

無限と再帰

久木田 水生

0

19世紀末から20世紀初頭にかけての数学の世界では、集合論が数学の一分野として確立されつつあり、それをめぐって活発な議論が行われていた。1900年、パリで行われた国際数学者会議でヒルベルトが、数学者の最重要課題として一番に挙げたのが、任意の集合が整列可能であることの証明だったことから、集合論がいかに重要視されていたかがわかるだろう。

当時集合論をめぐって交わされた議論には、哲学的・形而上学的色彩をつよく帯びているものがあつた。例えば集合の実在性に関する議論がそうである。カントールがあらゆる集合を完結した実体として捉えたのに対し、ラッセルは一切の集合を非実在的な対象とみなした。『数学の原理』において、ラッセルは集合を未定義概念として導入していたが、1937年に出された第二版の序文の中では、次のように述べている。

集合に関していえば、私は集合の観念 *notion* に要求される条件を満たすいかなる概念 *concept* をも知覚する *perceive* ことが出来なかったと告白しなければならない。
(Russell [1903] p. xx)

というのも、ラッセルにとって集合は、実在の対象とみなすには困難がありすぎたからだ。ラッセルが集合に見いだした困難とは、主として集合の本質が何であるかが分からないということと、集合の存在からパラドックスが導かれるということの二点だった。そこでラッセルは集合を、実在しない「論理的虚構」とみなし、命題関数へと還元しようとした。これに対してゲーデルは、集合が「事物の複数性」という実在的な対象であると述べて、ラッセルの方法を批判した (Gödel [1964])。

この二人に代表される、対蹠的なそれぞれの立場は、どのような見解の違いから生まれたのだろうか。そしてなぜ集合はそのような見解の違いを生じさせたのだろうか。この問

いに答えるためには、集合に関する困難の本質がどこに存するのかを明らかにし、集合とはどのように理解されるべきものなのか、ということを考察しなければならない。

本稿では、ラッセルが集合の困難とみなした問題のうちの前者、つまり集合の本質が何か、ということについて考察し、そのことによって、有限集合と無限集合が異なる理解を要求するということ、そして無限集合の本質が限りなく対象を産出する再帰的な手続きにあるということをはっきりと明らかにしていきたい。

集合あるいは集合論について論じるにあたって、数学との関わりを考察することは重要であり、ほとんど不可欠と言っても良いが、本稿ではその問題には触れていない。また、ここで述べられる無限集合についての議論は、数学において取り扱われる、多くの無限集合（例えば実数の集合など）に対しては適応できないものである。このことは、私が実数のような対象の実在性について懐疑的であるということに由来するのだが、ともあれ本稿の目的は、より一般的な観点からの集合（特に無限集合）についての考察である。

1 集合の内包と外延

私たちの集合についての理解を考察するにあたって、まずはじめに、現代集合論の二人の創始者、デデキントとカントールの集合の定義を検討してみよう。デデキントの定義はこうである。

異なる事物 $a, b, c, \dots$ が何らかのきっかけからある共通の観点のもとに把握され、精神の中でひとまとめにされるということが非常にしばしば起こる。このときそれらはひとつの集合 S を形成するといわれる。この事物 $a, b, c, \dots$ は集合 S の要素と呼ばれ、これらは S に含まれる。逆に、 S はこれらの要素からなる。（Dedekind [1888] p. 344f）

一方カントールの定義は

「集合」という語のもとに私たちは、私たちの直観あるいは思考の、確定したしかも判明な諸対象 m （これらは M の「要素」と呼ばれる）の一つの全体への統合 M を理解する。（Cantor [1895] p. 282）

というものである。デデキントが事物をひとまとめにすることで集合が作られるとし、一方カントールは事物の統合そのものが集合であると表現している点は注目に値する。なぜ

ならばこの二人の定義の表現の間の違いに、集合という概念の持つ重要な二面性、すなわち外延的側面と内包的側面が現れているからである⁽¹⁾。

彼らの定義には、一見したところ不自然なところは見あたらないし、私たちが集合というものを直観的にどう理解しているかをうまく言い当てているように思える。しかしこの二人のどちらの定義も満足なものではない。彼らにとってはまず要素があり、その要素が集められてしかる後に集合が存在する。彼らの定義を見る限りでは私たちは空集合（要素を持たない集合）や単元集合（要素が一つだけの集合）、あるいは無限集合（要素が無限にある集合）を集合として認めて良いのか分からない。

