

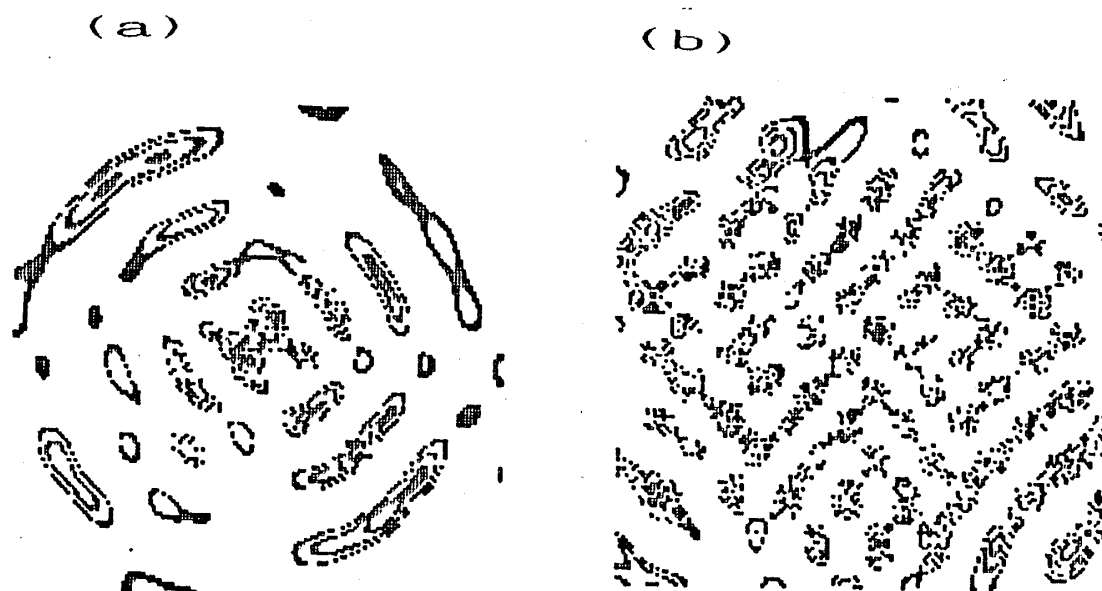


Fig.2 C-number distribution function and their contour lines of expected value of quantum electric field variable, at $t=40$,

(a) $\mu=0.2$. (b) $\mu=1.0$

45. 量子カオスの情報論的アプローチ

早大・理工 首藤 啓, 水谷正大

TaTa Institute of Fundamental Research 深井朋樹

非可積分量子系の波動関数は、その節線 (Nodal line) の非交叉に特徴づけられる複雑なパターンを示し、系がカオス的になる程、その乱れは大きくなる。ここでは、以下で定義される正準相関とよばれる情報理論的な量を用いて、非可積分系における固有関数の定量的な特徴づけを試みる。

まず、2つの部分系 S_1 , S_2 からなる結合系 $S = S_1 + S_2$ を考え、結合系 S の任意の状態 ϕ^S を、それぞれ S_1 , S_2 の完全直交基底 $\{\phi_i\}$, $\{\theta_j\}$ からつくられる直積基底を用いて、

$$\phi^S = \sum_{ij} a_{ij} \phi_i \theta_j \quad (1)$$

として表わす。部分系 S_1 と S_2 の間に全く相互作用がなく独立な場合、

$$\phi^S = \left(\sum_i c_i \phi_i \right) \left(\sum_j d_j \theta_j \right) = \left(\sum_{ij} c_i d_j \phi_i \theta_j \right) \quad (2)$$

とかける。しかし、一般には部分系間の相互作用により、その展開係数 a_{ij} は上式の形にはかけず、相互作用の強さを反映するものと考えられる。そこで、この展開係数 a_{ij} が(2)式のようなものからどれだけずれているかということによって、 ϕ^S を定量化したいわけであるが、(1)式のままでは当然のことながら $\{\phi_i\}$ 、 $\{\theta_j\}$ の選択に大きく依存する。そこで、まず S_2 の完全直交基底の各 $\{\theta_j\}$ に対する相対状態表示を

$$\phi_{\text{rel}}^{\theta_j} \equiv N \sum_i \langle \phi_i | \theta_j | \phi^S \rangle \phi_i \quad (3)$$

で定義すると、結合系 S の状態 ϕ^S は、

$$\phi^S = \sum_j \frac{1}{N_j} \phi_{\text{rel}}^{\theta_j} \theta_j, \quad \frac{1}{N_j^2} = \sum_i \langle \phi_i | \theta_j | \phi^S \rangle^2 \quad (4)$$

という single superposition の形でかくことができる。さらに、結合系 S の密度行列 $\rho^S = |\phi^S\rangle\langle\phi^S|$ に対して部分系の密度行列を $\rho^{S_1} \equiv \text{trace}_{S_2} \rho^S$ 、 $\rho^{S_2} \equiv \text{trace}_{S_1} \rho^S$ によって与えることにし、

