

Local Density of Entropy Production – Groupoid による動力学変形法 –

小嶋 泉 (京都大学数理解析研究所)

Abstract

相対論的量子場の「局所熱的状态」の理論枠で, groupoid dynamical system に基づく「動力学変形法」を用いて「エントロピー生成密度」を Radon-Nikodym 微分として定式化する。

「一般化エントロピー」とは通常 α -divergence や非加法的エントロピーを念頭に置いて用いられる言葉だが, 以下で論ずるのは, 普段あまり扱われる機会の少ないエントロピーの局所的生成を巡って,

1) 相対論的量子場の「局所熱的状态」の枠組 [1] に基づき,
2) groupoid dynamical system に基づく「動力学変形法」(IO, in progress) を用いて,

3) 「エントロピー生成」[2, 3] の local density を定式化する, という試みである。3) の“local density”の扱いでは, 量子電気力学展開の冒頭で提起され, 以後殆ど利用されることなく「宝の持ち腐れ」に終わった朝永「超多時間形式」[4] が, ここでは不可欠の概念として有効に機能するという点を強調したい。ただし, 本研究会のテーマにある「函数解析学による」という部分について, 1), 2) でそれは不可欠の役割を果たすが, 3) を数学的に厳密に意味づけることは今後の課題として残されている。

まず 1), 2) を簡単に説明しよう。

1) 非平衡局所状態の定式化

i) [未知の対象] = [非平衡局所状態として同定されるべき状態 ω]。

我々が吟味の対象とする未知状態の集まり i) はこの場合,

$$E_O := \{\omega \in E_A; \exists m > 0 \text{ s.t. } \omega((1 + H_O)^{2m}) < \infty\} (\supset K),$$

として与えられる。ただし, 作用素 H_O は有界時空領域 O 内で Hamiltonian の役割をする positive operator, K は次項 ii) で述べる大域的熱平衡状態およびその統計的混合から成る「熱的基準状態の族」である。局所的に熱力学的解釈を許す状態 ω は局所的に有限なエネルギーを持つので, 条件 $\omega((1 + H_O)^{2m}) < \infty$ は常に満たされる。状態の族 $O \mapsto E_O$ は presheaf (前層) をなし, O を 1 点 x に縮める (射影) 極限 $E_x (= \varprojlim_{O \rightarrow x} E_O)$ は同値関係

$$\omega_1 \sim \omega_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists O: x \text{ の近傍 s.t. } \omega_1 \upharpoonright_O = \omega_2 \upharpoonright_O$$

で定まる局所状態の「芽」として「1点での状態」を与える。

ii) [既知の基準系] = あらゆる可能な温度 β に互る大域的熱平衡状態 $\omega_{\beta,\mu}$ およびその統計的混合 $\omega_\rho = \int d\rho(\beta, \mu) \omega_{\beta,\mu}$ の全体から成る「熱的基準状態の族」 $K = \{\omega_\rho; \rho \in Th\}$, ただし, $Th := M_1(B_K)$ は熱的パラメータ $(\beta, \mu) \in B_K$ の揺らぎを記述する確率測度の集合で, B_K は全ての熱力学的純粋相を枚挙し識別するための熱的パラメータの空間。

iii) [i) と ii) の比較]: 対象とする未知状態 $\omega \in E_x$ において, 局所熱的観測量 (local thermal observables) $A \in \mathcal{T}_x := \sum_{p,q} \mathcal{N}(\hat{\phi}_0^p)_{q,x}$ [=各時空点での熱的性質を検知する量子論的物理量] を測定し, その測定値を ii) で得たデータ表と比べる。ここで「1点における量子場」 $\hat{\phi}(x)$ は

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} (1+H)^{-m} \hat{\phi}(\delta_i) (1+H)^{-m} \\ & =: (1+H)^{-m} \hat{\phi}(x) (1+H)^{-m} \end{aligned}$$

で数学的に意味づけられ, 状態 $\omega \in E_x$ における期待値 $\omega(\hat{\phi}(x))$ が, $\omega((1+H_0)^{2m}) < \infty$ の条件により正当化される。ただし, $\exists m > 0, \{\delta_i\}$ は1点 x 上の Dirac 測度 δ_x に収束する test function の列 $\delta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \delta_x$ 。