デデキントもカントールも、単元集合は認めているが、空集合の存在は認めていない（cf. Cantor [1979] p. 2 訳注）。単元集合を認めることによって、デデキントは集合 S の任意の要素 s について $s \subset S$ （ s は S の部分集合）が適用できると述べている。ここからデデキントにおいて、単元集合とその要素との間の区別がなされていないことがわかる。このことは集合をその要素（一個でも複数個でも、あるいは零個でも）と同一視することから生じていると思われる。集合をその構成要素と同一視するならば、構成要素が存在しなければ、集合もまた存在しないだろうし、構成要素がただ一つであれば、その唯一の構成要素がすなわちその集合だろう。

しかしながら、集合をその要素と全く同一視することはデデキントにおいてもカントールにおいても不可能である。なぜならば集合はそれ自体が一つの「事物」であることを、二人とも認めているからである。デデキントはいう。

このような集合 S （あるいは総括、多様体、総体）は我々の思考の対象としてやはり一つの事物である。（ibid.）

そしてこのことは集合論には要請されなければならない。というのも、集合が一つの事物として認められず、その要素と同一視されるのならば、ある集合が別の集合の部分集合となっていることと、要素となっていることの違いがなくなってしまうからである（ただし上述のようにデデキントにおいてはこの二つがいささか混同されてはいるが）⁽²⁾。

集合が要素とは別の一つの事物であるとする、空集合や単元集合が存在することは不思議なことではない。実際集合とその要素を区別することも、私たちが日常的に行う考え方である。「恐竜は爬虫類に属する」という現在時制の言明が不自然でないのは、ここでいう「恐竜」が、かつて存在した巨大な生物の個体のどれか（あるいは全て）に言及しているのではなく、現在も残っているカテゴリーに言及しているからである。

このように私たちが普段何気なく「集合」「類」「種」「カテゴリー」などの語を使うとき、これらの概念は明らかに、少なくとも二つの異なる側面を持っている。すなわちデデキントの定義に顕著な、要素と同一視された外延的側面、そしてカントールの定義に示唆される、要素の総括としての内包的側面である（とはいっても彼らの集合論における集合の取り扱いはいくまでも外延的見地からである）。

集合の同一性はその外延の同一性に等しい。どのような規準に基づいて集合が作られようと、外延の等しい集合は必ず同一でなければならない。これは大前提である。デデキントによれば

これ（集合：引用者註）は、いかなる事物についても、それがSの要素であるかないかということが確定すれば、完全に確定する*）。...

原註*） いかにしてこの確定が実現するか、またこのことについて決定を下すための何らかの方法をわれわれが知っているかどうかということは以下のあらゆることに対して全くどうでもよいことである。以下に詳述する一般法則はこのことには全く依存せず、あらゆる状況で妥当する。（ibid.）

ということになる。例えば、集合Kはドミートリィ、イワン、アレクセイ、スメルジャコフの四人を要素に持ち、それ以外の何ものも要素に持たないとする。このときすでに、任意の与えられた対象についてそれがKの要素であるかないかは確定している。彼らの全員がフォードル・カラマーゾフの息子であるという知識を持っている人にとっても、そのような知識を持たない人にとっても、集合Kは全く同じように確定した集合なのである。集合Kの定義は

$$K = \{x \mid x \text{はフォードル・カラマーゾフの息子である}\}$$

でもいいし、

$$K = \{\text{ドミートリィ、イワン、アレクセイ、スメルジャコフ}\}$$

あるいは

$$K = \{x \mid (x \text{はドミートリィである}) \vee (x \text{はイワンである}) \vee (x \text{はアレクセイである}) \vee (x \text{はスメルジャコフである})\}$$

でも構わない。デデキントのいう「共通の観点のもとに把握する」ということは集合にとって重要なことではなく、なんらかの仕方（概念的に把握するにせよ、あるいは単に列挙するにせよ）、選び出された対象が確定しているということが重要なのである。これが外延が集合に本質的であるということの意味である。

有限の集合の場合は集合Kのように要素の列挙によって集合を確定することもできるし、その集合の要素を包括する概念が分からなければ、その要素のそれぞれを一意的に指示する記述を選言でつなげることによって（少なくとも見かけ上は）概念的に定義することができる。そして集合が確定した後は私たちは、その集合についての一般的な言明を行うことができる。ところが無限集合の場合は事情が異なる。直観主義者のブラウアーは、円周率の数字配列のなかに「9」が100個連続して現れる箇所がないということを証明できるか、という問題を好んで出したという。この円周率の数字配列のように、どのような要素が現れるかが知られていない場合、その要素について一般的な言明を行うことができない。

