

ファイバー曲面の局所符号数とその応用, I

(Local signature of fibered surfaces and its applications, I)

足利 正 (Tadashi Ashikaga) *

(本論を始める前に) 臼井三平教授のご還暦を記念し、久しぶりに研究集会「Hodge 理論と代数幾何学」が企画され、まずもってオーガナイズの労をとられた朝倉政典氏、池田京司氏、加藤和也氏に感謝申し上げたい。

還暦を迎えられた臼井教授には、私自身ひとかたならぬお世話になっており、思い出は尽きない。氏がまだ高知大学におられた '80 年代からセミナーに何度も押しかけお教えを受けた頃、大阪大学に移られ本格的に「Hodge 理論と代数幾何学」の研究集会を企画され始めた頃、兵庫県のご郷里近くの八千代町での通称「獅子鍋セミナー」及び市民講座「おもしろ算数・数学講座」に始めて誘っていただいた頃、加藤和也氏との共同研究を始められた頃、ドイツ滞在中の私の家に来られ明け方近くまで話し込んだ頃、大きな国際研究集会 Azumino 2000 を企画された頃、大病をされ阪大病院の無菌室に入院された頃、それを克服されて再び多賀城での研究集会などの企画をいっしょに推進いただき始めた頃、長年の共同研究の成果を加藤氏と [20] にまとめられ、それを応用され始めた最近のこと、そしてそれらをずっと支えてこられた奥様はじめご家族のこと... これらのことが走馬灯のように私の脳裏を駆け巡ってくる。

また臼井氏ご本人は勿論であるが、氏を通じて私は多くのすばらしい出会いを体験し、多くの有力な数学者との知遇を得ることもできた。これは何者にも代え難いことである。例えば、先にも触れた八千代での集まりを通じて、地元の子供達を易しく指導しておられた時の、永田雅宜先生の笑顔を真近に見る機会を得たことなどである。

いや、思い出を話し始めればきりが無い。ここはそのような場所ではなかった。お許し下さい。もう一言、臼井先生、還暦おめでとうございます、長い間本当に有り難うございます、これからもお体を大切にいっしょに頑張りましょう、そう申し上げたい。

*東北学院大学工学部 (Faculty of Engineering, Tohoku-Gakuin University)

1 序論

S をコンパクトな非特異複素曲面, B をコンパクトリーマン面として固有全射正則写像 $f: S \rightarrow B$ を考え, その一般ファイバーの種数を $g \geq 2$ とする¹。このような f を種数 g のファイバー曲面と呼ぶ。 $\text{Sign}(S)$ を S の 2 次元ホモロジー群上の交叉形式に関する符号数とする。つまり交叉形式に関する正並びに負の固有空間の次元をそれぞれ $b_2^+(S)$, $b_2^-(S)$ とする時

$$\text{Sign}(S) := b_2^+(S) - b_2^-(S)$$

と置く。不変量 $\text{Sign}(S)$ の重要性については, 今さら論を待たないところである。

さて, ここで扱う符号数の局所化問題とは次のものである。

問 f の任意のファイバー芽 (f, F_P) ($F_P = f^{-1}(P)$, $P \in B$) に対して, 局所符号数と呼ばれる有理数不変量 $\sigma(f, F_P) \in \mathbb{Q}$ をうまく定義して

$$\text{Sign}(S) = \sum \sigma(f, F_P)$$

と書けるか? ただし右辺の和は有限和を表すものとする。つまり, ほとんどすべてのファイバー芽については $\sigma = 0$ であり, 選ばれた特別のファイバー芽だけが “符号数を運んでいる”。さらにその 0 でない $\sigma(f, F_P)$ の値を具体的に計算せよ。

種数 $g = 2$ の時, この問には上野健爾 [34], 松本幸夫 [25], 堀川顕二 [17] [18] の三氏による, 各々独立の方法による研究があり, それらは次の定理に集約される。

定理 $f: S \rightarrow B$ を種数 2 のファイバー曲面とすると, 特異ファイバー芽にのみ非自明な (つまり 0 でない) 値を持つ局所符号数 $\sigma(f, F_P)$ がうまく定義される:

$$\text{Sign}(S) = \sum \sigma(f, F_P).$$

値 $\sigma(f, F_P)$ は, ある非負整数 a, b によって

$$\sigma(f, F_P) = -\frac{1}{5}a - \frac{3}{5}b \tag{1}$$

と書かれ, 次のような幾何的意味を持つ。

F_P がもし分離的 Lefschetz ファイバー (ノード 1 個, 楕円成分 2 個の可約安定曲線) ならば $\sigma = -1/5$ である。また F_P がもし非分離的 Lefschetz ファイバー (ノード 1 個の既約安定曲線) ならば $\sigma = -3/5$ である。

¹ $g \leq 1$ なら線織面及び楕円曲面の理論として理解が進んでいるので, こう仮定する。

一般の F_P は σ の総和を保つ分裂変形によって、分離的 Lefschetz ファイバー a 個、非分離的 Lefschetz ファイバー b 個にモース化され²、その結果が (1) を導く。

このうち松本幸夫氏の Meyer コサイクルを用いる方法³は、遠藤久顕氏 [12]、森藤孝之氏 [26] によって一般種数の超楕円曲線族に拡張され、さらに最近、久野雄介氏 [23] によって平面曲線族の場合に拡張された。また飯田修一氏 [19] によるエータ断熱極限と絡めた仕事も現れた。

一方、上野健爾氏の偶テータ定数を用いる方法は、一般の非超楕円曲線族を扱える可能性のある方法として、吉川謙一氏 [35] により再び取り上げられた。吉川氏のこの方法は、本稿でもこれから説明しようとする Deligne-Mumford コンパクト化 $\overline{M}_g$ 上の符号数因子 D_{sign} を、さらに相対ヤコビ写像を経由して、主偏極アーベル多様体のモジュライ空間の適当なコンパクト化上の偶テータ定数の閉包から捉えようとするものである。