$\mathcal{N}(\hat{\phi}_0^p)_{q,x}$ は数学的に厳密化された演算子積展開 (OPE) に現れる「正規積」の空間で, $p=2$ の場合, $\zeta=0$ 近傍での $\hat{\phi}(x+\zeta)\hat{\phi}(x-\zeta)$ の展開で ζ の c -数特異関数の係数として定義される。これは「1点における量子場」の定義で失われた積構造を effective に回復するもの。

量子的な局所熱的観測量に古典的マクロ物理量である熱函数を対応づける写像 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} : \mathcal{T}_x \ni A \mapsto \mathcal{C}(A) := [(\beta, \mu) \mapsto \omega_{\beta,\mu}(A)] \in C(B_K)$$

で定義し, その双対写像 $\mathcal{C}^* : Th \ni \rho \mapsto \mathcal{C}^*(\rho) \in K$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*(\rho)(\hat{A}) &= \rho(\mathcal{C}(\hat{A})) = \int_{B_K} d\rho(\beta, \mu) \omega_{\beta,\mu}(\hat{A}), \\ \Rightarrow \mathcal{C}^*(\rho) &= \int_{B_K} d\rho(\beta, \mu) \omega_{\beta,\mu} = \omega_\rho \in K \end{aligned}$$

を考えると, $\mathcal{C}^*$ は量子情報理論で classical-quantum ($c \rightarrow q$) channel と呼ばれる写像で, 温度ゆらぎの古典確率 $\rho \in M_1(B_K) =: Th$ を熱的基準状態系に属する量子状態 $\mathcal{C}^*(\rho) \in K$ に変換する。そして, $K = \mathcal{C}^*(Th)$ が成り立つだけでなく, K, Th 上の同値関係

$$\begin{aligned} \omega_1 &\stackrel{\equiv}{\mathcal{T}_x} \omega_2 \iff (\omega_1 - \omega_2)(\mathcal{T}_x) = \{0\}, \\ \rho_1 &\stackrel{\equiv}{\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)} \rho_2 \iff (\rho_1 - \rho_2)(\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)) = \{0\} \end{aligned}$$

と $\rho_i \in Th, \omega_{\rho_i} = \mathcal{C}^*(\rho_i) \in K$ に対して

$$\omega_{\rho_1} \stackrel{\equiv}{\mathcal{T}_x} \omega_{\rho_2} \iff \rho_1 \stackrel{\equiv}{\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)} \rho_2$$

が成り立ち、 K 上では $c \rightarrow q$ channel C^* の逆が取れる：

$$K \ni \omega_\rho = C^*(\rho) \longleftrightarrow (C^*)^{-1}(\omega_\rho) = \rho \in Th.$$

基準量子状態 K の熱力学的解釈はこの $q \rightarrow c$ channel $(C^*)^{-1}$ によって与えられる。これを量子状態 $\omega \in E_x$ と確率測度 $\rho \in Th$ の関係として次の形に書き換えよう：

$$E_x / \mathcal{T}_x(\omega, C^*(\rho)) \stackrel{q \leftrightarrow c}{\simeq} Th / \mathcal{C}(\mathcal{T}_x)((C^*)^{-1}(\omega), \rho).$$

その意味は、量子状態 $\omega \in E_x$ が物理量 $\mathcal{T}_x$ の測定に関して基準状態 $C^*(\rho) = \int_{B_K} d\rho(\beta, \mu) \omega_{\beta, \mu} \in K$ と同一視可能： $\omega \stackrel{\mathcal{T}_x}{\equiv} C^*(\rho)$ [左辺]，という形で設定された **selection criterion** をパスすれば、直ちにそれは $q \rightarrow c$ channel $(C^*)^{-1}$ によって Th 上の同値関係 $(C^*)^{-1}(\omega) \stackrel{\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)}{\equiv} \rho$ [右辺] に翻訳され、この確率測度 $\rho \in Th$ が状態 ω の熱力学的解釈を与える、という仕組みをひとまとめに表わす。これは圏論で **adjunction** と呼ばれ、対象の同定（左側）とその分類（右側）の目的に有効な役割を演ずる概念装置に他ならない。ここでは圏の特殊例として同値関係 $\stackrel{\mathcal{T}_x}{\equiv}$ ， $\stackrel{\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)}{\equiv}$ に付随する **groupoid**（後述）にそれを適用している。

