

On the irreducible representations of the finite
classical groups with non-connected centers

奈良教育大学 浅井照明 (Teruaki Asai)

0° 序. 中心が連結である有限 reductive 群の指標の分類
に関して、愛知の如く、G. Lusztig [8] によって決定され
又連結でない場合に関して彼による短いコメントがある
[9]。しかしながら一応見やすいとは言えない。

parabolic 部分群の Levi 部分群の cuspidal 表現からの誘導表現
の自己準同形環 H に関しては、Howlett-Lehrer による一般的
記述 [6] があり、それによれば、 H にはある Coxeter 群に
付随するヘッケ環 (Bourbaki [4] の意味) と部分環として
含み、それを有限群で拡大したものであって (群の拡大と
類似の方法で) 2-cocycle を介在させて、定式化される。

この稿では、Dynkin 図式が連結で且つ B, C, D の時 (3D_4
は一応除く)、その具体的記述が、ほぼ、群の中心が連結で
ある場合に帰着させられることを示す。特に上記 2-cocycle
が自明なものとなることがわかる。(注意、群の中心が連結で
ある時は、subcusp. rep の比が $\neq 1$ であることから、
2-cocycle が自明なものとなるのは直接的。) 以外な事に、
論点は実は双対群における半単純な元の中心化群の連結成
分の成す群が位数 1 or 2 であることに集約されることが判明

する。

猶、この稿は本来筆者が得た中心が連結の場合の結果[]
と中心が連結でない場合に拡張することとを目的としていたが、
紙面の都合上 Hecke-岩堀代数に限ることにしたい。

1° 双対群の半単純元の中心化群の連結成分の成す群。

以下 G は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 群とする。

その中心 $Z(G)$ は必ずしも連結でないとする。Deligne-Lusztig
[5] によれば、次の様な $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 群 $\tilde{G}$
で、その中心が連結であるものが存在する：

$$G \hookrightarrow \tilde{G}, \quad DG = D\tilde{G} \quad (D: \text{derived gr.})$$

さて埋め込み $\iota: G \hookrightarrow \tilde{G}$ はその双対群の全射と誘導し：

$$\iota^*: \tilde{G}^* \rightarrow G^* \quad (F = \text{Frobenius 写像})$$

且つ、その核 $\ker \iota$ は連結なトーラスと成る。今 G^* の F -
固定な半単純元 λ を与えよう。その時 $\tilde{G}^*$ の F -固定な半単純
元 $\tilde{\lambda}$ が定まり

$$\lambda = \iota^*(\tilde{\lambda})$$

となる。便宜上 λ を含む G^* の F -固定な極大トーラス T^* を
1 つ定め、 $\tilde{T}^* = \iota^{*-1}(T^*)$ と置く。今 $W \in T^*$ に関して G^* の
Weyl 群とすれば、それは $\tilde{T}^*$ に関して $\tilde{G}^*$ の Weyl 群と自然
に同一視される。

そこで W の部分群 $W_0, W_{\tilde{0}}$ を次の様に定めよう。

$$W_0 = \{ w \in W ; w \rho w^{-1} = \rho \}$$

$$W_{\tilde{0}} = \{ w \in W ; w \tilde{\rho} w^{-1} = \tilde{\rho} \}$$

今、 $\tilde{G}$ の中心が連結であることから、 DG^* が単連結となり、従って $\tilde{\rho}$ の中心化群 $Z_{G^*}(\tilde{\rho})$ は連結となり、 $W_{\tilde{0}}$ は T^* に関して $Z_{G^*}(\tilde{\rho})$ の Weyl 群となる。又同時に T^* に関して $Z_{G^*}(\rho)$ ($=Z_{G^*}(\omega)$ の単位元成分) の Weyl 群でもある。更に

$$Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\rho) \cong W_0/W_{\tilde{0}}$$

が成立する。(この箇所は Springer-Steinberg [10] より示すことが出来る) そこで $w \in W_0$ に対して、その代表元 $\tilde{w} \in N_{G^*}(T^*)$ をえらべば、自然な写像

$$w \in W_0 \mapsto \tilde{w} \tilde{\rho} \tilde{w}^{-1} \tilde{\rho} \in \text{Ker } \nu^*$$

が定まるが、これは $W_{\tilde{0}}$ を核とする準同形である。従って

$$Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\rho) \cong \{ \tilde{\rho} \in \text{Ker } \nu^* ; \tilde{\rho} \sim_w \tilde{\rho} \}$$

