

H. Lewy's extension problem と接CR方程式系

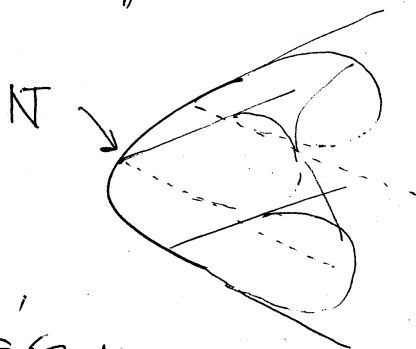
新潟大・教養

田島 慎一 (shinichi TAJIMA)

H. Lewy 方程式と積分核 について報告します。

§.1. CR microfunction と H. Lewy 現象

N を複素多様体 X 内の実解析的で generic な CR 多様体とする。 N の上の全ての CR-hyperfunctions (の germ) が、ある一定の方向からの正則函数の境界値として表示できるとき、H. Lewy 現象が起こるという。



注. microlocal に考えて,
 N の pseudocconvex な方向が
充分多いと H. Lewy 現象が起こる。

この現象は N 上の接 CR 方程式系 $\bar{\omega}_N$ の microfunction 解の構造と関係がある。

今, N の複素化を Y と置くと $Ch(\bar{\omega}_N) \cap T_N^* Y = T_N^* X$ となり次が成立する。

定理 1. [9]. $\text{supp } \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\bar{\omega}_N, (N))$ の凸包が proper (これは Γ とおく) ならば, $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\bar{\omega}_N, B_N)$ は Γ° 方向からの (X 上の) 正則函数の境界値として表わせる。

証明 SKK の Chap 1 を読み直す。

さて, H. Lewy 現象が起るとき, CR microfunction に対して定義函数となる正則函数を再生する積分変換を求め, その性質を調べるのは基本的問題である。

すなわち

$$f(x) \rightarrow \int K(z, x') f(x') dx'$$

の形の積分作用素で, 次の条件をみたすものを micro-local に構成したい。(注. 簡単~~な~~ 為 fiber 方向の変数は省略した)

1) $x' \in N$ のとき $K(z, x')$ は z について Γ^0 に対して適当な領域において正則

2) CR microfunction f に対して $\int K(z, x') f(x') dx'$ は f を定義する正則函数となる。すなわち、

$\int K(z, x') f(x') dx'$ の N への境界値を

$\int K(x, x') f(x') dx'$ で表わすことにすれば

$$f(x) = \int K(x, x') f(x') dx' \quad \text{が microfunction}$$

として成立する。

3) $f(x') \rightarrow \int K(x, x') f(x') dx'$ の値域は

$\ker \bar{\partial}_N$ と一致したまま、定義域を可能な限り大きくする。

注. $\bar{\partial}_N$ の解に特異性の伝播が起こるときは local operator ではなくなるので 2) 等は注意が必要。

次が成立する。

定理 2 [10].

Microlocal な意味で 強擬凸な場所では、上の様な積分核が 多変数函数論的方法で構成できる。

§2 H. Lewy 方程式の基本解

H. Lewy 方程式の microlocal な基本解は SKK で既に天下りの導入されている。又 河合先生の東大セミナー「線型偏微分方程式論序説」では complex phase の方法で構成されている。ここでは H. Lewy の方程式が 接 Cauchy-Riemann 方程式という 幾何的な方程式であることも利用した基本解の構成法を報告する。この方法は他の 接 CR 方程式系に対しても一般化が可能と思われる。

まず、H. Lewy 方程式が 接 CR 方程式となることを示そう。

$$N = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \rho = x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0\} \text{ と置く。}$$

$$\begin{aligned} [N]^{0,1} &= \delta(x_2 + x_1^2 + y_1^2) [2x_1 dx_1 + 2y_1 dy_1 + dx_2]^{0,1} \\ &= \delta(x_2 + x_1^2 + y_1^2) (z_1 d\bar{z}_1 + \frac{1}{2} d\bar{z}_2) \text{ となる。} \end{aligned}$$

N 上の函数 $h(x_1, y_1, y_2)$ に対して $\mathbb{C}^2$ 上の $(0, 1)$ form $i_* h$ を次で定める

$$i_* h = h(x_1, y_1, y_2) \delta(x_2 + x_1^2 + y_1^2) (z_1 d\bar{z}_1 + \frac{1}{2} d\bar{z}_2)$$

定義 h が CR 函数とは $\bar{\partial}(i_* h) = 0$ を満たすこと。

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(i_* h) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} (h \cdot \delta) d\bar{z}_1 \wedge (z_1 d\bar{z}_1 + \frac{1}{2} d\bar{z}_2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} (h \cdot \delta) d\bar{z}_2 \wedge (z_1 d\bar{z}_1 + \frac{1}{2} d\bar{z}_2) \end{aligned}$$