私が氏のこのアイデアの萌芽に始めて接したのは、確か 1999 年頃ではなかったかと思う。当時、私は大沢健夫氏の主催するセミナー⁴に招かれ、超楕円曲線族の局所不変量並びにモース化について話をしたのであったが、それに出席していた氏と交した議論を思い出してのことである。

その後、私が主催者の一人でもある多賀城での代数幾何・トポロジーの研究集会に招いたりなどして、氏の詳しい考察を聞く機会を得た。

そうこうするうちに、私はアーベル多様体に持ち込まないで、 $\overline{M}_g$ の上で直接符号数因子 D_{sign} を捉まえる方法はないものかと思うようになった。こうして $\overline{M}_g$ 上の Picard 関手に関する有用な文献を探したのだが、その結果 Harris-Mumford [14] 及び Eisenbud-Harris [11] がまさに期待に答えてくれることを知った⁵。

このような事を、氏と集会などで会った折とか、或はプライベートセミナーをしたりとかで、ぼつぼつ議論し合っているうちに、なんとかれこれ十年近くが過ぎてしまった⁶。もうさすがにまとめようよ、ということで書いたのが共著論文 [7] である。

本稿の目的の一つは、この吉川氏との共著論文を私の立場から若干の解説を試みること

²モース化の部分の主張は堀川 [18] に加えて、荒川-足利 [1] I, Cor. 4.12 もあわせなければならない。

³ f の臨界値の小近傍の補空間である B の集合をパンツ分解し、各パンツ上のリーマン面束から得られる $Sp(2g, \mathbb{Z})$ 係数の 2 次元群コホモロジーが、適当な条件下でコバウンダリーになることを利用して局所符号数の定義を導く方法。

⁴数学界屈指の打ち手として名高い大沢氏に、セミナー後名古屋の碁会所で始めて三目置いて挑戦し、勝たせていただいたことが昨日のようだ。多分私を歓迎する意味で緩めてくれたに違いない。

⁵ちなみに、これら二つの仕事は '80 年代のこの分野の草分け的な仕事であると同時に、この方面の最高級の成果の 1 つではないかと思える。

⁶吉川氏の本来のご専門は analytic torsion の周辺にあり、この分野で大きなお仕事をされながら、たまに局所符号数のことも考えられた感じであると思う。

にある。とはいえ、もともと [7] の中には大きな定理は一つもなく、ただ安定曲線のモジュライ上に「符号数因子」なるものを考えるという視点の有効性のみを、小さな応用や Examples を積み重ねて示すことが眼目である。

この符号数因子は (半) 安定族であるようなファイバー曲面の符号数を扱うには有効であることがわかるが、非安定族についてはこれだけでは不十分である。私のような一般型代数曲面の研究に携わる者にとっては、曲線族の非安定特異ファイバーは日常的に接するものであって、これを扱えないようではちょっと困る。そこで非安定ファイバーと安定ファイバーの持つ符号数への局所寄与の差を正確に測ろうと思うが、それをなすのが本稿のもう一つの主役である局所符号不足数である。

これは、ファイバーの管状近傍である境界付き多様体の符号数をエータ不変量でシフトしたものを考え、最小安定還元がこの量に与える変動項を用いて定義される。この時 [2] の主結果は、この量が写像類群の共役類に値を持つ局所位相モノドロミーを特徴付ける Nielsen-松本-Montesinos 情報によって明示的に記述出来るということである。この内容を解説するのが本稿のもう一つの目的である。この仕事の動機は、一つには Sheng-Li-Tan 氏 [33] によるこの方面の先駆的な仕事を私の立場でより幾何的に取り扱いたいという点があったが、もう少し直接的な影響については §3.1 で触れさせていただいた。

こうして

$$(\text{局所符号数}) = (\text{モジュライ寄与項}) + (\text{モノドロミー寄与項}) \quad (2)$$

という図式がだんだん明白になってきた。

私は以前の今野一宏氏 [6] 及び遠藤久顕氏 [4] とのそれぞれの共著の仕事の中、当時のこの方面の進展にも触れる機会があった。今回の講演は (2) の図式を軸にしたものであったので、その解説をしようと思い少し丁寧に書き始めてみたら、符号数因子と局所符号不足数の基礎部分を述べただけで、本稿の規定の紙面が尽きてしまった。これは困った。

このあと我々の局所符号数をきちんと定義し、その例と応用を少し述べたいし、まだできないでいる今後の問題群、例えば Miles Reid 氏 [30]、今野一宏氏 [22] により定式化された H-指数 (Horikawa index) に対する我々の立場からのアプローチの可能性、或は $\overline{M}_g$ 上の Chow 群や計量と関係する問題等にもほんの少しだけ触れてみたい。

幸い、私は本稿を終えたら時を経ずして [3] を書く機会がある。それで大変申し訳ないが、これらについてはその稿に譲らせていただけないだろうか？

2 $\overline{M}_g$ 上の符号数因子

2.1 ファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ に対して、不変量 $\text{Sign}(S)$ を書きかえることから始め