が成立する。ここで $\sim_w$ は W -共役を意味する。

さて $\tilde{G}$ の F -固定な parabolic 部分群 $\tilde{P}$ を 1 つ定め、その F -固定な Levi 部分群 $\tilde{L}$ を定め、

$$L = \tilde{L} \cap G, \quad P = \tilde{P} \cap G$$

と置く。 L 及び $\tilde{L}$ の双対群を $L^*, \tilde{L}^*$ とすれば、 $L^* \hookrightarrow G^*, \tilde{L}^* \hookrightarrow \tilde{G}^*$ と見なせ、且つ $\nu^*(\tilde{L}^*) = L^*$ と思て差し支えない。そこで、 $L^* \supset T^*$ とし、 W_L を T^* に関して L^* の Weyl 群と

しよう。その時

$$Z_{L^*}(w)/Z_{L^*}^0(w) \cong \{z \in \ker \psi^* ; \tilde{\alpha} \sim_{w_L} \tilde{\alpha} z\}$$

が先の議論より成立し、次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc} Z_{L^*}(w)/Z_{L^*}^0(w) & \cong & \{z \in \ker \psi^* ; \tilde{\alpha} \sim_{w_L} \tilde{\alpha} z\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{G^*}(w)/Z_{G^*}^0(w) & \cong & \{z \in \ker \psi^* ; \tilde{\alpha} \sim_w \tilde{\alpha} z\} \end{array}$$

右側の縦の写像は、*injection* であり、従って

lemma 1. 自然な写像 $Z_{L^*}(w)/Z_{L^*}^0(w) \rightarrow Z_{G^*}(w)/Z_{G^*}^0(w)$ は *injection* である。

2° 中心が連結の群に帰着される自己準同形環

Lusztig [7] に従い $\mathcal{E}(L^F, \{\tilde{\alpha}\})$ を $\tilde{\alpha}$ に付随する L^F の既約表現の類として、 $\mathcal{E}(L^F, \{\tilde{\alpha}\})$ に属する L^F の既約表現の *geometric conjugacy class* は $\{\tilde{\alpha}\}$ であるということにしよう。

$\mathcal{E}(L^F, \{\tilde{\alpha}\})$ の *cuspidal* 表現を与えると、 $\psi(\tilde{\alpha}) \sim_{L^*} 0$ となる $\tilde{\alpha} \in L_{s,s}^{*F}$ がえらび、 $\mathcal{E}(L^F, \{\tilde{\alpha}\})$ の *cuspidal* 表現の $L^F \cap$ の制限の中に含まれる。そこで代表え $\alpha, \tilde{\alpha}$ と取り換えて、1° の状況になっている (i.e. $\psi(\tilde{\alpha}) = 0$) としてよい。当初の目的は B, C, D の系列を問題とする為 差し支えない限り以下の仮定をする (条件 (C1)–(C4)):

(C1) $\mathcal{E}(\mathbb{L}^F, \{\tilde{\rho}\})$ には唯一つの cuspidal 表現 $\tilde{\rho}$ が存在する。

(C2) 自然な埋め込み $\mathbb{Z}_{L^+}(\omega)/\mathbb{Z}_{L^+}^0(\omega) \rightarrow \mathbb{Z}_{G^+}(\omega)/\mathbb{Z}_{G^+}^0(\omega)$ は同形である (lemma 参照)。

(C3) (C1) の $\tilde{\rho}$ に関して、 $\tilde{\rho}$ を含む任意の F -stable parabolic Q に対し、又 $\text{Ind}_{\tilde{\rho}^F}^{\tilde{\rho}^F} \tilde{\rho}$ に実現される任意の Q^F の既約表現 $\tilde{\mu}$ に対し、 $\tilde{\mu} / (\tilde{\rho} \cap G)^F$ は multiplicity free である。

(C3) は 次の条件が満たされるが良い (Remark 6 でもう少し良い条件を与える)。

(C3)' $\mathbb{L}^F/\mathbb{L}^F (\cong \tilde{G}^F/G^F)$ は Coxeter 群である。

さて

$$W = \{w \in N_G(\mathbb{L})^F/\mathbb{L}^F ; \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \cdot \text{ad } w\}$$

と置く。ad は adjoint 作用である。その時 $\tilde{G}$ の中心が連結であることから、 W は自然に Coxeter 群と成る。

煩雑さを避ける為、次を仮定する。

(C4) W の既約成分には E_7 or E_8 の Coxeter 群はない。

以下、中心が連結の時の $(\tilde{G}^F)$ 自己準同形環の記述が既にされていることを前提に置く。 $\tilde{\rho}$ を (C1) のものとする時、

$$(*) \quad \text{Ind}_{\tilde{\rho}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho}$$

の $\tilde{G}^F$ -自己準同形環は W に関する Hecke-岩堀代数の形で記述され、その既約成分は W の既約指標で、

parameterize する:

$$\chi \in \mathcal{W}^\wedge \longleftrightarrow \tilde{\rho}_\chi \in \text{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho}$$