即ち、[平衡状態の統計的混合から成る基準状態族 K を持つ量子場の統計力学] と、[熱的パラメータの空間 B_K 上でのゆらぎを表わす確率測度の集合 Th で記述された巨視的熱力学] という2つの異なるレベル・領域が、2つの channel, $c \rightarrow q$ (C^*) & $q \rightarrow c$ ($(C^*)^{-1}$), で結ばれ、それによって、

- a) 熱的基準系 K の同定 (**selection criterion**): $c \rightarrow q$ channel C^* の像 $\omega_\rho = C^*(\rho)$ として、
- b) 選ばれた基準状態 $\omega_\rho \in K$ の熱力学的解釈：古典的データ $\Phi_x = C(\hat{\Phi}(x))$ & $\rho = (C^*)^{-1}(\omega_\rho)$ を基本語彙として、

という2つの課題が同時に達成される、という基本構図である。これは、選別と解釈の **matching** ということにほかならない。[局所熱状態の判定基準と同定・解釈]: 「階層化された局所的熱力学第0法則」の成立不成立を判定し、それが満される場合、自動的にマクロの熱力学量に基づく量子状態の熱力学的記述・解釈が次のように実現される。 K に入らない非平衡状態 $\omega \notin K$ を取り込むため、 ω と或る基準状態 $\exists C^*(\rho_x) \in K$ との一致を、 $\mathcal{T}_x$ 全体ではなくその適当な部分空間 S_x にまで緩め、**Selection criterion** $\omega \stackrel{S_x}{\equiv} C^*(\rho_x)$ for

S_x -thermal state $\omega \in E_x$, 即ち、未知状態 ω が S_x 内の物理量 $\hat{\Phi}(x) \in S_x$ に関して基準状態 $C^*(\rho_x)$ と同じに見える、という条件を課す。

このとき、確率測度の正值性を犠牲にすれば iii) の $(C^*)^{-1}$ を

$$(C^*)^{-1}(\omega) := \{\nu \in C(B_K)^*; \nu = \nu_+ - \nu_-, \nu_\pm \geq 0, \\ \nu_- \upharpoonright_{\mathcal{C}(S_x)} = 0, C^*(\nu_+) \upharpoonright_{S_x} = \omega \upharpoonright_{S_x}\}$$

によって $\omega \notin K$ にまで広げ, 関係

$$\begin{aligned} \exists \nu = \nu_+ - \nu_- \in (C^*)^{-1}(\omega) \text{ with } \nu_- = 0 \\ \iff (C^*)^{-1}(\omega) = \{\nu\} \subset Th \iff \omega \in K \\ \iff \max\{S'_x \subset \mathcal{T}_x; C^*(\nu_+) \upharpoonright_{S'_x} = \omega \upharpoonright_{S'_x}\} = \mathcal{T}_x \end{aligned}$$

を通して, $\omega \notin K$ を**正值性の破れ** $\nu_- \neq 0$, として端的に表現できる。そして

Proposition 1 ([5]) $\omega \in E_x$, $\rho_x \in Th$ と部分空間 $S_x (\subset \mathcal{T}_x)$ に対して次の *groupoid* 同型が成立:

$$E_x/S_x(\omega, C^*(\rho_x)) \stackrel{q \leftarrow c}{\simeq} Th/C(S_x)((C^*)^{-1}(\omega), [\rho_x]),$$

ただし, $[\rho_x] := \{\sigma \in Th; \sigma \upharpoonright_{C(S_x)} = \rho_x \upharpoonright_{C(S_x)}\}$ 。

上の両辺が空でない $\rho_x \in Th$ の存在が状態 ω の S_x -thermalitiy である。 $\nu_- \neq 0$ が物理的に意味するのは, S_x 以外の局所熱的観測量も含めた詳しい測定をすると ω の $C^*(\rho_x)$ からの乖離が露わになり, “1 点 x ” においてすら ω が平衡からズレているのが明らかになる, ということである。