- i) S_2 の基底 $\{\tilde{\theta}_i\}$ を ρ^{S_2} が対角形になるようにとる
- ii) $\tilde{\phi}_i$ を $\tilde{\theta}_i$ に対する相対状態表示にとることによって single superposition の形

$$\phi^S = \sum a_i \tilde{\phi}_i \tilde{\theta}_i \quad (5)$$

にかいたものを正準表示とよぶ。(このとき、 ρ^{S_1} は同時に対角形になる。)

ところで、 $\{\phi_i\}$ 、 $\{\theta_j\}$ をそれぞれ S_1 、 S_2 の演算子 A 、 B の固有関数、 $\{\lambda_i\}$ 、 $\{\mu_j\}$ をその固有値とすると、

$$P_{ij} = |\langle \phi_i | \theta_j | \phi^S \rangle|^2 \quad (6)$$

は、量子力学の確率解釈によると、部分系 S_1 が ϕ_i の状態にあり、かつ部分系 S_2 が θ_j の状態にあることが見い出される確率である。この P_{ij} を通常の結合確率分布とみなすことによって次の情報量

$$I_{AB} = \sum_{ij} P_{ij} \ln \frac{P_{ij}}{m_i n_j} \quad (7)$$

(但し、 m_i 、 n_j はそれぞれ $\{\lambda_i\}$ 、 $\{\mu_j\}$ の縮重度)

が定義できる。演算子 A 、 B がどの程度相関し合っているかは、

$$\{A, B\} \phi^S = I_{AB} - I_A - I_B \quad (8)$$

(但し, I_A, I_B は $P_i = \sum_j P_{ij}$, $P_j = \sum_i P_{ij}$ に対する情報量)

で与えられる。これは、我々が2つの部分系を全く独立とみなしたときに失われる情報量と考えられる。

そこで、上で導入した正準表示に対する相関(正準相関)

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}\} \phi^S = -\sum P_i \ln P_i, \quad P_i = a_i^* a_i \quad (9)$$

と考えると、single superposition であることから、 S_1 が状態 $\tilde{\phi}_i$ にあることがわかると S_2 は必ず $\tilde{\theta}_i$ であることがわかり、その意味で完全に相関し合っているといえる。また、正準相関の一意性と、次の不等式

$$\{C, \tilde{B}\} \phi^S \leq \{\tilde{A}, \tilde{B}\} \phi^S \quad (10)$$

$$\{C, D\} \phi^S \leq \{\tilde{A}, \tilde{B}\} \phi^S \quad (\text{Conjecture})$$

(但し、 $\sim$ のついたものは正準表示された演算子)

とから、正準相関を部分系 S_1, S_2 から成る結合系 S の基本的な相関を考えることができる。

われわれは、次のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2) + \alpha (a q_1^4 + b q_2^4 + 2c q_1^2 q_2^2) \quad (a=2, b=1) \quad (11)$$

に対して、部分系 S_1, S_2 を4次の非線形項をもつ振動子と考え、 $q_1^2 q_2^2$ の項を通して相互作用しているものとみなす。(この系はポテンシャルが同次式であることから古典的なカオス領域のエネルギー依存性がない。)そこで、まず下から100番目までの固有関数に対する正準相関の平均値と、古典的なカオス領域の割合の c 依存性を調べると図1となる。古典力学は、KAMの定理が保証するように、可積分系($c=0$)にわずかな摂動がはいっても、トーラスはすぐには壊れず、安定領域がしばらく残る。しか

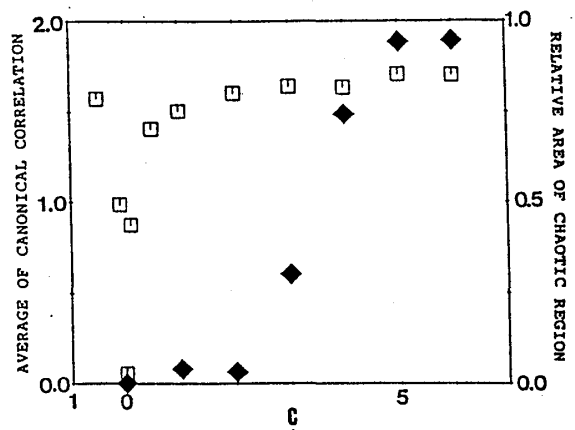


図1 正準相関の平均値(□)とポアンカレ写像上でのカオス領域(◆)の割合

し、量子系の正準相関は、可積分近傍でかなり鋭く立ちあがり、その値がほぼ 2.0 あたりに飽和していく。可積分近傍で、わずかな摂動に対して波動関数のパターンはほとんど変化しないが、僅かな相互作用によって 2 つの部分系は強く相関しあっていることがわかる。この可積分近傍での量子系のふるまいは、エネルギーレベルの微小摂動に対する 2 階差分

$$\Delta^2 E_n = (E_n(c + \Delta c) - E_n(c)) - (E_n(c) - E_n(c - \Delta c)) \quad (12)$$