従って $m_\chi = \dim \chi$ とする。

$$\text{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho} \cong \sum_\chi m_\chi \tilde{\rho}_\chi \quad (\tilde{G}^F\text{-加群として})$$

が成立する。今 $\text{Ker}\{\iota^*: \tilde{G}^* \rightarrow G^*\} = \text{Ker}\{\iota^*: \mathbb{Z}^* \rightarrow L^*\}$

であり、これを単に $\text{Ker}\iota^*$ と書いておきたい。そこで

$$\mathcal{P} = \{\alpha \in (\text{Ker}\iota^*)^F; \alpha \sim_{\mathcal{W}_L} \alpha\} (= \{\alpha \in (\text{Ker}\iota^*)^F; \alpha \sim_{\mathcal{W}} \alpha\})$$

と置く。(但し 2 番目の等号成立は、(C2) による。参照。)

lemma 2 (i) $A = \{\theta \in (\mathbb{Z}^F/L^F)^\wedge; \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \otimes \theta\}$ と置ける。

$$A \cong \mathcal{P}$$

(ii) $\mathbb{Z}^F/L^F = \tilde{G}^F/G^F$ により、 A は $(\tilde{G}^F/G^F)^\wedge$ の部分群と見做す。

その時、

$$(iia) \quad \forall \theta \in A, \forall \chi \in \mathcal{W}^\wedge \text{ に対して } \tilde{\rho}_\chi \otimes \theta \cong \tilde{\rho}_\chi$$

$$(iib) \quad \forall \chi_1 \neq \chi_2 \in \mathcal{W}^\wedge, \forall \theta \in A \text{ に対して } \tilde{\rho}_{\chi_1} \otimes \theta \neq \tilde{\rho}_{\chi_2}$$

証明 条件 (C4) より、Benson-Curtis [3] が使用可であり、

通常の帰納法で事は足りる。

Q.E.D.

(C3) 及び lemma 2 より、 $\tilde{\rho}$ 及び $\{\tilde{\rho}_\chi; \chi \in \mathcal{W}^\wedge\}$ は L^F 及び G^F に制限すると

$$\tilde{\rho}|_{L^F} = \rho^{(1)} \oplus \dots \oplus \rho^{(r)} \quad (\text{既約分解})$$

$$\tilde{\rho}_\chi|_{G^F} = \rho_\chi^{(1)} \oplus \dots \oplus \rho_\chi^{(r)} \quad (\quad " \quad)$$

と書ける。但し $r = |A|$ である。

lemma 3 $N_G(L)^F/L^F \cong N_G(\tilde{L})^F/\tilde{L}^F$ により, $\underline{W}$
 $(\subset N_G(\tilde{L})^F/\tilde{L}^F) \leq N_G(L)^F/L^F$ の部分群と思う。その時、
 $\forall w \in \underline{W}$ に対して、 $\rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \cdot \text{ad } w$ ($1 \leq i \leq r$)。

証明 $\tilde{L}^F$ は adjoint γ $\{\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(r)}\}$ に推移的に作用
 する。各 $1 \leq i \leq r$ に対して、

$$\underline{W}^{(i)} = \{w \in \underline{W} ; \rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \cdot \text{ad } w\}$$

と置けば、 $\underline{W}$ と $\tilde{L}^F$ の $\{\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(r)}\}$ における作用が、
 可換となることから、 $\underline{W}^{(i)}$ が i に依存しないことがわかる。
 そこで、

$$\underline{W}^* = \underline{W}^{(1)}$$

と置く。その時 $\{\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(r)}\}$ の中から適当に $\{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(s)}\}$
 を選べば、

$$\{\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(r)}\} = \{\mu^{(i)} \cdot \text{ad } w \mid 1 \leq i \leq s, w \in \underline{W}/\underline{W}^*\}$$

と書ける。今、 $\text{Ind}_{pF}^{GF} \mu^{(i)} = \text{Ind}_{pF}^{GF} \mu^{(i)} \cdot \text{ad } w$ に
 注意すれば、 $\text{Ind}_{pF}^{GF} \tilde{\rho} = \bigoplus_{x \in \underline{W}^*} m_x \tilde{\rho}_x$ により、

$$(*) \quad \text{Ind}_{pF}^{GF} (\mu^{(1)} \oplus \dots \oplus \mu^{(s)}) = |\underline{W}/\underline{W}^*| \bigoplus_{x \in \underline{W}} m_x (\rho_x^{(1)} \oplus \dots \oplus \rho_x^{(r)})$$

そこで、 $\underline{W} \neq \underline{W}^*$ とすれば、(*) の右辺は $\mathbb{Z}$ -係数でなくなる。

(① lemma 2, $\chi = 1 \Rightarrow m_x = 1$)。従って $\underline{W} = \underline{W}^*$ と

なすのは矛盾である。

Q.E.D.