それでは無限の外延を持つ集合について、私たちはどのようにして一般的な言明を行うのだろうか。あるいは、そもそも私たちは無限の外延を持つ集合の同一性をどのようにして確かめるのだろうか。

自然数の集合Nについてはその外延が無限であるにもかかわらず、与えられた任意の対象について、私たちはそれがNの要素であるかどうかを判断することができるし、Nの要素についての真なる一般的な言明（例えば「全ての x について、 x がNの要素ならば $x < x+1$ 」等）を行うことができる。それはどのような対象がNの要素であるか（そしてNの要素でないか）という規準が確定しているからである。有限の集合である限り、どんなに要素の数が多くても、要素の列挙によって集合を確定することが可能である。しかし無限の集合は要素の列挙によって確定することはない。列挙はいつまでたっても完結しないからである。無限の集合を確定するのは、無限の外延を持つ概念でなければならない。従って内包的観点も集合の理論には不可欠なのである。

2 集合の種的一般性質と数的一般性質

カルナップはある集合の要素に共通する一般的性質には区別すべき二種類のものがあると主張する（Carnap [1931]）。一つは「数的 numerical」な一般性、もう一つは「種的 specific」な一般性である。前者はある性質が単なる事実としてある集合の全ての要素に共通している、という意味での一般性であり、後者はある一般的性質から別のある一般的性質が論理的に演繹できるという意味での一般性である。つまりこれは偶然的一般性と必然的一般性の区別と見ても良いだろう。例えば「どこの国でも、生まれたばかりの子供の名字は親と同じであるように定められている」という一般言明の真偽は、実際に全ての国の法律にあたってみなければ分からない。これが数的一般性である。しかし「どの子供

も生まれたときは親と同じ名字を持っている」という一般言明の真偽は、それぞれの国の法律さえ調べれば、実際に全ての子供の名字を調べなくても分かる。これが種的一般性である。

しかしある集合について、どのような性質が当の集合に対し種的一般性を持っているかを判断するのは困難である。例えば「羽のない二本足の動物である」という性質から「羽がない」という性質は論理的に演繹できる。しかし「人間である」という性質からは「羽がない」という性質が論理的に演繹できるとは思えない。私たちは羽の生えた人間を容易に想像することができるからだ。したがって「羽のない二本足の動物」という集合にとって「羽がない」という性質は種的一般性を持つが、「人間」という集合にとってはそれは種的一般性を持たない。にもかかわらずこの二つ集合は同一の外延を持ち、従って同一でなければならないのである。それでは「羽がない」という性質はこの集合に対して種的一般性を持つのか、数的一般性を持つのか。

種的一般性に関してはもう一つの困難がある。種的一般性質は、何らかの一般性質から論理的に演繹されるものであるが、この演繹の出発点となる性質が、数的一般性質であっては、この区別は意味をなさない⁽³⁾。かといって種的一般性でもないことは定義から明らかである。それではこの演繹の出発点となる性質は、どのような意味で一般的なのだろうか。カルナップはそのことについて十分な説明を与えていない。これら二つの困難から、私たちは、ある集合の本質的性質とでも呼ぶべき性質を要請したい衝動に駆られるかもしれない。しかしこの議論において本質的性質の要請は、さらなる困難と混乱を招くだろう。

カルナップは、しかし、無限集合に関して成り立つ一般性は種的一般性でしかあり得ず、そして数学は無限の対象を扱うのであるから、数学における一般性もまた種的一般性であると主張する。つまり「全ての x について、 x が自然数ならば $x < x+1$ 」という言明の一般性は「 x は自然数である」という性質から「 $x < x+1$ 」という性質が論理的に演繹できるゆえに保証されるということになる。ラッセルもまた数学的帰納法による自然数についての推論が「一つの一般命題から別の一般命題へと移行する単なる手段」(Russell [1905] p. 72)と言っている。

無限集合の全ての要素に対して、私たちは直接の知識を得ることは出来ないのだから、カルナップ、ラッセルの主張はもっともである。しかしながら、もしそうだとすると、無限集合に関しては、種的一般性質を演繹する出発点となる、なんらかの本質的性質のようなものが存在しなければならない。そしてまた「羽のない二本足の動物」の集合の例で示された困難を避けるためには、無限集合には、本質的性質と、その本質的性質から論理的に演繹される性質以外には、いかなる性質も属さないということが必要である。それでは