を計算すると

$$\bar{\partial}(i_* h) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial y_1} \right) - i(x_1 + iy_1) \frac{\partial}{\partial y_2} \right] h \right\} \delta d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$$

となる。従って h が CR 函数となる条件は

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial y_1} \right) - i(x_1 + iy_1) \frac{\partial}{\partial y_2} \right] h = 0$$

であるが、これは H. Lewy の方程式そのものである。

しかし、この方程式の形から N の幾何的様子も直接考察するのは困難であるから、座標系を取りかえたい。
その為に次の一般的結果を使おう。

定理 3 [8].

N^{2m-k} が X^n の generic CR 多様体とする。

$Y \subset N$ の複素化とすると $Y^{2m-k} \rightarrow X^n$ なる holomorphic map が自然に導かれるが

- 1) $Y^{2m-k} \rightarrow X^n$ は submersion.
- 2) fiber 方向の holomorphic なベクトル場 (一次独立なものは $(2m-k) - n = m-k$ 個) 達は接 CR 方程式系 $\bar{\partial}_Y$ (Y の複素化) に一致する。

H. Lewy 方程式の場合に上の主張が正しいことを確かめよう。

$N = \{(z_1, z_2) \mid x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0\}$ の媒介変数表示

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ (u_1, u_2, u_3) & & (x_1, y_1, x_2, y_2) \end{array}$$

$$\text{を } x_1 = u_1, \quad y_1 = u_2, \quad x_2 = -u_1^2 - u_2^2, \quad y_2 = u_3$$

で定める。

$\mathbb{R}^3 \ni (u_1, u_2, u_3)$ の複素化を $\mathbb{C}^3 \ni (w_1, w_2, w_3)$ と置く。この時、

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

の複素化

$$\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

は $z_1 = w_1 + iw_2$, $z_2 = -w_1^2 - w_2^2 + iw_3$ となる。

これは明らかに submersion となるが、その fiber 方向のベクトル場 $a \frac{\partial}{\partial w_1} + b \frac{\partial}{\partial w_2} + c \frac{\partial}{\partial w_3}$ を求めてみる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -2w_1 & -2w_2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を求めると、 $a = \frac{1}{2}$ のとき $b = \frac{1}{2}i$, $c = -i(w_1 + iw_2)$ となるので、求めるベクトル場は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w_1} + i \frac{\partial}{\partial w_2} \right) - i(w_1 + iw_2) \frac{\partial}{\partial w_3}$$

となり、確かに H. Lewy 方程式が得られた。

さて、先の定理は $\overline{\Omega}_H$ は複素領域で partial de Rham 型であることを意味している。従って fiber 方向の座標とすれば、 $\overline{\Omega}_H$ は定数係数の作用素に存在から、そのような座標系を求めてみよう。

$$Y = \mathbb{C}^3 = \{(z_1, w, z_2) \in \mathbb{C}^3\} \quad \text{とおく.}$$

$$\chi: \mathbb{C}^3 \longrightarrow Y \quad \text{を次で定める.}$$

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + iw_2 \\ w = w_1 - iw_2 \\ z_2 = -w_1^2 - w_2^2 + iw_3 \end{cases}$$

χ は biholomorphic 2 -次の図式'を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 \ni (w_1, w_2, w_3) & \xrightarrow{\chi} & (z_1, w, z_2) \in Y \\ \downarrow & & \downarrow \text{proj} \\ \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) & \xlongequal{\quad} & (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \end{array}$$

写像 proj の fiber 方向のベクトル場は $\frac{\partial}{\partial w}$ であるが、Lewy の作用素 $\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial w_1} + i\frac{\partial}{\partial w_2}) - i(w_1 + iw_2)\frac{\partial}{\partial w_3}$ は χ で $\frac{\partial}{\partial w}$ に移ることも確かめられる。

従って

補題 $Y = \{(z_1, w, z_2) \in \mathbb{C}^3\}$ において $\bar{D}_Y$ は $\frac{\partial}{\partial w}$ と等しい。

そこで, $\frac{2}{\omega}$ の基本解を (複素の世界で) Radon
の方法で形式的に求めると

$$E = \text{const} \int \frac{1}{\bar{z}} \cdot \frac{\omega(\zeta_1, \bar{z}, \zeta_2)}{\{(z_1 - z'_1)\zeta_1 + (\omega - \omega')\bar{z} + (z_2 - z'_2)\zeta_2\}^2}$$