る。まず Hirzebruch 符号数定理より

$$\text{Sign}(S) = \frac{1}{3} (K_S^2 - 2\chi_{\text{top}}(S)) \quad (3)$$

となる。ここに K_S^2 は標準束 K_S の自己交点数, $\chi_{\text{top}}(S)$ は S の位相的オイラー標数である。我々はファイバー空間 f を考えているので, K_S のかわりに相対標準束 $K_{S/B} = K_S \otimes f^* K_B^{-1}$, また $\chi_{\text{top}}(S)$ のかわりに位相的オイラー寄与 $\mathcal{E}(S) = \chi_{\text{top}}(S) - (2-2g)(2-2g(B))$ を用いる方がより自然である⁷ ($g(B)$ は B の種数)。簡単な式 $K_{S/B}^2 = K_S^2 - 8(g-1)(g(B)-1)$ を用いると (3) は

$$\text{Sign}(S) = \frac{1}{3} (K_{S/B}^2 - 2\mathcal{E}(S)) \quad (4)$$

とも書ける。一方, Grothendieck-Riemann-Roch 公式の最もシンプルで有用な適用により, 相対ネター公式

$$\deg \lambda(f) = \frac{1}{12} (K_{S/B}^2 + \mathcal{E}(S)) \quad (5)$$

を得る⁸。ここに左辺は相対標準束の順像の行列式束 $\lambda(f) = \det f_* K_{S/B}$ の次数である。 $\lambda(f)$ は f の Hodge 束とも呼ばれる。式 (4), (5) より

$$\text{Sign}(S) = 4 \deg \lambda(f) - \mathcal{E}(S) \quad (6)$$

を得る。我々は式 (6) を大切にし, むしろ符号数の再定義とも思っ議論を進める。

2.2 今度は Deligne-Mumford [10] による安定曲線のモジュライ空間 $\overline{M}_g$ 上で, 式 (6) の対応物を考える。そのために $\overline{M}_g$ 上の Hodge 束 λ を考える。つまり安定曲線の orbifold の意味での普遍族 $\pi: \overline{\mathcal{C}}_g \rightarrow \overline{M}_g$ に対する相対双対化層の順像の行列式束 $\lambda = \det \pi_* \omega_{\overline{\mathcal{C}}_g/\overline{M}_g}$ の対応物を考えるということだが, 念のためこの定義を復習しておこう。

著名な [10] によれば, 多重双対化層写像 (3 重でよいが) を通じて適当な射影空間 $\mathbf{P}^{\nu-1}$ に埋めこまれた安定曲線を, パラメトライズする適当な Hilbert スキーム内の閉部分スキーム H_g と, その上の通常の意味での普遍族 $p: Z_g \rightarrow H_g$ が存在する。射影変換群 $PGL(\nu)$ が H_g に作用し, 商 $H_g/PGL(\nu)$ が $\overline{M}_g$ である。このとき, 同型⁹

$$\text{Pic}(\overline{M}_g) \otimes \mathbf{Q} \simeq \text{Pic}_{\text{func}}(\overline{M}_g) \otimes \mathbf{Q} \simeq \text{Pic}(H_g)^{PGL(\nu)} \otimes \mathbf{Q} \quad (7)$$

⁷なお Meyer-Vietoris 完全系列より容易に $\mathcal{E}(S) = \sum \{\chi_{\text{top}}(F_P) - (2-2g)\}$ と表せる。ここに和は特異ファイバー F_P 全体をわたる。

⁸もしくは $\mathcal{O}_S$ に対する Leray spectral 系列と Grothendieck 双対性及び通常の S のネター公式からも導ける。

⁹この同型は自然なものである。Harris-Mumford [14]p.50, Harris-Morrison [15]p.141 等参照。なお, これをもしテンソルしないで $\mathbf{Z}$ 上で考えたら同型にはならないことを注意しておく。

を通じて, 行列式束 $\det p_* \omega_{Z_g/H_g}$ を $\overline{M}_g$ 上の有理因子とも, 或は有理 Picard 関手とも思っ
たものが λ に他ならない。(式 (7) の第 3 項は $\mathrm{PGL}(\nu)$ -不変因子を示す。) 本稿では有理
Picard 関手としての性格が優先される。

また $\overline{M}_g$ の境界因子を $\delta = \overline{M}_g \setminus M_g$ (M_g は非特異曲線の locus) とし, その既約分解を
 $\delta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor} \delta_i$ とする。ここに δ_0 は既約 Lefschetz 曲線の, また δ_i ($1 \leq i \leq \lfloor g/2 \rfloor$) は成分が
それぞれ種数 $i, g-i$ の可約 Lefschetz 曲線の locus の閉包である¹⁰。

定義 2.2.1 ([31], [7]) $\mathrm{Pic}(\overline{M}_g) \otimes \mathbb{Q}$ の中の元

$$\mathcal{D}_{\mathrm{sign}} := 4\lambda - \delta$$

を符号数因子と呼ぶ¹¹。

この定義の有用性を明確化するために, 今 $f: S \rightarrow B$ は相対極小な半安定族であるとし
よう。つまり f の特異ファイバーは被約且つ正規交叉していて (-1) -曲線はないとする。
特異ファイバー中の (-2) -曲線の鎖の contraction $S \rightarrow \hat{S}$ により, 安定族 $\hat{f}: \hat{S} \rightarrow B$ を得
る。曲面 $\hat{S}$ は高々 A 型有理 2 重点を持つ解析空間である。

さて $\mu_f: B \rightarrow \overline{M}_g$ を誘導写像とする。つまり点 $P \in B$ に対して, 安定曲線 $\hat{f}^{-1}(P)$ の
同型類に対応する $\overline{M}_g$ 上の点を対応させる写像が μ_f である。

補題 2.2.2 $f: S \rightarrow B$ が半安定族であるようなファイバー曲面ならば次が成り立つ:

$$\mathrm{Sign}(S) = \int_B \mu_f^* c_1(\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}).$$

なお上記で c_1 は (orbifold の意味での) 第 1 チャーン類を示している。この証明は式
(6) からほぼ明らかと思うが, $\mathcal{E}(S)$ がなぜ $\mu_f^* c_1(\delta)$ の積分に等しいかは, 両者とも各特異
ファイバーからの寄与がそのノードの数の和に等しいことによる。