S_x を動かす自由度を通じて, 局所的に多様な熱的性質を持つ状態が同定可能となる。例えば, S_x を適切に選んで, 局所熱的観測量として**ゆらぎの分散**に対応した物理量を取り込み, 特定の熱函数 Φ が状態 ω においてゆらぎなしの定まった値をとるか, 統計的にゆらいでいるかを判定できる。一般に有限次元の S_x を用いて局所的に温度の定まった状態 $\omega \equiv_{S_x} \omega_{\beta(x)}$ ($\exists$ 4-vector $\beta(x) \in V_+$)

を選び出すことができ, 各 $\hat{\Phi}(x) \in S_x$ に対応する熱函数 $\Phi_x = C(\hat{\Phi}(x))$ は全て, この状態 ω でゆらぎのない定まった値を局所的に持つ。こうして, 統計力学では天下りに与えた人為的パラメータでしかなかった (逆) 温度 β が, 現実世界でと同様に, 測定を通じて決定されるべき一人前の物理量となる。このように, 局所熱的観測量の部分空間 S_x を選び, それに対応した局所熱的性質を調べることは, 「粗視化」の手法を与える。よってこの階層は, 非平衡から平衡への漸近の議論で扱われるスケールに基づく熱的状态の階層や粗視化の階層とも深くつながる。

以上の議論を 1 点 x から (有限の広がりを持った) 時空の部分領域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ へ拡張すれば, 領域 $\mathcal{O}$ 内で熱力学的解釈を持つ局所状態の扱いが可能になる。各領域での熱的物理量の集合 S_x ($x \in \mathcal{O}$) を時空並進 α_x でつないで同一視し,

$$S_x := \alpha_x(S_0), \quad x \in \mathcal{O},$$

各 $x \in \mathcal{O}$ 毎に $\omega \equiv_{S_x} \omega_{\beta(x)}$ が成り立つとき, 状態 ω は領域 $\mathcal{O}$ で $S_{\mathcal{O}}$ -thermal であるということにすれば, 熱函数 Φ の平均値の時空的振舞は, 函数 $\mathcal{O} \ni x \mapsto \omega(\Phi)(x) = \omega(\hat{\Phi}(x))$ で記述される。これによりミクロの動力学 [dynamics α_x] と, 巨視的熱的レベルの時空発展 [evolution $x \mapsto \omega(\Phi)(x)$] の間が自然に橋渡しされ, それによって状態の熱的動力学 = *thermo-dynamics* が実現する。これで漸く多様体論と同じレベルの記述に到達した! : 小さな有限の広が

りを持った時空領域での局所的記述を寄せ集め、その全体 = atlas によって大域的時空での振舞を論ずる、という道が開けるのである。

この枠組では、平衡からのズレには少なくとも次の3つのパターンがある：

a) 温度分布 $x \mapsto \beta(x)$ に代表される熱的パラメータの時空依存性 (K の枠内) [$\Rightarrow$ 多熱浴系へ],

b) 確率分布 $d\rho_x(\beta) \in Th$ で記述される1点 x での熱的パラメータの統計的ゆらぎ (K の枠内),

c) S_x -thermal な局所的量子状態 ω の熱的解釈を与える測度 $\nu = \nu_+ - \nu_- \in (C^*)^{-1}(\omega) \subset C(B_K)^*$ における正值性の破れ $\nu_- \neq 0$ によって記述される一般化平衡領域 K からの本質的なズレ (K の埒外)。

2) Groupoid dynamical system に基づく「動力学変形法」

相対性理論では、同じ一つの物理系を記述する座標系を相対化し複数化することで、それらを Lorentz 変換、一般座標変換を通じて操作・変形・比較することが可能だった。それと同様の考え方で動かす自由度を更に拡張し、物理系の動力学そのものを相対化することで、物理系の動力学を取り替えたり変形したりして、それらを相互に比較する自由度を獲得することによって、これまで我々を呪縛してきた「fixed dynamics を持つ一つの物理系」という固定観念を脱するならば、

