\mathcal{G}_3 / \Gamma_3(2)$ の Zariski open subvariety 故。

$G_3/\Gamma_3(2)$ は有理多様体で、その函数体は $\mathbb{C}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ で与えられる。

参考文献

- [1] H. F. Baker, Abelian Functions, Cambridge, (1897).
- [2] J. D. Fay, Theta Functions on Riemann Surfaces, Springer Lecture Note 352 (1973).
- [3] G. Frobenius, Über die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebener Curven vierter Ordnung, Jour. für Math., 99 (1886), 275-314.
- [4] J. Igusa, Theta functions, Springer (1972).
- [5] D. Mumford, Theta characteristics of an algebraic curves, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4 (1971), 181-192.
- [6] B. Riemann, Gesam. math. Werke; Dover Edition (1953).
- [7] H. Weber, Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin (1876).
- [8] M. Demazure, Surfaces de Del Pezzo I, II, III, IV, V in Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Springer Lecture Note 777 (1980).
- [9] D. Mumford, Varieties defined by quadratic equations, Questions on alg. varieties, Corsi dal C.I.M.E., Roma, 1969.