符号数因子 $\mathcal{D}_{\mathrm{sign}}$ に着目したのは我々よりも I. Smith 氏 [31](1999 年) の方が先である。
彼の定理は, 上の補題 1 より遥かに広くて, C^∞ -Lefschetz ファイブレーション $f: S \rightarrow B$
に対してこの主張が成り立つということである。つまりその場合の f は C^∞ 写像である
が, ただし各特異点の近傍では複素構造が入り, その特異点はノードでファイバーごと高々
1 個ということである。

¹⁰実際は δ は関手として扱われるので, 正確には δ_1 についてはその locus の作る因子の $1/2$ である。(一
般楕円成分は位数 2 の自己同型を持つので。)

¹¹実際は同型 (7) を介して有理 Picard 関手として扱われるので, 符号数関手という名前が相応しいかもしれ
ないが, 因子という名がずっと親しみ深いし, また吉川氏がそう呼び出したという経緯もある。

なお C^∞ -Lefschetz ファイブレーションは, Donaldson 及び Gompf の仕事によって シンプレクティック多様体と同義語であることが示されたことが一つの契機となり, トポロジストにより活発に研究されている。例えば 1 節でも述べた松本-遠藤-久野氏らの Meyer コサイクルに依る局所符号数は, このカテゴリーでの成果であることに注目しなければならない。

一方我々代数幾何学者は, f が正則写像からはみ出してしまふとなかなか辛いものがあるが, しかし特異ファイバーは非安定なものも含めて全く一般のものを許して局所符号数を考えようとするので, おあいとも言える。

2.3 さて補題 2.2.2 を見ても, このままでこの積分 (つまり次数を計算すること) をどうやって行なえばよいかわからない。それを行う準備のために, $\overline{M}_g$ 上の有理因子の線形同値類の中で, $\mathcal{D}_{\text{sign}}$ の計算可能な表示を探すことを考えよう。

さて非特異代数曲線 C に対して, そのゴナリティーが

$$\text{gon}(C) := \min\{\deg f; f \text{ は定数でない } C \text{ 上の有理型関数}\}$$

として定義され, 不等式 $\text{gon}(C) \leq [(g(C) + 3)/2]$ が満たされる。

最初, 奇数種数 $g = 2k - 1$ ($k \geq 2$) の場合を考えよう。我々は Harris-Mumford 跡を

$$\overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}} := \{[C] \in M_g; \text{gon}(C) \leq k = (g + 1)/2 \text{ を満たす曲線}\} \text{ の閉包 } \subset \overline{M}_g$$

で定義する。この場合, $\overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}}$ は $\overline{M}_g$ 上の Weil 因子になる。

定理 2.3.1 (Harris-Mumford [14]) $g = 2k - 1$ ($k \geq 2$) の時, 次の因子は符号数因子である:

$$\mathcal{D}_{\text{signHM}} := \frac{2 \cdot k!(k-2)!}{3(k+1)(2k-4)!} \overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}} - \frac{k+3}{3(k+1)} \delta_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2i(2k-1-i) - (k+1)}{k+1} \delta_i.$$

実際に Harris-Mumford が示した事は, $\overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}}$ を Hodge 束と境界因子の一次結合として正確に表す明示式であり, 単独の主張としては事実上 [14] 中の最大ページがその証明に充てられている。その式を我々の定義 2.2.1 に当てはめれば上の定理の主張となる¹²。

ちなみに [14] の主目的は, 充分大きな奇数種数の曲線のモジュライ空間が一般型であることを示すことであり, それまでモジュライ空間と言えば有理的かもしくは小平次元 $-\infty$ のものと想像していた当時の代数幾何学者を大いに驚かせた伝説を持つ論文である¹³。

¹²勿論, 論文 [14] の中に符号数因子の定式化がしてあるわけではない。

¹³この主目的に $\overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}}$ がどう活躍するかは粗っぽく言えば次のとおり。 $\overline{M}_g$ の標準束は $13\lambda - 2\delta$ の形であることが示せ, もし $(13-a)\lambda - 2\delta$ ($a > 0$) なる線形同値類に有効因子が存在すれば Hodge 束の bigness より, big + effective なる標準束表示を得て OK。その有効因子の主要成分として $\overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}}$ が抽出された。

次に偶数種数 $g = 2k$ ($k \geq 2$) の場合を考える。この時は先の $\overline{\mathcal{D}}_{\text{HM}}$ は一般に余次元 2 以上の locus になってしまい、不適当である。そこで次のような曲線の性質に着目する。

非特異曲線 C の完備線形系 $|L|$ に含まれるペンシル V に対して、自然な射

$$\rho_V : V \otimes H^0(C, K_C \otimes L^{-1}) \rightarrow H^0(C, K_C)$$

を考えると、“一般には” 単射となる (Brill-Noether 理論) が、これが単射でないような特別な V を “Petri 条件を乱すペンシル” と呼ぶ。今 $\overline{M}_g$ 上の locus $\overline{E}_{k+1}^1$ を

$$\overline{E}_{k+1}^1 := \{[C] \in M_g; \text{次数 } k+1 \text{ の } |L| \text{ 内に Petri 条件を乱すペンシルを持つ曲線}\} \text{ の閉包 } \subset \overline{M}_g$$

と定義すると、これは Weil 因子になる。さて Eisenbud-Harris の結果を述べるために、有理数 a, b_i ($0 \leq i \leq k$), c を以下で定義しておく。まず

$$c = \frac{2 \cdot (2k-2)!}{(k+1)!(k-1)!}, \quad a = c(6k^2 + 13k + 1),$$

$$b_0 = ck(k+1), \quad b_1 = c(2k-1)(3k+1), \quad b_2 = 3c(k-1)(4k+1),$$

とし、さらに $3 \leq i \leq k$ については次のように置く:

$$b_i = -(i-2)ib_1 + \frac{(i-1)ib_2}{2} + \frac{(i-1)(i-2) \cdot (2k-2)!}{k!(k-1)!} - \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \frac{2(i-1-2\ell)(2\ell)!(2k-2-2\ell)!}{(\ell+1)! \ell! (k-1)! (k-\ell+1)!}.$$