(((似ているけれど少しずつ) 異なった力学法則を持つ複数の物理系とその物理学諸理論をひとまとめに並べ、それらの相互関係、それらの間の変形論的・進化論的關係を systematic に論ずるための理論、「複数の諸理論を扱う理論の枠組」))

が可能になる (：この考え方の essence は、“Theory Bundle” の呼称で以前、提示したことがある [6])。

これは、決して根拠のない「空想物語」、「サイエンス・フィクション」ではなく、制御過程、制御理論の文脈で物理系を扱う時には当然のこととして考慮・実行されている問題だが、我々の外部に客観的に存在する自然を正確に記述する、という理論物理学の伝統的スタンスからは異端視され兼ねない考え方かもしれない。

亜群 (groupoid) Γ とは？：

集合 $\Gamma^{(0)}$ および2つの写像 $s, t : \Gamma \rightarrow \Gamma^{(0)}$ があって $t(\gamma) = x, s(\gamma) = y$ のとき、 $x \xleftarrow{\gamma} y$ と書くことにすると、

R1) 任意の $x \in \Gamma^{(0)}$ に対して、 x を x に移す単位射 1_x が存在する：
 $x \xleftarrow{1_x} x$,

R2) $x \xleftarrow{\gamma} y$ ならば $y \xleftarrow{\gamma^{-1}} x$ となる逆射 $\gamma^{-1} \in \Gamma$ が存在する、

R3) $x \xleftarrow{\gamma_1} y, y \xleftarrow{\gamma_2} z$ ならば γ_1 と γ_2 の合成射 $\gamma_1 \gamma_2$ が存在して $x \xleftarrow{\gamma_1 \gamma_2} z$ 。
関係を $R(x, y) = (\exists \gamma \in \Gamma \text{ such that } x \xleftarrow{\gamma} y)$ と書けば、R1), R2), R3) は各々、関係 R に関する対称律、反射律、推移律と等価なことが容易に分かる。

つまり、亜群とは同値関係の代数的定式化に他ならない。R2) のゆえ、同値関係 $R(x, y)$ は x, y について対称的だが、方向性を持った関係（例えば、順序関係、時間の矢）の扱いをも視野に入れて、 $R(x, y)$ に対応する矢印 $x \xrightarrow{\gamma} y$ には方向性を持たせておく。この射 γ の「全体」を亜群 Γ と呼び、射 $\gamma \in \Gamma$ の働き $x \xrightarrow{\gamma} y$ によって結び付けられる x, y などの集まりを亜群 Γ の「単位空間 (unit space)」 $\Gamma^{(0)}$ 、 $x \xrightarrow{\gamma} y$ における $y \in \Gamma^{(0)}$ を γ の始点 (または、source) と呼んで $s(\gamma) = y$ と書く一方、 $x \in \Gamma^{(0)}$ を γ の終点 (または、target) と呼んで $t(\gamma) = x$ と書く。

この見方によって、亜群 Γ は、射 (arrows) が全て可逆であるような圏 (category) (の特別の場合) と見ることができる。すると、unit space $\Gamma^{(0)}$ は、圏としての Γ の対象 (objects) 全体 (がなす集合) と見ることができ、R1) は object $x \in \Gamma^{(0)}$ とそれに対応した identity arrow 1_x 、R3) は圏 Γ の射の始点・終点と射の合成に関する説明であり、R2) が圏としての亜群 Γ に属する全ての射が可逆であることを言い表わす。

亜群が群の拡張概念で、群は亜群の特殊例になっていることは容易に確認できる： そのためには、群 G に対して或る「仮想的な」object $*$ を1個用意し、 G の任意元 $g \in G$ を全て、この仮想 object $*$ を $*$ それ自身へ移す可逆な射 (arrows) $* \xrightarrow{g} *$ と見ることによって、この圏と元の群 G とが同型な亜群であることは容易に確認される。一般的な亜群と群との重要な違いは、群の元の任意対 $(g_1, g_2) \in G \times G$ が常に合成可能 (composable) : $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$ なのに対して、