となる。但し (z_1, ω, z_2) と dual な変数を $(\zeta_1, \bar{z}, \zeta_2)$
と書いた。

命題。 (w_1, w_2, w_3) 座標で E を表わすと SKK. にあ
いて, H. Lewy 方程式の基本解として与えられたものを
複素化したものと一致する。

実際 $T^*\mathbb{C}^3 \ni (w_1, w_2, w_3; \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ と

$T^*\mathbb{C} \ni (z_1, \omega, z_2; \zeta_1, \bar{z}, \zeta_2)$ とは

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}\omega \\ w_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}\omega \\ w_3 = -iz_1\omega - iz_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{z}_1 = \zeta_1 + \bar{z} - 2w_1\zeta_2 \\ \bar{z}_2 = i\zeta_1 - i\bar{z} - 2w_2\zeta_2 \\ \bar{z}_3 = i\zeta_2 \end{cases}$$

なる関係があるので

$$\begin{aligned}
& (z_1 - z_1') \zeta_1 + (w - w') \zeta_3 + (z_2 - z_2') \zeta_2 \\
& = (w_1 - w_1') \bar{z}_1 + (w_2 - w_2') \bar{z}_2 + (w_3 - w_3') \bar{z}_3 \\
& \quad + i \bar{z}_3 \left\{ (w_1 - w_1')^2 + (w_2 - w_2')^2 \right\}
\end{aligned}$$

及び

$$\bar{z}_3 = \frac{1}{2} (\bar{z}_1 + i \bar{z}_2) - i (w_1' + i w_2') \bar{z}_3$$

等が容易に確かめられる。

従って E を実領域に境界値を取って microlocal に正しく意味付けられれば、求める基本解が構成できたことになる。さて Σ も N の複素化であるが、 N は $X(\mathbb{R}^3)$ として Σ に埋め込まれているのだから、 $X(\mathbb{R}^3)$ を求めると

補題 $X(\mathbb{R}^3) = \{(z_1, w, z_2) \mid \bar{z}_1 = w, x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0\}$

を得る。従って E を意味付けるには $\bar{z}_1 = w$ に境界値をとり、更に $x_2 + x_1^2 + y_1^2 = 0$ に境界値をとる必要がある。

さて、 E は $\frac{\partial}{\partial w}$ の基本解だから $w = \bar{z}_1$ とすれば E は $\frac{\partial}{\partial z_1}$ の基本解となる。従って

$$E = \text{const} \frac{1}{z_1 - z_1'} \times (\text{残りの変数に関する } \delta\text{-函数})$$

となるが、空間 $x_2 + x_1^2 + y^2 = 0$ が曲がっている為
普通の δ -函数の形ではなく定理2で述べたものにな
る。今の場合

$$\frac{1}{z_2 - z_2' + 2(z_1 - z_1')\overline{z_1'}}$$

となる。実際、Cauchy-Fantappie' 核の因子
 $(z_1 - z_1')\zeta_1 + (z_2 - z_2')\zeta_2$ において $\zeta_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1'} = \overline{z_1'}$
 $\zeta_2 = \frac{\partial f}{\partial z_2'} = \frac{1}{2}$ を代入すれば上の形が得られる。

結局

$$E = \text{const} \frac{1}{z_1 - z_1'} \cdot \frac{1}{z_2 - z_2' + 2(z_1 - z_1')\overline{z_1'}}$$

の形が得られるが、 $x_2 + x_1^2 + y^2 = 0$ が強擬凸境界
面であることから、第2の因子には microlocal な意味付
けが自然に入る。

この様にして得られた E は SKK で構成しており
H. Lewy 方程式の基本解と一致する。

以上。

文献

1. Р.А. Айрапетян, Г.М. Хенкин Интегральные представления дифференциальных форм на многообразиях Коши-Римана и теория CR-Функций, Успехи Мат. Наук. т. 39 (1984) pp. 39 - 106
2. M.S. Baouendi, C.H.T. Chang and F. Treves Microlocal hypo-analyticity and extension of CR-functions, J. Diff. Geom., 18 (1983), pp. 331 - 391
3. L. Fantappi  Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones, Barcelona 1943
4. H. Lewy An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. of Math., 66 (1957) pp.155 - 158
5. ——— On hulls of holomorphy, Comm. Pure and Appl. Math. 13 (1960), pp. 587 - 591
6. P. Schapira Conditions de positiv  dans une variété symplectique complexe. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), pp. 121 - 139
7. J. Sjöstrand Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982), pp. 1 - 166
8. S. Tajima Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Publ. RIMS, 18 (1982) pp. 911 - 945
9. ——— Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème de Lewy pour les solutions hyperfonctions   paraître
10. ——— H.Lewy 現象と再生核, 京都大学数理解析研究所講究録「偏微分方程式系の局所・非局所変換理論」