定理 2.3.2 (Eisenbud-Harris [11]) $g = 2k$ ($k \geq 2$) の時、次の因子は符号数因子である:

$$\mathcal{D}_{\text{signEH}} := \frac{1}{a} \overline{E}_{k+1}^1 + \sum_{i=0}^k \left(\frac{b_i}{a} - 1 \right) \delta_i.$$

Eisenbud-Harris が実際になしたことは、やはり先の場合と同じく $\overline{E}_{k+1}^1$ の明示的な線形同値類の確定であり、定義 2.2.1 にそれを適応して上の主張を得る。証明には、当時 Eisenbud-Harris が同時に開発していた極限線形系 (limit linear series) の理論がふんだんに使われている。

3 局所符号不足数とモノドロミー

本節では局所符号不足数を定義し、この量が局所位相モノドロミーを特徴付ける Nielsen-松本-Montesinos 情報によって明示的に記述出来ることを解説する。

3.1 最初に準備として, エータ不変量に関する Atiyah-Patodi-Singer [9] の著名な仕事を復習する。Hirzebruch の定理により, 境界を持たないコンパクト多様体の符号数は Pontrjagin 形式の L 多項式の積分として書け, 例えば複素曲面の時には (3) なる表示が得られた。しかし境界を持つ場合には, 符号数とこの積分には差異が生じる。その差を記述するのがエータ不変量で, 符号数作用素と呼ばれる以下のような 1 階楕円型偏微分作用素のスペクトル不変量として定式化された。

一般に $(M, \partial M)$ を $4k$ 次元リーマン多様体 M で $4k-1$ 次元境界 ∂M を持つものとし, そのリーマン計量 h_M は境界のカラー近傍で積計量であるとする。 $\text{Sign}(M, \partial M)$ を $H^{2k}(M, \partial M)$ の $H^{2k}(M)$ への像上定義された非退化な交叉形式の符号数とする。また $L(p_1, \dots, p_k)$ を M の Pontrjagin 形式の L 多項式とする。一方, ∂M の偶型式全体に作用する符号数作用素を

$$\phi \longrightarrow (-1)^{k+p+1}(*d - d*)\phi, \quad (\phi \text{ は } 2p \text{ 型式})$$

の直和で定義する。 ($*$ は計量の制限 $h_{\partial M}$ に関する Hodge $*$ 作用素。) この作用素の固有値の集合を $\{\lambda\}$ とする。この時, エータ関数 (の級数表示)

$$\eta(s) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{\text{sign} \lambda}{|\lambda|^s}$$

は $\text{Re}(s) > -1/2$ まで解析接続され, $s = 0$ での値 $\eta(0)$ がエータ不変量 $\eta(\partial M, h_{\partial M})$ である。

定理 3.1.1 (Atiyah-Patodi-Singer)

$$\text{Sign}(M, \partial M) = \int_M L(p_1, \dots, p_k) - \eta(\partial M, h_{\partial M}).$$

計量に関する制限条件は, 微分方程式の境界値問題を解く要請から来ている。エータ不変量は計量に強く依存する不変量である。

具体的な幾何的状況においてエータ不変量を求めることは誠に興味深い問題であるが, これが最も研究されているのは特異点のリンクについてであろう。Hirzebruch [16] の Hilbert モジュラーカスプに対する研究等がその発端となり, 提起された問題と言える。これについては, 関連する内容が尾形庄悦氏による論説 [28] の中に書かれてあるので参照されたい。

一方, 特異ファイバー芽のリンクに対しては, Atiyah [8] の中に退化楕円曲線についての描写があるが, 尾形庄悦-齋藤政彦 [29] 両氏によって退化アーベル多様体の場合に拡張された。

さて、種数 2 以上の退化代数曲線のリンクのエータ不変量と、今まさに問題にしている局所符号数の問題に密接な関係があることに私が気付かされたのは、1999 年の古田幹雄氏からの私信による。第 1 節でも述べた Meyer コサイクルから生じる Meyer 関数の代わりに、エータ不変量を用いれば、広い状況において新しい型の局所符号数が定義できるであろうという提言であり、その一端は [13] にも紹介されている。

本節では残念ながら、この場合のエータ不変量を決定できるわけではないが、しかし実質的にその量の“ある部分”は求めたことになるのではないかと考えている。この点については、いずれ立ち返って議論したい。

3.2 本論にもどるが、ここでは前節と若干記号を変え、(局所的な)退化族を扱う。

$f: S \rightarrow \Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq \epsilon\}$ を正規的極小な閉円版上の種数 g の退化族とする。 $(\epsilon$ は十分小さな正の実数) つまり S は境界をもつ非特異複素曲面であり、一般ファイバー $f^{-1}(t)$ ($t \neq 0$) は種数 g の閉リーマン面、中心ファイバー $F = f^{-1}(0)$ の被約スキームは正規交差していて、 F の成分中の (-1) 曲線は F の他の成分と 3 点以上で交わるものとする。正則写像 f の境界への制限を $\partial f: \partial S \rightarrow \partial \Delta \simeq S^1$ とする。

この時 f の穴あき円盤への制限 $f^{-1}(\Delta^*) \rightarrow \Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ は可微分的に局所自明であるので、 S 上のリーマン計量 h_S が存在して ∂S のカラー近傍への制限が積計量であるようにできる。(計量 h_S の選択は一意的ではないが、一つとって固定する。)

族 f の最小半安定還元を $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{\Delta}$ とする。定義によって $\tilde{S}$ は Δ 上の S と $\tilde{\Delta}$ とのファイバー積に双有理同値な半安定族であり、原点でのみ分岐する巡回被覆 $\rho: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ の被覆次数 N は最小にとられている。 $\tilde{S}$ のリーマン計量 $h_{\tilde{S}}$ を、境界 $\partial \tilde{S}$ の近傍では h_S の自然な非分岐引き戻しと一致するように取っておく。