亜群の元の対 $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma \times \Gamma$ に積 $\gamma_1 \gamma_2$ が定義されるのは、条件 $s(\gamma_1) = t(\gamma_2)$ が満たされる時だけ、という点である： $\gamma_1 \gamma_2 = [t(\gamma_1) \leftarrow s(\gamma_1) = t(\gamma_2) \leftarrow s(\gamma_2)] = [t(\gamma_1) \xrightarrow{\gamma_2} s(\gamma_2)]$ 。

この条件を満たす合成可能な元の対 (γ_1, γ_2) 全体は $\Gamma^{(2)}$ と書かれる：

$$\Gamma^{(2)} := \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma \times \Gamma; s(\gamma_1) = t(\gamma_2)\} = \Gamma \times_{\Gamma^{(0)}} \Gamma$$

任意の $x, y \in \Gamma^{(0)}$ に対して $\Gamma_{xy}^x := \{\gamma \in \Gamma; t(\gamma) = x, s(\gamma) = y\} = \Gamma(x \leftarrow y)$ と書くと、 $\Gamma_{xy}^x \subset \Gamma^{(2)}$ ゆえに Γ_{xy}^x はその元の任意対が常に合成可能で、群になる： 群 $\Gamma_{xy}^x \subset \Gamma$: 亜群。

外場との coupling の亜群による 共変的定式化

この方法を用いると、時間的に変化する外場中に置かれた物理系の「エントロピー生成」を整合的に定式化できる。今ここでの我々の議論に必要な式だけを取り出せば、外場の摂動を受けた系の時間発展は、

$$\frac{d}{dt} \alpha_{s,t;\mathbf{X}}(B) = \alpha_{s,t;\mathbf{X}}(\delta(B) + [H_I(t), B])$$

$$\alpha_{s,t=s;\mathbf{X}} = Id_{\mathcal{A}}.$$

ただし、外場 $\mathbf{X}$ が働く以前の系の動力学はその generator を δ として $\alpha_t = e^{t\delta}$ で与えられ、外場との結合を記述する相互作用項を $H_I(t) = \alpha_t(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}(t)$ と書いた。 $\mathbf{X}$ の時間依存性に由来する groupoid dynamics は $U(t, s; \mathbf{X}) \equiv \text{Texp}\{i \int_s^t d\tau \alpha_\tau(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{X}(\tau)\}$ によって、 $\alpha_{s,t;\mathbf{X}}(B) \equiv \alpha_{-s}[U(t, s; \mathbf{X})^* \alpha_t(B) U(t, s; \mathbf{X})]$ と表わされる。この時、時刻 t における系の状態 φ_t は、 $\varphi_t = \varphi_{t_0} \circ \alpha_{t_0,t;\mathbf{X}}$ で

与えられ、相対エントロピー $S(\varphi_t|\varphi_{t_0} = \omega_\beta)$ は

$$S(\varphi_t|\varphi_{t_0} = \omega_\beta) = \beta \int_{t_0}^t ds \varphi_s(\delta(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{X}(s) \geq 0$$

本質的にはこの表式の時間微分がエントロピー生成に相当するのだが、時間積分された $S(\varphi_t|\varphi_{t_0} = \omega_\beta)$ の正値性に対して、その微分の正値性は保証されないため、正定値のエントロピー生成として我々が採用したのは、

$$\bar{P} \equiv \beta \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^0 dt_0 S(\varphi_{T+t_0}|\varphi_{t_0} = \omega_\beta) \geq 0$$

であり、これが正値性を満たす averaged time derivative であることの正当化の議論が '88, '89 の論文 [2, 3] の内容の半ばをなしている（残りは、「非平衡定常状態」の定式化に関わる）。

この議論自身は既に「大昔」の話であり、またその内容も、2000 年前後以降、Jaksic-Pillet, Jaksic-Ogata-Pillet 等の議論を通じて流線型化されているので、ここでそれを繰り返すことは控えたい。