この本質的性質とは、そしてまた無限集合とは一体どのようなものだろう。

3 無限と再帰

ここまでの考察では「無限」という言葉が何の検討もなしに用いられてきた。しかしながら「ある集合が無限であるということはいかにして知られるか？」と問われたならば私たちは何と答えるだろうか。これは一見してそう思えるほどには簡単な問いではない。なぜならば限られた能力と限られた寿命を持つ私たちにとって、無限の対象を知覚する（あるいは想像する）ことはできないからだ。しかし私たちは自然数が無限に存在することを知っている。「 $10/3$ 」を少数で表現すれば、「 $3.3333\dots$ 」と「 3 」が無限に続くことを知っている。それではなぜ私たちはそのことを知っているのだろう。

「 $10/3$ 」の例を考えてみよう。私たちは分数を少数に変換するための手続き、すなわち割り算を知っている。私たちは一の位に、 3 に掛けて 10 を超えない最大の自然数、すなわち 3 を置く。 3 と 3 を掛けてできる 9 を 10 の下に書く。 10 から 9 を引いて余り 1 をその下に書く。 1 の後ろに 0 を書き加えて、 10 にする。再び 3 に掛けて 10 を超えない最大の自然数 3 を、今度は少数点以下一位に置く。再び 3 と 3 を掛けてできる 9 を二度目の 10 の下に書く。 10 から 9 を引くと再び 1 が余る。この時点で私たちはこの手続きが決して完結せず、同じ数字が繰り返し現れるばかりであることを知るだろう。このようにある種のルールに則って行われる手続き・アルゴリズムには、その手続きの途中のある時点で現れた対象が同様の手続きを要求し、また新たな対象が現れるという繰り返しに陥るものがある。そしてその手続きの結果、現れてくる対象は限りなく増え続ける。

有限の能力しか持たない私たちが、無限という観念に触れることができるのは、このような終わることのない繰り返しの手続きにおいてである。このような手続きをここでは「再帰的」な手続きと呼ぶことにしよう。ドイツの作家ミヒャエル・エンデ（象徴的な名前である）は、彼の代表作『果てしない物語 Die unendliche Geschichte』の中で、世界のあらゆる出来事を記録する老人を登場させる。この老人は、彼が世界の記録をつけているということも、その記録の内容も、世界の出来事として記録しなければならない。かくして老人の仕事は完結せず、彼の記録は「果てしない」物語になる。この老人の作業も再帰的な手続きである。老人の記録はどこまでいっても有限の長さを持っている。また老人の寿命が限られていれば、どこかで記録は途絶えざるを得ないだろう。しかし、それでもなお、この老人の記録はその基本的性格からして決して終了・完結することがない。この意味において彼の物語は、まさしく「unendliche」なのである。

ここで、以下の三つの無限集合について考えて見よう。

(1) デデキントの無限集合 S : デデキントは、ある集合がその真部分集合に相似であるとき、その集合は「無限」とであると定義⁽⁴⁾した後に、「無限集合は存在する」という「定理」を次のように「証明」している。

証明 私の思考の世界、すなわち私の思考の対象であり得る全ての事物の総体 S は無限である。というのも、もし s が S のある要素を指しているのであれば、 s が私の思考の対象であり得るという思考 s' が、それ自身 S の要素であるからである。従って、これを要素 s の像 $\phi(s)$ とみなすならば、これによって規定される S の写像 ϕ は、像 S' は S の部分であるという性質を持つ。そして確かに S' は S の真部分である。なぜならば S のうちには思考 s' のようないかなるものとも異なる、従って S' のうちには含まれないような要素（例えば私固有の自我）が存在するからである。最後に、 a 、 b が S の異なる要素ならばそれらの像 a' 、 b' も異なるものであり、従って写像 ϕ は一対一⁽⁵⁾であることが分かる (26)。証明終わり (ibid., p. 357)

(2) ツェルメロの集合 Z : ツェルメロの集合論には次のような公理が登場する。

公理 VII 空集合を要素として含み、その各々の要素 a につき $\{a\}$ という形式の更なる要素が対応するような、言い換えれば、その各々の要素 a に対応する集合 $\{a\}$ も要素として含むような集合 Z が少なくとも一つこの領域（ツェルメロは、彼の集合論に現れる全ての集合がその部分集合であるような、対象あるいは「事物」の領域 B において集合論を展開させる。このように考えることで集合論を実在の世界と切り離して、恣意的に取り扱うことができる。ツェルメロにとって無限集合は、デデキントのように私たちの認識的裏付けに基づいた「証明」を要するものではない）には含まれている。