定義 3.2.1 このような退化族 f の局所符号不足数 $\text{Lsd}(f, F)$ を以下で定義する：

$$\text{Lsd}(f, F) = \text{Sign}(S, \partial S) + \eta(\partial S, h_{\partial S}) - \frac{1}{N} \left\{ \text{Sign}(\tilde{S}, \partial \tilde{S}) + \eta(\partial \tilde{S}, h_{\partial \tilde{S}}) \right\}.$$

差で定義されたこの値は、計量の取り方に依存しない ([9] II, Theorem 2.4)。ちなみに、 S および $\tilde{S}$ の上記計量に関する 1 次 Pontryagin 形式をそれぞれ $p_1(S)$, $p_1(\tilde{S})$ と置き、定理 3.1.1 によってこの定義を書き直せば

$$\text{Lsd}(f, F) = \frac{1}{3} \int_S p_1(S) - \frac{1}{3N} \int_{\tilde{S}} p_1(\tilde{S})$$

となる。これは我々代数幾何学者には感性に合ったのである。なぜなら経験上ファイバー曲面の符号数を計算する必要が生じたならば、まず式 (3) を用い、さらにその右边を線形同

値類の中で計算しやすいものに取り替えて、具体的因子の交点数の計算に焼き直すことが多いが、この計算を底空間方向に局所的に切り出して見れば、境界付き符号数の計算をしているのでは決してなくて $(1/3)p_1$ の積分の部分寄与を計算していることになるからである。この見方では線形同値類の中のよい因子を選ぶことが、良い計量を選ぶことにあたる。

3.3 我々の主張を述べるために、退化族 f の位相モノドロミーの用語を復習する。(Nielsen [27], 松本-Montesinos [24] 等参照。) 今

$$\mu = \mu_f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g, \quad (\Sigma_g \text{ は種数 } g \text{ のリーマン面})$$

を f のモノドロミー写像とする。これは負型擬周期写像と呼ばれる写像類群の元 (正確にはその共役類の元) である。 $\Sigma_g = A \cup B$ をその認容単純閉曲線系のアニュラス近傍 A_j の非連結和であるアニュラス部 $A = \coprod A_j$ と、その補集合の閉包である胴体部 $B = \coprod B_i$ への分解とする。

制限 $\mu|_B$ は周期的写像である。つまり、ある自然数 N によるべき $(\mu|_B)^N$ は恒等写像 id_B にイソトピックである。ここで N はこの条件を満たすような最小数に取られていると仮定し周期と呼ばれるが、この数が §3.2 での最小半安定還元を与える同じ N に一致する。

$\vec{C}$ を Σ_g 上の有向単純閉曲線としよう。ある自然数 $m = m(\vec{C})$ があつて集合として $\mu^m(\vec{C}) = \vec{C}$ となると仮定し、しかも m はこのような性質を持つ最小数にとられているとする。制限写像 $(\mu|_{\vec{C}})^m$ 自身は周期写像となるが、その位数を $\lambda = \lambda(\vec{C}) \geq 1$ とする。曲線 $\vec{C}$ 上の任意の点 R に対して、ある自然数 $\sigma = \sigma(\vec{C})$ ($1 \leq \sigma \leq \lambda - 1$) が存在して、 μ^m の反復合成の像は $\vec{C}$ の方向付けに関して $(R, \mu^{m\sigma}(R), \mu^{2m\sigma}(R), \dots, \mu^{(\lambda-1)m\sigma}(R))$ の順に並ぶ。この時、自然数 $\delta = \delta(\vec{C})$ を

$$\sigma\delta \equiv 1 \pmod{\lambda}, \quad 1 \leq \delta \leq \lambda - 1$$

を満たすようにとると写像 $\mu^m|_{\vec{C}}$ は $\vec{C}$ を適当なパラメータ付けに関して角度 $2\pi\delta/\lambda$ だけ回転させる。四つ組 $(m(\vec{C}), \lambda(\vec{C}), \sigma(\vec{C}), \delta(\vec{C}))$ は $[\mu]$ の $\vec{C}$ での valency と呼ばれる¹⁴。

点 Q を胴体成分 B_i の内点とする。自然数 $m(B_i)$ を $\mu^{m(B_i)}|_{B_i} = \text{id}_{B_i}$ を満たす最小数とする。もし $m(B_i)$ より真に小さな自然数 $m = m(Q)$ があつて $\mu^m(Q) = Q$ となる時、 Q は μ の重複点と呼ばれる。この時作用 μ^m で不変な Q の円盤近傍 D_Q が存在する。この境界曲線である円周 ∂D_Q が Σ_g の外部¹⁵から方向付けされていると思い、その ∂D_Q に

¹⁴Nielsen の原論文では三つ組 $(m(\vec{C}), \lambda(\vec{C}), \sigma(\vec{C}))$ が $\vec{C}$ での $[\mu]$ の valency と呼ばれているが、ここではこう変更する。

¹⁵[24] では円盤内部から方向付けされていたのを、[5] での議論に有効だったため許しを得て外部に変更させていただいて以来、こうしている。

ついで valency を重複点 Q の valency と呼ぶことにして $(m(Q), \lambda(Q), \sigma(Q), \delta(Q))$ と書くことにする。

