

負係数をもつ関数族について

日大薬学部 関根忠行 (Tadayuki Sekine)

単位円板 $U = \{z : |z| < 1\}$ で正則で、次の形をした関数

$$(1) \quad f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0, n \in N)$$

からなる関数族を $A(n)$ で表す.

さらに, U で単葉な関数からなる $A(n)$ の部分族を $T(n)$ で表す. 関数族 $A(n)$, $T(n)$ は, Chatterjea[1] によって導入された.

Chatterjea は $T(n)$ の部分族 $T_\alpha(n)$, $C_\alpha(n)$ を次のように定義した.

$$f(z) \in T_\alpha(n) \iff \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

$$f(z) \in C_\alpha(n) \iff \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1).$$

Chatterjea[1] は Silverman[4] とおなじ方法で, $f(z)$ が $T_\alpha(n)$, $C_\alpha(n)$ に属するための条件を求めた.

補助定理 1 (Chatterjea[1]) $A(n)$ に属する関数 $f(z)$ が $T_\alpha(n)$ に属するための必要十分条件は

$$(2) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-\alpha}{1-\alpha} a_k \leq 1$$

が成り立つことである.

補助定理 2 (Chatterjea[1]) $A(n)$ に属する関数 $f(z)$ が $C_\alpha(n)$ に属するための必要十分条件は

$$(3) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} a_k \leq 1$$

が成り立つことである.

Chatterjea[1] の結果 (補助定理 1, 2) だけでなく, 負係数をもつ関数族の部分族は, 係数不等式によって特徴づけられている.

この理由により, $A(n)$ に属する関数で, 不等式

$$(4) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k a_k \leq 1 \quad (B_k > 0, n \in N)$$

を満たすものからなる $A(n)$ の部分族を $A(n; \{B_k\})$ で表す.

$A(n; \{B_k\})$ を負係数をもつ関数族の一般化された部分族という.

注意 1 不等式 (4) より

$$(5) \quad A(n; \{B_k\}) \subseteq A(n; \{C_n\}) \quad (0 < C_k \leq B_k)$$

が成立する.

負係数をもつ関数族を特徴づける係数不等式から, n, B_k を決定することによって, 負係数をもつ関数族を $A(n; \{B_k\})$ で表現することができる. たとえば, $T_\alpha(n), C_\alpha(n)$ は補助定理 1, 2 から次のように表される.

$$(6) \quad A\left(n; \left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right\}\right) = T_\alpha(n),$$

$$(7) \quad A\left(n; \left\{\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha}\right\}\right) = C_\alpha(n).$$

負係数をもつ関数族の一般化された部分族に属する関数について, 次の評価を得ている.

補助定理 3 (Sekine[3], 定理 2) $f(z)$ が $A(n; \{kB_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば,

$$(8) \quad \max\left\{0, 1 - \frac{1}{B_{n+1}}|z|^n\right\} \leq |f'(z)| \leq 1 + \frac{1}{B_{n+1}}|z|^n.$$

等号は

$$(9) \quad f(z) = z - \frac{1}{(n+1)B_{n+1}}z^{n+1}$$

で定義される関数で成立する.

補助定理 4 (Sekine[3], 定理 3) $f(z)$ が $A(n; \{k^p B_k\}) (2 \leq p \leq n+1)$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば,

$$(10) \quad |f^{(j)}(z)| \leq \frac{\prod_{i=2}^j (n+i)}{(n+1)^{p-1} B_{n+1}} |z|^{n-j+1} \quad (2 \leq j \leq p).$$

任意階数での歪曲定理を求めるために, Fractional Calculus を導入する. Riemann-Liouville 積分にもとづく, Owa[2] による次の定義を利用する.

定義 1 (Owa[2]) $f(z)$ の, 階数が λ の Fractional integral を

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\lambda}} d\xi$$

で定義する. ただし, $\lambda > 0$ で, $f(z)$ は原点を含む複素平面の単連結な領域で正則とする. また, $(z-\xi)^{\lambda-1}$ の多価性は, $(z-\xi) > 0$ のとき, $\log(z-\xi)$ は実数とすることによって取り除く.

定義 2 (Owa[2]) $f(z)$ の, 階数が λ の Fractional derivative を

$$D_z^\lambda f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^\lambda} d\xi$$

で定義する. ただし, $0 \leq \lambda < 1$ で, $f(z)$ は原点を含む複素平面の単連結な領域で正則とする. また, $(z-\xi)^{-\lambda}$ の多価性は, $(z-\xi) > 0$ のとき, $\log(z-\xi)$ は実数とすることによって取り除く.

定義 3 (Owa[2]) 定義 4.2 の仮定のもとで, $f(z)$ の, 階数 $(n+\lambda)$ での Fractional derivative を,

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^\lambda f(z)$$

で定義する. ただし, $0 \leq \lambda < 1$, $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする.