Prop. 4 $1 \leq i \leq r$ に対して、

$$\underline{W} = \{w \in N_G(L)^F/L^F ; \rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \cdot \text{ad } w\}$$

証明 $w \in N_G(L)^F/L^F$ に対して, $\rho^{(i)} \cong (\text{ad } w)^* \rho^{(i)} (\overline{\omega}$
 $\rho^{(i)} \cdot \text{ad } w)$ とすれば, $(\text{ad } w)^* \tilde{\rho}/L^F$ と $\tilde{\rho}/L^F$ は共に, $\rho^{(i)}$
 と既約成分が一致. 従って $\tau \in (\mathbb{Z}^F/L^F)^\wedge$ が存在して,

$$(\text{ad } w)^* \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \otimes \tau \quad (\mathbb{Z}^F\text{-mod 群として})$$

が成立し $(\text{ad } w)^* \tilde{\rho}$ と $\tilde{\rho} \otimes \tau$ の geo. conj. class が同じ.

そこで $\tau \in (\mathbb{Z}^F/L^F)^\wedge \iff \exists \in (\text{Ker } i^*)^F$ とすれば, $w^* \tilde{\rho} w$
 と $\tilde{\rho}$ が $\mathbb{Z}^*$ で共役であり, W_L -共役となり, $\exists \in P$ と
 なす (lemma 2. (i)). したがって, $w \in \underline{W}$ である.

lemma 3 と併せて, Prop を得る.

Q.E.D.

$$\tilde{Z} = \text{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho}, \quad Z^{(i)} = \text{Ind}_{P^F}^{G^F} \rho^{(i)} \quad (1 \leq i \leq r)$$

と置けば, $\tilde{Z}/G^F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} Z^{(i)}$ である.

Theorem 5 $1 \leq i \leq r$, 及び $\forall T \in \text{End}_{G^F} \tilde{Z}$ に対して,
 $T(Z^{(i)}) = Z^{(i)}$ であり.

$$\text{End}_{G^F} \tilde{Z} \rightarrow \text{End}_{G^F} Z^{(i)} \quad (T \mapsto T|_{Z^{(i)}})$$

が $\mathbb{C}$ 上の多元環としての同型を与えよ.

証明 $\text{End}_{G^F} Z^{(i)}$ は $\{w \in N_G(L)^F/L^F \mid \rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \cdot \text{ad } w\}$
 を添字とした基底を持つことは, 良く知られたことであり,
 Prop より, $\text{End}_{G^F} Z^{(i)}$ のベクトル空間としての次元は

わかったことになる。あとは、その間の関係式を見出せば、
 良いのであるが、 G^F -自己準同形の自然な構成から
 $\forall T \in \text{End}_{G^F} \tilde{Z}$ に対し、 $T(Z^{(i)}) = Z^{(i)}$ が確保され、所期の
 定理を得る。 Q.E.D.

Remark 6. 上記の定理は (C1)-(C4) を仮定してゐるが、
 その中で条件 (C3) について述べる。 $\tilde{Q}$ と $\tilde{G}^F$ の F -固定な
 任意の parabolic 部分群で $\tilde{P}$ を含み、 $\tilde{M}$ とその Levi 部分群で
 $\tilde{Z}$ を含むものとする。 $\tilde{Q} \cap G = Q$, $\tilde{M} \cap G = M$ とする。

(I) $|Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega)| \leq 3$ であれば、(C3) は成立する。

実際 $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{E}(\tilde{M}^F, \{\tilde{\omega}\})$ に対して、 $\tilde{M}^F/M^F$ が Abelian 群で
 あることから、適当な自然数 m があり、

$$\tilde{\mu}|_{M^F} = m(\mu_1 + \cdots + \mu_r)$$

と書ける。但し $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ は互いに同値でない。そこで

$$\langle \tilde{\mu}|_{M^F}, \tilde{\mu}|_{M^F} \rangle = m^2 r \text{ となる。} \quad \text{と } 3 \text{ が}$$

$$\langle \tilde{\mu}|_{M^F}, \tilde{\mu}|_{M^F} \rangle = \langle \tilde{\mu}, \text{Ind}_{M^F}^{\tilde{M}^F}(\tilde{\mu}|_{M^F}) \rangle$$

$$= \langle \tilde{\mu}, \sum_{\theta \in (\tilde{M}^F/M^F)^\vee} \tilde{\mu} \otimes \theta \rangle \leq 3$$