次にアニュラス $\mathcal{A}_j$ に対して、境界曲線の連結成分への分解 $\partial\mathcal{A}_j = \partial\mathcal{A}_j^{(1)} \amalg \partial\mathcal{A}_j^{(2)}$ を考えるが、その向きは同じくアニュラス外部に同調するようなものとする。アニュラス $\mathcal{A}_j$ での valency とは、この 2 つの境界成分での valency $(m(\partial\mathcal{A}_j^{(k)}), \lambda(\partial\mathcal{A}_j^{(k)}), \sigma(\partial\mathcal{A}_j^{(k)}), \delta(\partial\mathcal{A}_j^{(k)}))$ ($k = 1, 2$) を意味するものとし、これをあらためて $(m(\mathcal{A}_j), \lambda^{(k)}(\mathcal{A}_j), \sigma^{(k)}(\mathcal{A}_j), \delta^{(k)}(\mathcal{A}_j))$ と書く。

アニュラス $\mathcal{A}_j$ が amphidrome であるとは、ある自然数 β があって μ^β が境界成分を交換する、つまり $\mu^\beta(\partial\mathcal{A}_j^{(1)}) = \partial\mathcal{A}_j^{(2)}$ となる時を言う。そうでない $\mathcal{A}_j$ は non-amphidrome なアニュラスと呼ばれる。

自然数 α を $\mu^\alpha(\mathcal{A}_j) = \mathcal{A}_j$ であって、且つ境界成分を交換しないような最小数とする。自然数 γ を $\mu^\gamma|_{\partial\mathcal{A}_j}$ が恒等写像であるものとする、 γ は α の倍数であるが、さらに写像 $\mu^\gamma : \mathcal{A}_j \rightarrow \mathcal{A}_j$ は整数回 (e 回とする¹⁶) の Dehn twist になる。この時 $\mathcal{A}_j$ での screw 数が $s(\mathcal{A}_j) = e\alpha/\gamma$ によって定義される。この screw 数は、2 つの境界成分の valency の和と -1 以上の整数の違いを除いて本質的に一致する。つまり、ある整数 $K(\mathcal{A}_j) \geq -1$ が存在して

$$s(\mathcal{A}_j) = -\frac{\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}} - \frac{\delta^{(2)}}{\lambda^{(2)}} - K(\mathcal{A}_j)$$

となる。

Nielsen [27] 及び 松本-Montesinos [24] の定理¹⁷により、次の 3 つの不変量が μ の写像類群の中での共役類を確定する。

- (i) 重複点集合 $\{Q\}$ 及びアニュラス集合 $\{\mathcal{A}_j\}$ での valencies,
- (ii) アニュラス集合 $\{\mathcal{A}_j\}$ での screw 数,
- (iii) 胴体成分 $\{B_i\}$ とアニュラス成分 $\{\mathcal{A}_j\}$ の配置から生じる向き付け双対グラフへの μ の作用。

さらに擬周期写像であって、上の (ii) の条件の screw 数がいっせいに負であるという条件を付けると、これらから退化族の位相同型類を復元できる (松本-Montesinos の定理)。この (i) ~ (iii) はモノドロミーに関する Nielsen-松本-Montesinos 情報と呼ばれる。

さて 定義 3.2.1 の局所符号不足数は、この情報によって以下のように書ける。

¹⁶ここでは右ひねりの Dehn twist がマイナス回で定義される。ただ一般に、左右どちら向きのひねりを正または負とするかは、トポロジストの間でも意見が分かれるようだ。どちらでもよいと思われるムキもあるが、トポロジストがこれについて熱い主張をしあっている場面に私は何度も遭遇した。

¹⁷歴史的に正確に述べると、Nielsen は (i) (ii) が完全な不変量と主張したが、それには不備があり (iii) を加える必要があることを松本-Montesinos が示した。

定理 3.3.1 ([2])

$$\begin{aligned} \text{Lsd}(f, F) = & -\frac{1}{3} \sum_{[B_i]} \sum_{\alpha=1}^{\varphi(i)} \left(\frac{\sigma_{\alpha}^{(i)} + \delta_{\alpha}^{(i)}}{\lambda_{\alpha}^{(i)}} + \sum_{j=1}^{r(\alpha, i)} K_j(\alpha, i) \right) \\ & + \sum_{[\mathcal{A}_j]} \left(\frac{\sigma^{(1)}(\mathcal{A}_j)}{\lambda^{(1)}(\mathcal{A}_j)} + \frac{\sigma^{(2)}(\mathcal{A}_j)}{\lambda^{(2)}(\mathcal{A}_j)} + \epsilon(\mathcal{A}_j) \right) + \sum_{[\widetilde{\mathcal{A}}_k]} \left(\frac{\delta(\widetilde{\mathcal{A}}_k)}{\lambda(\widetilde{\mathcal{A}}_k)} - 2 \right) \end{aligned}$$

となる。ここに第 1 項は μ_f の胴体部の軌道に関する同値類 $[B_i]$ 全体とその上の重複点の valency の集合 $\{m_{\alpha}, \lambda_{\alpha}^{(i)}, \sigma_{\alpha}^{(i)}, \delta_{\alpha}^{(i)}\}_{1 \leq \alpha \leq \varphi(i)}$ を動き, $K_j(\alpha, i)$ は連分数展開

$$\frac{\lambda_{\alpha}^{(i)}}{\sigma_{\alpha}^{(i)}} = K_1(\alpha, i) - \frac{1}{K_2(\alpha, i) - \frac{1}{K_3(\alpha, i) - \cdots \frac{1}{K_r(\alpha, i)}}}$$

によって定義される。また第 2 項は non-amphidrome アニュラスの軌道 $[\mathcal{A}_j]$ 全体を動き, $K(\mathcal{A}_j) \geq 0$ なら $\epsilon(\mathcal{A}_j) = 0$ である。第 3 項は amphidrome アニュラスの軌道 $[\widetilde{\mathcal{A}}_k]$ 全体を動く。

なお上の第 2 項の $\epsilon(\mathcal{A}_j)$ は $K(\mathcal{A}_j) = -1$ の時も具体的に書き下せるが, 連分数の縮約および合成に関する新しい記号などを準備しなければならないので, ここでは紙面の都合で省略した。詳しくは [2] を参照されたい。