(Zermelo [1907] pp. 184f)

(3) ペアノの公理によって規定される自然数の集合 N : ペアノの有名な自然数の公理系には次のような公理が採用されている。

A1. $1 \in N$

A2. $a \in N \supset a = a$

A3. $a, b \in N \supset (a = b \equiv b = a)$

A4. $a, b, c \in N \supset (a = b \wedge b = c \supset a = c)$

$$A5. a = b \wedge b \in N \supset a \in N$$

$$A6. a \in N \supset a+1 \in N$$

$$A7. a, b \in N \supset (a = b \equiv a+1 = b+1)$$

$$A8. a \in N \supset a+1 \neq 1$$

$$A9. (k \in K \wedge 1 \in k \wedge \forall x (x \in N \wedge x \in k \supset x+1 \in k)) \supset (N \subset k) \quad (6)$$

(cf. Peano [1889] p. 113)

これら三つの無限集合に共通しているのは、これらの集合に要素 a が含まれるとき、一対一の写像 f による、 a とは異なる要素 $f a$ (デデキントの集合 S の場合は「 a は私の思考の対象であり得る」であり、ツェルメロの集合 Z の場合は $\{a\}$ であり、ペアノの集合 N の場合は $a+1$ である) が当の集合の要素になっているということである。「果てしない物語」の老人の記録も基本的に同じ構造を持っている。ここから次のような条件を満たす集合が無限集合の一つの典型として考えられるだろう。

$$\#1 \quad c \in C, (a \in C) \supset (f a \in C)$$

(ただし、 C の任意の要素 a, b について、 $f a \neq a, a \neq b \supset f a \neq f b$) ⁽⁷⁾

ペアノの自然数論の公理系 P における N (自然数の集合) はまさにこの形式に対応する。つまり $\#1$ の C を N に、 c を 1 に、そして $f a$ を $a+1$ に入れ替えれば

$$\#2 \quad 1 \in N, (a \in N) \supset (a+1 \in N)$$

(ただし、 N の任意の要素 a, b について、 $a+1 \neq a, a \neq b \supset a+1 \neq b+1$)

が得られる。この集合の規定は直ちに $A1$. および $A6$. に対応するし、 $a+1 \neq a, a \neq b \supset a+1 \neq b+1$ が成り立つことは、 P から証明ができる。このことが意味するのは、自然数の集合 N は、既に自然数として知られている数に、 1 を加えていくことによって次々に新たな自然数を出現させるという手続きによって規定される集合として考えることができる、ということである。

無限集合というのは、最初から無限の対象がこの世界に存在していて、それをなんらかの共通性質によって統合したものだと考えるべきではない。ある規則に従った手続きがあり、その手続きの結果生じた対象が、再び同様の手続きを要求する。このような原理的に終了することが不可能な、再帰的手続きによって生じる対象の集まりが無限集合だと考え

るべきである。以上のように考えると、無限集合というのは、人工的な、したがってある意味、実在的でない対象だ、ということになる。

4 規約的一般性

無限集合の本質が、終わることのない再帰的な手続きにあり、無限集合の要素はそのような手続きの結果産み出された対象（対象と呼ぶことに抵抗を感じるのであれば概念と呼んでもよいが）である、と考えることによって、1章・2章で論じた問題も解決することができる。まず2章で論じた問題であるが、種的一般性質がそこから演繹される出発点になっている本質的一般性質は、この手続きのなかで与えられるルールから生じるものと考えられる。さて、手続きが対象を生じさせるものであり、手続き無くしては対象も存在しないのならば、それらの対象の全てが、この手続きの中で与えられる、あるいはこの手続きの依って立つルールに従っているのは当然である。数学においては本質的一般性質は、定義や公理という形で与えられる。また先に挙げた、生まれたばかりの子供の名字の例では、法律が本質的一般性質を与えていた。そこで私はこのような一般性質を、「規約的一般性質」と呼びたいと思う。このように演繹の出発点となる本質的一般性質が規約として明確に与えられているのだから、この集合にとって何が種的一般性質で、なにがそうでないかという規準もはっきりしている。

次に1章で論じた問題であるが、これも有限集合と無限集合でそれぞれ異なる取り扱いをすれば解決される。二つの集合の同一性は、有限集合に関してはあくまで外延の同一性とみなすことができる。無限集合に関しては、それぞれ集合について成り立っている一般性質のあいだに、論理的な演繹関係が存在すれば、その二つの集合は同一であるとみなすことができる。集合についての一般言明に関しては、有限集合ならば、数的一般性質を述べる言明として、無限集合に関しては種的一般性質を述べる言明として理解することが可能である。

ただしここまで述べた議論は、すべての無限集合に妥当するものではなく、実数のような、連続体濃度をもつ無限集合に関してはまた異なる理解が必要となり、そしてまたそこには異なる困難が存在する。

文献一覧

Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary

[1964] ed. *Philosophy of Mathematics*, second edition, Cambridge University Press, 1964.