最後の不等号は $|Z_{M^*}(\omega)/Z_{M^*}^0(\omega)| \leq |Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega)| \leq 3$ による。

(lemma 1 参照)。従って $m^2 r \leq 3$ であり、これから

$m=1$ となつてゐる。即ち $\tilde{\mu}|_{M^F}$ は multiplicity
 free である。 $(|Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega)|=1$ のときは、 $\tilde{\mu}|_{M^F}$ は既約)。

(II) (I) の条件について更に見てみよう. G_{ad}^* と G^* の adjoint 群とし, $\pi: G^* \rightarrow G_{ad}^* = \pi(G^*)$ と自然な写像とする. 更に G_{ad}^* の単連結 Covering $\pi_1: G_{sp}^* \rightarrow G_{ad}^*$ と考える. すると,

$$Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\rho) \hookrightarrow Z_{\pi(G^*)}(\pi(\omega))/Z_{\pi(G^*)}^0(\pi(\rho)) \hookrightarrow \text{Ker } \pi_1$$

が得られる. G^* (の閉体上の Dynkin 図形) が B_n, C_n, D_n の時は, 3° で述べる様に $Z_{\pi(G^*)}(\pi(\omega))/Z_{\pi(G^*)}^0(\pi(\rho)) = \{1\}$ であり (I) の状況になり (C3) が成立. 又 G^* が E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 の時は, $\text{Ker } \pi_1 = \{1\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であり (C3) が成立することになる. 群 G が A_n の時は (C3) 以前に (C2) に的を定める場合が少く省略する.

3° Endomorphism algebra の記述. 3° では G の Dynkin 図形は B_n, C_n, D_n のいずれかとし, 又 D_4 は除外する.

更に $\text{char } \mathbb{H}_g \neq 2$ とする. G^* の半単純元を見る為に, G^* からその adjoint 群 G_{ad}^* への自然な写像

$$\pi: G^* \rightarrow G_{ad}^* = \pi(G^*)$$

を考える. G^* が B_n, C_n, D_n の場合に対応して, $G_1^* = \text{CSp}_{2n}, \text{SO}_{2n+1}, \text{CO}_{2n}^{\pm, 0}$ と見て, 自然な写像

$$\pi_1: G_1^* \rightarrow G_{ad}^*$$

を考える. 半単純元の 中心化群の 連結成分の群を G_{ad}^* or G_1^* で見る

ことにしよう。

ρ, L を $\mathfrak{L}^0$ のように選ぶ。 $L^* = \pi_1^{-1}(\pi(L^*))$ とする。

すると L^* の F -固定な半単純元 ρ_1 で

$$\pi_1(\rho_1) = \pi(\rho)$$

となるものがある。

Lemma 7 次の図式が可換。

$$\begin{array}{ccc} Z_{L^*}(\rho)/Z_{L^*}^0(\rho) & \hookrightarrow & Z_{\pi(L^*)}(\pi(\rho))/Z_{\pi(L^*)}^0(\pi(\rho)) \simeq Z_{L^*}(\rho_1)/Z_{L^*}^0(\rho_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{G^*}(\rho)/Z_{G^*}^0(\rho) & \hookrightarrow & Z_{\pi(G^*)}(\pi(\rho))/Z_{\pi(G^*)}^0(\pi(\rho)) \simeq Z_{G^*}(\rho_1)/Z_{G^*}^0(\rho_1) \end{array}$$

しかも、 $Z_{L^*}(\rho_1)/Z_{L^*}^0(\rho_1) \rightarrow Z_{G^*}(\rho_1)/Z_{G^*}^0(\rho_1)$ が同型であれば、 $Z_{L^*}(\rho)/Z_{L^*}^0(\rho) \rightarrow Z_{G^*}(\rho)/Z_{G^*}^0(\rho)$ も同型である。

証明 連結成分の代表元とある F -固定な極大トーラスの Weyl 群の中に選べば自明である。 Q.E.D

$Z_{G^*}(\rho_1)/Z_{G^*}^0(\rho_1) = \{1\}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから、次のいずれかが可能である。

$$(i) \quad Z_{L^*}(\rho)/Z_{L^*}^0(\rho) = Z_{G^*}(\rho)/Z_{G^*}^0(\rho) = \{1\}$$

$$(ii) \quad Z_{L^*}(\rho)/Z_{L^*}^0(\rho) = Z_{G^*}(\rho)/Z_{G^*}^0(\rho) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$(iii) \quad Z_{L^*}(\rho)/Z_{L^*}^0(\rho) = \{1\}, \quad Z_{G^*}(\rho)/Z_{G^*}^0(\rho) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