にも共通してみられ (図 2), 量子系に特徴的なものと考えられる。次に, $c \simeq 7$ で飽和した正準相関の値について考察する。この c の領域で古典系は全面カオス的で、固有エネルギーの最近接レベル間隔分布は、ウィグナー分布を示している。最も極端な場合として、 P_i が一様分布している場合、我々が用いた行列の次元数を考慮すると、正準相関の値は、 $\simeq 4.0$ となり飽和した値 2.0 はかなり低い値であることがわかる。また、レベル間隔分布がウィグナー型を示していることから、次の様なランダム行列模型と比較する。行列全体に一様乱数を、対角項にふるものと非対角項にふるものの平均値が、

$$\frac{\langle H_{ij} \rangle}{\langle H_{ii} \rangle} = r \quad (13)$$

となるようにふり、その正準相関の値を計算する (表 1)。(表中に示した r の値に対して、レベル間隔分布はすべてウィグナー分布を示す。) 実際の系は、ランダム行列から計算される固有関数の正準相関からもかなりの隔たりがある。正準相関は、部分系の分け方をひとたび決めると (10) 式の Conjecture を認める限り、その系の基本的な相関を把える量になっている。しかし、(11) 式で $a = b = 1$, $c = 1$ としたとき、系は極座標表示をとることによって変数分離可能、つまり可積分となるが、上の計算で考えた部分系の分け方をし

ようと、みかけ上の相関があらわれてきてしまう。つまり正準相関は、我々が本来知りたい可積分系からのずれをはかる尺度としては問題があり、おそらく、あらゆる部分系の分け方を考え

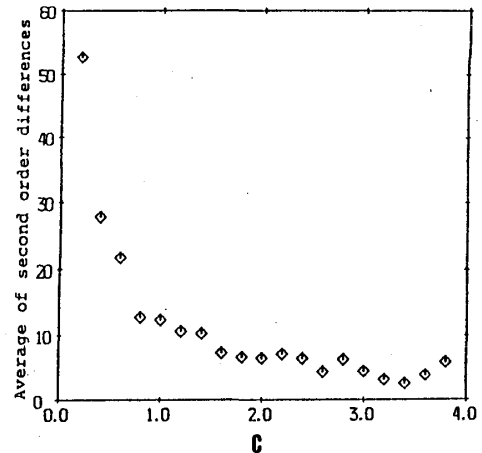


図 2 2 階差分の平均値

表 1 ランダム行列模型の正準相関と、実際の系との比較

r	canonical correlation
10^0	3.54
10^{-1}	3.53
10^{-2}	3.43
10^{-3}	2.80
$c=7$	1.76

た中での最小の値として、新ためて定義しなおすなどのことをしなければ、非可積分系の波動関数の定量づけにはならないであろう。しかしながら、系が十分カオス的になって飽和した値あるいは可積分近傍でのふるまいは、定性的には変更をうけないものと思われる。

参考文献：S. DeWitt & N. Graham (eds) *The Many World Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press 1973.

4.6. 量子カオスにおける潜在的混合性

京大・基研 池田研介

京大・理 戸田幹人, 足立 聡

カオスの本質は記憶喪失による混合性にある。混合性は、系の非線形性に由来するオリタタミとヒキノバシつまり馬蹄型ダイナミクスに起因する。しかし量子系は本質的に線形系であるゆえ、このような挙動は一見望むべくもない。しかし古典力学の基底に量子力学があるという我々の“信仰”(そのようなものを認めるのはアホであるという人もいるかもしれぬ。)を認めるならば、半古典極限($\hbar = \text{プランク定数} \rightarrow 0$)では、何らかのいみでの混合性が量子系にも存在しなければならない。

量子カオス系(その古典版がカオスになる系をこうよぶことにする。)のダイナミクスを実際に計算機シミュレーションによって追跡しようとする試みは Casati らによって始められた。しかし、量子系と古典系の間には予想をはるかに上回る gap が存在した。この現象の1つの解釈はアンダーソン局在(Prange et al.)に帰するものであろう。我々のコトバによると、この gap は次のように説明される。カオスでは指数的引き伸ばしが本質的である。位相空間内の object は時間と共にひきのばされ利用可能な領域をうめつくす。ひきのばされた object 間の距離は $\exp -\lambda t$ (λ : リアプノフ数, t : 時間)のオーダーになる。これがプランク距離 $\sqrt{\hbar}$ に等しいタイムスケールになると、object 上にある波束同志が干渉し合いカオスは劣化し始める。このタイムスケールは $T_r \approx \frac{\log \hbar}{\lambda}$ と極めて短い。このように量子カオス系は極めて短いタイムスケールで自己劣化する。

カオスには観測という操作が重要である(桁数の勘定といういみで)。ところが量子系では