Cantor, Georg

[1895] "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre," in *Gesammelte Abhandlungen*, Georg Olms, 1962, pp. 282-356. 邦訳は「超限集合論の基礎に対する寄与」、Cantor [1979] 所収。

[1979] 功力金次郎・村田全訳・解説『カントル 超限集合論』、共立出版、1979年。

Carnap, Rudolf

[1931] "The Logicist Foundations of Mathematics," in Benacerraf and Putnam [1964] pp. 41-52

Dedekind, Richard

[1888] "Was sind und was sollen die Zahlen?," in *Gesammelte mathematische Werke*, Bd 3, Chelsea Publishing Company, 1969, pp.335-391. 邦訳は河野伊三郎訳「数とは何か、何であるべきか」、『数について』（岩波、1973年）所収。

Gödel, Kurt

[1944] "Russell's Mathematical Logic," in Benacerraf and Putnam [1964], pp.447-469.

Heinzmann, Gerhard

[1986] ed. *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Librairie Scientifique, 1986.

Peano, Giuseppe

[1889] Hubert C. Kennedy trans. "The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method," in *Selected Works of Giuseppe Peano*, George Allen & Unwin, 1973.

Quine, Willard Van Orman

[1941] "Whitehead and the Rise of Modern Logic," in *Selected Logic Papers*, enlarged edition, Harvard University Press, 1995, pp.3-36.

Russell, Bertrand

[1903] *Principles of Mathematics*, second edition, Routledge, 1937.

[1905] "Science and Hypothesis," in *Philosophical Essays*, Simon & Schuster, Inc., 1967.

van Heijenoort, Jean

[1967] ed. *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967.

Zermelo, Ernst

[1907] "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I," in Heinzmann [1986] pp. 179-199.
English translation "Investigations in the foundations of set theory I," in van Heijenoort [1967] pp. 199-215.

註

- (1) 簡単に言えば、集合の外延とはその集合に含まれる全ての要素のことであり、内包とはその要素すべてを包摂し、それ以外の何ものをも包摂しない概念のことである。
- (2) この二つをはっきりと区別した功績はペアノに帰されるとラッセルはいう。cf. Russell [1903] pp. 26ff, Peano [1889] pp. 57ff, Quine [1941] p. 21.
- (3) もしも数的一般性質から演繹される性質を種の一般性質として認めるとすれば、 f がある集合

の全ての要素に当てはまる数的一般性質であるとき、 $f \supset f$ が成り立つので、 f は種的一般性質でもあるということが帰結する。従ってあらゆる一般性質が種的一般性質ということになってしまうのである。

- (4) S と同一ではない S の部分集合 S' を、 S の「真部分集合」という。また S と S' の各々の要素の間に何らかの一対一の対応が存在するとき、 S と S' は「相似」であるという。二つの集合が相似であるとき、その二つの集合は「基数」あるいは単に「数」が等しいともいう。例えば、全ての自然数の集合を N 、全ての正の偶数の集合を E とすると、 E は N の真部分集合である。また N の任意の要素 n について、 $2n$ という E の要素が対応するので、 N と E は相似である。したがって N は無限集合である。

ライプニッツはこのように全体と部分に一対一対応がつけられることを矛盾とみなしたが、今日ではこの性質こそが無限集合の顕著に特徴づけるものとみなされている。cf. Cantor [1985] p. 295. Russell [1903] pp. 355f.

- (5) ある写像 ϕ が「一対一」であるというのは、異なる事物 a 、 b の ϕ による像 a' 、 b' が必ず異なっているということを意味している。
- (6) A9.における「 $k \in K$ 」は「 k は集合である」を意味する。なお A9. は数学的帰納法が自然数に関して成立することを述べたものである。
- (7) もっともこの形式を満たす集合が全て無限集合になるわけではない。

〔哲学博士課程・日本学術振興会特別研究員〕