もしも、 G が B_n であれば ($G^* = Sp_{2n}$) 常に (i) であり、問題がない。

$\tilde{\rho}$ を $\mathcal{E}(\mathbb{L}^F, \{\tilde{\alpha}\})$ の Cuspidal 表現とする。Lusztig ([7], [8]) により、 $\tilde{\rho}$ は $\mathcal{E}(\mathbb{L}^F, \{\tilde{\alpha}\})$ の中の唯一つの Cuspidal 表現である。上の (i), (ii) の場合 $\cong$ の (C1)-(C4) が満たされ (Remark 6 参照)、Theorem 5 によって、 $\tilde{\rho}|_{\mathbb{L}^F}$ の任意の既約成分 ρ に対して、 $\text{End}_{G^F}(\text{Ind}_{P^F}^{G^F} \rho) \simeq \text{End}_{\tilde{G}^F}(\text{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho})$ となり問題がない。そこで残りの (iii) の場合について考えよう。簡単のため $\{\alpha\}$ は孤立型であるとする。従って、

$G_1^* = SO_{2n+1}$ の時、 ρ_1 の固有値は 1 or -1 であり、 $G_1^* = CO_{2n}^{\pm 0}$ の時、 ρ_1 の固有値は 1 or -1 もしくは、 ρ_1 の最小多項式は $x^2 - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{F}_8^* \setminus \mathbb{F}_4^*$) である。(ρ_1 の最小多項式が $x^2 - \lambda$ の時は、閉体上では固有値が 1 or -1 の元と modulo center で共役がある)。いずれの場合も取り扱いは全く同じ為 $G_1^* = SO_{2n+1}$ の時を例として以下述べることにしよう。

さて ρ_1 の固有値 -1 の固有空間の次元を $2n_1$ とし、固有値 1 の固有空間の次元を $2n_2+1$ とする ($n = n_1 + n_2$)。その時、

$$Z_{G_1^*}^0(\omega_1) = SO_{2n_1}^{\varepsilon} \times SO_{2n_2+1} \quad (\varepsilon = + \text{ or } -)$$

である。さて L_1^* は次の様に分解する。

$$L_1^* = A \times SO_{2n'+1}$$

但し A は $\mathbb{F}_8$ 上分解する $\mathfrak{sl}$ -ラスである。 $\rho_1 \in L_1^*$ は次の様に書ける。

$$\rho_1 = (a, \rho_1') \quad a \in A, \quad \rho_1' \in SO_{2n'+1}$$

ρ_1' も ρ_1 と同じく孤立表現類を定め、 ρ_1' の固有値 -1 の固有空間の次元を $2n_1'$ とし、固有値 1 の固有空間の次元を $2n_2'+1$ とする ($n_1' = n_1' + n_2'$)。仮に $n_1' > 0$ とすれば

$$Z_{L^*}(\omega)/Z_{L^*}^0(\omega) = Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega) (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

従って Lemma 7 より、 $Z_{L^*}(\omega)/Z_{L^*}^0(\omega) = Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega) (= \{1\}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ であり、Theorem 5 より、群の中心が連結の場合に帰着される問題がない。従って $n_1' = 0$ としてよい。この時、 $Z_{L^*}(\omega)/Z_{L^*}^0(\omega) = \{1\}$ 、 $Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、従って、

$$Z_{L^*}(\omega)/Z_{L^*}^0(\omega) = \{1\}, \quad Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega) = \{1\} \text{ or } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

そこで、 $Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega) = \{1\}$ とすると、やはり群の中心が連結である場合に帰着される。従って、問題となるのは次の場合である。

$$n_1' = 0, \quad Z_{L^*}(\omega)/Z_{L^*}^0(\omega) = \{1\}, \quad Z_{G^*}(\omega)/Z_{G^*}^0(\omega) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

この時 $\tilde{\rho}/L^F$ は既約である。そこで

$$P = \tilde{\rho}/L^F$$

と置き、 $\text{End}_{G^F}(\text{Ind}_{P^F}^{G^F} P)$ を考察しよう。 (L^*, ρ) を G^{*F} -表現であまかえて、 ρ_1 の次の形をしているとしてよい。

$$\rho_1 = (a, \rho_1') \in L^* = A \times SO_{2n'+1}$$

$$a = (\underbrace{-1, \dots, -1}_{n_1'}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_2 - n_1'}) \quad , \quad \rho_1' = \text{identity}$$

ル-ト系の正系を定める為 $\tilde{G}$ の F -固定な Borel 部分群 $\tilde{B}$
 $(\subset \tilde{P})$ 及びその F -固定な極大トーラス $\tilde{T} (\subset \tilde{L})$ をえる。