これらの定義から次の結果を得ている.

補助定理 5 (Sekine[3], 定理 5) $f(z)$ が $A(n; \{kB_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば,

$$(11) \quad \begin{aligned} & \text{Max} \left[0, \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{B_{n+1}\Gamma(n+2-\lambda)} |z|^n \right\} \right] \\ & \leq |D_z^\lambda f(z)| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{ 1 + \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{B_{n+1}\Gamma(n+2-\lambda)} |z|^n \right\} \quad (0 \leq \lambda < 1) \end{aligned}$$

が成り立つ.

等号は (9) 式で定義された関数で成立する.

補助定理 1 と補助定理 3 から, 次の結果を得ている.

補助定理 6 (Sekine[3], 定理 6) $f(z)$ が $A(n; \{k^2 B_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば

$$(12) \quad \begin{aligned} |D_z^{1+\lambda} f(z)| & \leq \frac{|z|^{-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left[(1+\lambda) + \frac{1}{B_{n+1}} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ 1 + \frac{\lambda\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)} \right\} |z|^n \right] \quad (0 \leq \lambda < 1, 0 < |z| < 1) \end{aligned}$$

が成り立つ.

補助定理 4, 5, 6 から次の定理を得た.

定理 1 $f(z)$ が $A(n; \{k^3 B_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば

$$(13) \quad \left| D_z^{2+\lambda} f(z) \right| \leq \frac{|z|^{-\lambda-1}}{\Gamma(2-\lambda)} \left[\lambda^2 + 3\lambda + \left\{ \frac{n+2}{n+1} + 2\lambda + \frac{(\lambda^2 + \lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)} \right\} \frac{|z|^n}{B_{n+1}} \right],$$

($0 \leq \lambda < 1$, $0 < |z| < 1$)
が成り立つ.

証明 $\Psi(z)$ を $\Psi(z) = \Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z)$ で定義された関数とすると

$$\Psi(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(k+1-\lambda)} a_k z^k.$$

一方

$$\begin{aligned} z^2 \Psi''(z) &= \lambda(\lambda-1)\Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z) \\ &+ 2\lambda\Gamma(2-\lambda)z^{1+\lambda} D_z^{1+\lambda} f(z) + \Gamma(2-\lambda)z^{2+\lambda} D_z^{2+\lambda} f(z). \end{aligned}$$

よって,

$$(14) \quad \begin{aligned} z^{2+\lambda} D_z^{2+\lambda} f(z) &= \frac{z^2 \Psi''(z)}{\Gamma(2-\lambda)} \\ &- \lambda(\lambda-1)z^\lambda D_z^\lambda f(z) - 2\lambda z^{1+\lambda} D_z^{1+\lambda} f(z). \end{aligned}$$

仮定より $f(z) \in A(n; \{k^3 B_k\})$ だから,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 B_k \left\{ \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(k+1-\lambda)} \right\} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^3 B_k a_k \leq 1.$$

したがって, $\Psi(z)$ が $A(n; \{k^2 B_k\})$ に属することに注意すると, 補助定理 2 から

$$(15) \quad |\Psi''(z)| \leq \frac{n+2}{(n+1)B_{n+1}} |z|^{n-1}.$$

$f(z)$ は 仮定から $A(n; \{k^3 B_k\})$ に属しているで, (5) から, $f(z)$ は $A(n; \{k B_k\})$ に属している.

したがって, 補助定理 5 の上側の評価

$$(16) \quad \left| D_z^\lambda f(z) \right| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{ 1 + \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{B_{n+1}\Gamma(n+2-\lambda)} |z|^n \right\}$$

が成り立つ. 同様に, $f(z)$ は $A(n; \{k^2 B_k\})$ に属するので, 補助定理 6 における評価 (12) 式が成り立つ.

(14), (15), (16) と補助定理 6 の (12) 式から次式が得られる.

$$(17) \quad \left| z^{2+\lambda} D_z^{2+\lambda} f(z) \right| \leq \frac{|z|}{\Gamma(2-\lambda)} \left[\lambda^2 + 3\lambda + \left\{ \frac{n+2}{n+1} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\lambda + \frac{(\lambda^2 + \lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)} \right\} \frac{|z|^n}{B_{n+1}} \right].$$

したがって, 上の (17) 式より, $D_z^{2+\lambda} f(z)$ の評価 (13) 式が得られる.

References

- [1] S. K. Chatterjea, On starlike functions, J. Pure Math. 1(1981), 23-26.
- [2] S. Owa, On the distortion theorems I, Kyungpook Math. J. 18(1978), 53-59.
- [3] T. Sekine, On new generalized classes of analytic functions with negative coefficients, Report Res. Inst. Sci. Tec. Nihon Univ. 35(1987), 1-26.
- [4] H. Silverman, Univalent functions with negative coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 51(1975), 109-116.