3) 「エントロピー生成」の local density とは？

それよりも我々の目標は、「エントロピー生成」の local density を定式化することだった。その目的に役立つ式が [3] に書いた次の式である：

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^0 dt_0 S(\varphi_{T+t_0}|\varphi_{t_0}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_X} d\mu(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi_0(\alpha_{0,t;\xi}(\beta\delta(\mathbf{A}))) \cdot \hat{\mathbf{X}}(\xi-t) \frac{\chi_{[0,T_n]}(t)}{T_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_X} d\mu(\xi) \int d\nu^\xi(\gamma) \varphi_0(\alpha_\gamma(\beta\delta(\mathbf{A}))) \cdot \hat{\mathbf{X}}(s(\gamma)) f_n(\gamma). \end{aligned}$$

ただし、initial time average $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^0 dt_0$ は、外場 $\mathbf{X}$ に概周期性の条件を課して、それが満たす ergodicity により hull M_X 上の相平均 $\int_{M_X} d\mu(\xi)$ に置き替え、外場 $\mathbf{X}$ と couple した系の動力学を M_X を unit space $\Gamma^{(0)}$ に持つ groupoid $\Gamma = \mathbb{R} \times M_X$ を用いて groupoid dynamical system として書替えている。

$f_n(\gamma) := f_n(t, \xi) = \chi_{M_X \times [0, T_n]}(t)/T_n$ はその support の volume での時間平均を表わし、 $d\nu^\xi(\gamma)$ は Γ 上の transverse function, $d\mu(\xi)$ は $\Gamma^{(0)}$ 上の transverse measure ゆえ、上の式は groupoid 上の invariant measure $\Lambda = \mu \circ \nu$ によって密度量 $\varphi_0(\alpha_\gamma(\beta\delta(\mathbf{A}))) \cdot \hat{\mathbf{X}}(s(\gamma)) f_n(\gamma)$ を積分する式になっている。非平衡状態に intrinsic な熱力学的パラメータの時空的不均一性に由来する非自明な centre= sector 構造の存在並びにそれに由来する中心分解= sector

分解と時空積分との内的つながり, という見方を一般化すれば, エントロピー生成密度 $j(x, \xi)$ ($\gamma = (x, \xi) \in \mathbb{R}^4 \times \Gamma^{(0)}$) は,

$$j(x, \xi) = \frac{\delta[S(\omega_{\beta(x)} \circ \alpha_\gamma)|\omega_{\beta(x)})]}{\delta\sigma(x)}$$

という形を取ることが期待される。ただし, $\beta(x)$ は B-O-R formalism [1] での局所逆温度。 $\delta\sigma(x)$ は, 朝永超多時間理論での解釈に従って spacelike hypersurface の族 σ の上の 1 点 x の近傍で微小な timelike 変分を施した時の 4 次元微小体積であり, 数学的には Radon-Nikodym 微分として了解される。よって, エントロピー生成密度, あるいは, 種々の熱力学・統計力学的量を局所化した密度概念は, このような Radon-Nikodym 微分の形で一般的に扱えるのではなかろうか?

References

- [1] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, *Ann. Phys. (N.Y.)* **297**, 219 - 242 (2002).
- [2] Ojima, I., Hasegawa, H. and Ichiyanagi, M., Entropy Production and its Positivity in Nonlinear Response Theory of Quantum Dynamical Systems, *J. Stat. Phys.* **50** (No.3/4), 633-655 (1988).
- [3] Ojima, I., Entropy Production and Nonequilibrium Stationarity in Quantum Dynamical Systems: Physical Meaning of van Hove Limit, *J. Stat. Phys.* **56** (No.1/2), 203-226 (1989); Entropy Production and Nonequilibrium Stationarity in Quantum Dynamical Systems, pp.164-178 *in* Proceedings of International Workshop on Quantum Aspects of Optical Communications (Nov.1990, Paris, France), Lecture Notes in Physics No.378, Springer-Verlag, 1991
- [4] Tomonaga, S., On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Progress of Theoretical Physics.* **1**, 27-39 (1946).
- [5] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, *Open Systems and Information Dynamics*, **10**, 235-279 (2003) (math-ph/0303009).
- [6] Ojima, I., Lévy Process and Innovation Theory in the context of Micro-Macro Duality, 15 December 2006 at The 5th Lévy Seminar in Nagoya, Japan.