$T = \tilde{T} \cap G$ とし、 T^* はその L^* における双対トーラスとする。

そして

$$T_1^* = \pi_1^{-1}(\pi(T^*))$$

と置く。 $T_1^* \ni \rho_1$ であるから、 $T^* \ni \rho$ である。 $W \ni T^*$ に
 関しての G^* の Weyl 群とし、 T_1^* に関しての G_1^* の Weyl 群と
 同一視する。従って W は $\{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$ の符号付き置
 換群 W_n (cf. Lusztig []) と同一視される。 W の simple
 reflection は $\{(1, 2), \dots, (n-1, n), \rho_n\}$ となる。但し (i, j) は
 互換、 ρ_n は n 番目の符号変換である。 $W_0, W_{\tilde{G}}$ を $\underline{1}^\circ$ と
 同じ様に定め、

$$W_{\pi(\rho)} = \{w \in W; w\pi(\rho)w^{-1} = \pi(\rho) \in \pi(T^*)\}$$

とする。すると、

$$W_{\rho} \subset W_0 \subset W_{\pi(\rho)}$$

である。 $W_{\tilde{G}}$ が $Z_{G^*}(\rho)$ の Weyl 群であることから、又 $Z_{G_1^*}(\rho_1)$
 の Weyl 群と思え、このことから

$$W_{\tilde{G}} = \tilde{W}_{n_1} \times W_{n_2} \hookrightarrow W = W_n$$

がわかる。一方

$$W_{\pi(\rho)} = W_{n_1} \times W_{n_2} \hookrightarrow W = W_n$$

であることが、 ρ_1 の具体的な形からわかる ($\pi(\rho) = \pi_1(\rho_1)$ に注意)。

今、 $\mathbb{Z}_{G^*}(\omega)/\mathbb{Z}_{G^*}(\omega) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから、 W_ω は W_0 の指数 2 の部分群であり、 $|W_\pi(\omega)/W_\omega| = 2$ に注意すれば、

$$W_0 = W_\pi(\omega)$$

を得る。従って、

$$W_0 = W_{n_1} \times W_{n_2}$$

である。さて

$$\underline{W} = \{w \in N_G(\tilde{L})^F / \tilde{L}^F ; \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \cdot \text{ad } w\}$$

$$\underline{W}' = \{w \in N_G(L)^F / L^F ; \rho \cong \rho \cdot \text{ad } w\}$$

とする。 $\tilde{\rho}$ 及び ρ が $\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{\rho}\})$ 及び $\mathcal{E}(L^F, \{\rho\})$ の唯一の cuspidal 表現であることから

$$\underline{W} = \{w \in W_\omega ; w \Phi_L^+ = \Phi_L^+\}, \quad \underline{W}' = \{w \in W_0 ; w \Phi_L^+ = \Phi_L^+\}$$

と書ける。但し Φ_L^+ は L のルート系の正系である。群 G_1^* で考えれば、

$$\underline{W} = \tilde{W}_{n_1} \times W_{n_2} \quad \hookrightarrow \quad \underline{W}' = W_{n_1} \times W_{n_2}$$

であることがわかる。一般に $\underline{W}$ には $(\mathbb{Z}(G))$ が連結であることから) 自然に Coxeter 群としての構造が入るが、上の場合、 $\underline{W}'$ は $\underline{W}$ の鏡映部分群であることがわかり、たまたま Coxeter 群としての構造が入る。その simple reflection は

$$\{(i, i+1) ; 1 \leq i \leq n_1-1, \text{ or } n_1+1 \leq i \leq n_1+n_2-1\}$$

$$\cup \{\rho_{n_1}, \rho_{n_1+n_2}\}$$

である (但し ρ_k は k 番目の符号変換とする)。

$l_{W'}$ を W' の length function とする。

Theorem 8. (G : type C_n , ρ : isolated, $Z_{L^*}(\rho)/Z_{L^*}^0(\rho) = \{1\}$, $Z_{G^*}(\rho)/Z_{G^*}^0(\rho) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 仮定は上記のものとする。

K' と W' の $N_G(L)^F$ における逆像とする。その時 cuspidal 表現 ρ は K' の既約表現 μ に拡張される。表現空間を V とする。 $w \in W'$ に対して、 $a_w \in \text{End}_{G^F}(\text{Ind}_{P^F}^{G^F} \rho)$ と次の様に定める。

$$a_w v = \sum_{u \in U_w^F} u w^{-1} \mu(w) v \quad v \in V$$

その時、 $\text{End}_{G^F}(\text{Ind}_{P^F}^{G^F} \rho)$ は $\{a_w; w \in W'\}$ と $\mathbb{C}$ -基底にもち、次の関係式で記述される。

$$(i) \quad w_1, w_2 \in W', \quad l_{W'}(w_1, w_2) = l_{W'}(w_1) + l_{W'}(w_2)$$

$$\Rightarrow a_{w_1 w_2} = a_{w_1} a_{w_2}$$

(ii) $\rho \in W'$ が simple reflection の時、

$$(iia) \quad \rho = (\lambda, \lambda+1) \text{ の時 } \quad a_\rho^2 = 8 \pm (8-1)a_\rho$$

$$(iib) \quad \rho = \rho_m \text{ の時 } \quad (a_\rho / q^{n_2 - n_1})^2 = q^{2n_3}$$