定理 3.3.1 の証明方法であるが, まず正確に最小還元を与えるような新しい (半) 安定還元のプロセスを構成し, 同時に本質的には高村茂氏 [32] の方法に従って位相モノドロミー情報と安定族への巡回群作用の情報との一対一対応をつける。そして川崎徹郎氏 [21] による orbifold 符号数定理¹⁸を用いつつ, 局所符号不足数を同変 L 種数の言葉で書いて, それをこの群作用データつまりモノドロミー情報で丹念に書き下していくことによって得られる。

ここで本稿の予定の紙面が尽きてしまった。このあと第 2, 3 節の議論をもとに我々の局所符号数を定義し, その例や若干の応用と共に残された問題等を議論したいが, それらについては序論でも述べたように続編である [3] を参照されたい。

¹⁸もう何年も前になるが, 私は上正明氏による指数定理の orbifold 版に関する連続講演を聞く機会があり, それによって始めてこの方面の目を開かせてくれた。

参考文献

- [1] T. Arakawa, T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils*, I: Tohoku Math. J. **53** (2001), 369–394. II: Nagoya Math. J. **175** (2004), 103–124.
- [2] T. Ashikaga, *Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction*, to appear in Comment. Math. Helvetici.
- [3] T. Ashikaga, ファイバー曲面の局所符号数とその応用 II, 「2009 年代数幾何学城崎シンポジウム」報告集 (掲載予定).
- [4] T. Ashikaga, H. Endo, *Various aspects of degenerate families of Riemann surfaces*, Sugaku Exposition **19** (2006), 171–196.
- [5] T. Ashikaga and M. Ishizaka, *Classification of degenerations of curves of genus 3 via Matsumoto-Montesinos' theorem*, Tohoku Math. J. **53** (2001), 369–394.
- [6] T. Ashikaga, K. Konno, *Global and local properties of pencils of algebraic curves*, in *Algebraic Geometry 2000 Azumino*, ed. by S. Usui et al., Adv. Studies in Pure Math. **36** (2002), 1–49.
- [7] T. Ashikaga, K. Yoshikawa, *A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces*, (with Appendix written by K. Konno), to appear in Adv. Studies in Pure Math. **56** (2009), 1–34.
- [8] M. Atiyah, *The logarithm of Dedekind η -function*, Math. Ann. **278** (1987), 335–380.
- [9] M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69, II, *ibid.* **78** (1975), 405–432.
- [10] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75–110.
- [11] D. Eisenbud, J. Harris, *The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus ≥ 23* , Invent. Math. **90** (1987), 359–387.
- [12] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations* (with Appendix written by T. Terasoma), Math. Ann. **316** (2000), 237–257.
- [13] M. Furuta, *Surface bundle and local signature*, in; *The report of the symposium of Algebraic Geometry at Kinosaki*, pp. 94–103, 2000, in Japanese.
- [14] J. Harris, D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math. **67** (1982), 23–86.
- [15] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of Curves*, Springer, Berlin, (1998).
- [16] F. Hirzbruch, *Hilbert modular surfaces*, Enseign. Math. **19** (1998), 183–281.
- [17] E. Horikawa, *On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2*, In *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, (1977), 79–90.

- [18] E. Horikawa, *Local deformation of pencils of curves of genus two*, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **64** (1988), 241–244.
- [19] S. Iida, *Adiabatic limits of η -invariants and the Meyer functions*, to appear in *Math. Ann.*
- [20] K. Kato and S. Usui, *Classifying Spaces of Degenerating Polarized Hodge Structures*, *Ann. of Math. Studies* **169** (2009), Princeton Univ. Press.
- [21] T. Kawasaki, *The signature theorem for V-manifolds*, *Topology* **17** (1978), 75–83.
- [22] K. Konno, *Clifford index and the slope of fibered surfaces*, *J. Algebr. Geom.* **8** (1999), 207–220.
- [23] Y. Kuno, *The mapping class group and the Meyer function for plane curves*, *Math. Ann.* **342** (2008), 923–949.
- [24] Y. Matsumoto, J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces, I, II*, Preprints, Univ. of Tokyo and Univ. Complutense de Madrid, 1991/1994 (Revised in 2006)
- [25] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach*, in *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on “Topology and Teichmüller Spaces”*, World Scientific, Singapore, (1996), 123–148.
- [26] T. Morifuji, *On Meyer’s function of hyperelliptic mapping class groups*, *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), 117–129.
- [27] J. Nielsen, *Surface transformation classes of algebraically finite type*, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **21** (1944), 3–89; English translation; in *Collected Papers 2*, Birkhäuser, 1986.
- [28] S. Ogata, 特異点と符号数定理, *数学* **45** (1993), 1–11.
- [29] S. Ogata, M. Saito, *Signature defect and eta functions of degenerations of abelian varieties*, *Japan. J. Math.* **23**, 319–364.
- [30] M. Reid, *Problems on pencils of small genus*, Preprint (in his home page), (1990).
- [31] I. Smith, *Lefschetz fibrations and the Hodge bundle*, *Geometry and Topology* **3** (1999), 211–233.
- [32] S. Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations II, (Cyclic quotient construction of degenerations of complex curves)*, RIMS Preprint 1344 (2001).
- [33] S. L. Tan, *On the invariants of base changes of pencils of curves*, I: *Manuscripta Math.* **84** (1994), 225–244. II: *Math. Z.* **222** (1996), 655–676.
- [34] K. Ueno, *Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces*, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata*, Kinokuniya, Tokyo, (1987), 749–770.
- [35] K. Yoshikawa, *A local signature for generic 1-parameter deformation germs of a complex curve*, in *The report on the symposium on Algebraic Geometry and Topology of Degenerations, Coverings and Singularities* (2000), 188–200, in Japanese.