(但し $2n_3$ は $\rho_{m_1+n_1}$ の W における長さ)

$$(iic) \quad \rho = \rho_{n_1+n_2} \text{ の時 } \quad (a_\rho / q^{x^2}) = q^{2x+1} (\pm (q^{2x+1} - 1)) (a_\rho / q^{x^2})$$

(但し $x \geq 0 \in \mathbb{Z}$ は $n_2 = x(x+1)$ とみたす。)

証明 ρ が K' に拡張できるかどうか、どうかは、最初の時点、

では、わからない為、 $\mu: K' \rightarrow \text{End } V$ と

$$\left. \begin{aligned} \mu(a) \rho(x) \mu(a)^{-1} &= \rho(axa^{-1}) \\ \mu(ax) &= \mu(a) \rho(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &\in K', x \in L^F \\ \end{aligned}$$

を満たす様にえらう。 a_w と定理の中における様に定義する。
すると

$$\text{End}_{GF}(\text{Ind}_{PF}^{GF} \rho) \supseteq \text{End}_{GF}(\text{Ind}_{PF}^{GF} \tilde{\rho})$$

によって、(i'a), (i'c) は O_K であり、又類似のギロニより、
(i'b) も O_K であることがわかる (Howlett-Lehrer 参照のこと)。
問題は (i) ？ w_1, w_2 が両方とも W の元でない時がある。
 $\sigma_1, \sigma_2 \in W'$ の simple reflection とし、 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ とする。
 r は $\sigma_1 \sigma_2$ の位数とする。その時

$$(*) \quad \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \cdots}_{r-1 \square} = \underbrace{\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \cdots}_{r-1 \square}$$

であり、

$$\underbrace{a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} \cdots}_{r-1 \square} = \eta \underbrace{a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} \cdots}_{r-1 \square}$$

が成立する。 η は μ に適当にえらべば、 ± 1 であり、示すねはならないのは $\eta = 1$ である。仮に $\eta = -1$ とする。

$r=3$ のときは a_{σ_1} のかわりに $-a_{\sigma_1}$ とえらべば、 (μ を取り換えれば) $\eta = 1$ となる。 $r=4$ とする。

$\sigma_1 \neq \sigma_m$ と思てよい。その時

$$a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} = -a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1}$$

よって

$$\begin{aligned} (a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}) a_{\sigma_1} &= a_{\sigma_1} (a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1}) \\ &= a_{\sigma_1} (-a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}) \end{aligned}$$

従って

$$(a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}) a_{\sigma_1} (a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2})^{-1} = -a_{\sigma_1}$$

これにより、 a_{σ_1} と $-a_{\sigma_1}$ の最小多項式が等しくなければならぬが、 $\sigma_1 \neq \rho_n$ であるから (ii'a) ~ (ii'c) に矛盾する。

よって $\eta = 1$ 。同様の議論が $r=2$ の場合にも適用される。

Q.E.D.

References

- [1] T. Asai ; On the twisting operators on the finite classical groups , in Algebraic and topological theories , Kinokuniya , Tokyo , 1986 , 239-282
- [2] T. Asai ; Twisting operators on the space of class functions of finite special linear groups , preprint.
- [3] C.T. Benson - C.W. Curtis ; On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups , Trans. Amer. Math Soc 165 (1972), 251-293 & 202 (1975) ,

405-406.

- [4] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Ch 4, 5 et 6, Paris, Herman 1968.
- [5] P. Deligne - G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math (2) 103 (1976), 103-161
- [6] R. B. Howlett - G. I. Lehrer, Induced cuspidal representations and generalized Hecke algebra, Inv. Math 38 (1980), 37-64
- [7] G. Lusztig, Irreducible representations of finite classical groups, Inv. Math 43 (1977), 125-175
- [8] ———, Characters of reductive groups over a finite field, Ann. Math. Study 107, Princeton 1984
- [9] ———, Characters of reductive groups over finite fields, Proceedings of ICM, 877-879, 1983 Warszawa
- [10] T. A. Springer - R. Steinberg, Conjugacy classes, in Springer Lecture Note 131