

H^p による平面領域の分類

茨城大・理 荷見 守助

1. 序. 平面領域即ち Riemann 球面 S の連結開集合を Hardy 族 H^p を用いて分類する問題についての最近の結果を述べる. 平面領域全体のなす集合族を $\mathcal{D}$ と書く. 任意の $D \in \mathcal{D}$ と実数 $0 < p < \infty$ に対し $H^p(D)$ により D 上の正則関数 f の $|f|^p$ が D 上で調和優関数を持つものの全体の集合を表はす. D が単位開円板の時はこの定義が古典的な Hardy 族を与えることは周知である. 分類論の記法に従って $\mathcal{O}_p = \{D \in \mathcal{D} : H^p(D) = \{\text{定数}\}\}$ とおく. $\mathcal{O}_p$ に属する D を特徴付ける問題は極めて興味があるが, 可成難しいと思はれる. そこで相異なる p, q に対する $\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_q$ の関係を調べることにする. $q < p$ ならば $H^q(D) \supseteq H^p(D)$ であるから, $\mathcal{O}_q \subseteq \mathcal{O}_p$ は直ぐ分る. 更に $\mathcal{O}_p^- = \bigcup_{q < p} \mathcal{O}_q$, $\mathcal{O}_p^+ = \bigcap_{q > p} \mathcal{O}_q$ とおけば次の事は容易である:

(1) $\mathcal{O}_G \subseteq \mathcal{O}_{LA} \subseteq \bigcap_{q > 0} \mathcal{O}_q \subseteq \mathcal{O}_p^- \subseteq \mathcal{O}_p \subseteq \mathcal{O}_p^+ \subseteq \bigcup_{q < \infty} \mathcal{O}_q \subseteq \mathcal{O}_{AB}$.
但し, $D \in \mathcal{D}$ に対し $AB(D) = \{D \text{ 上の有界正則関数}\}$, $LA(D)$

$= \{f: f \text{ は } D \text{ 上で正則で, } \log^+ |f| \text{ は } D \text{ 上で調和優函数を持つ}\}$
 で, $\mathcal{O}_{AB} = \{D \in \mathcal{P}: AB(D) = \{\text{定数}\}\}$, $\mathcal{O}_{LA} = \{D \in \mathcal{P}: LA(D) = \{\text{定数}\}\}$
 である. $\mathcal{O}_G$ は Green 函数のない $D \in \mathcal{P}$ の全体を表はす. (1)
 の包含関係の中で $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{LA}$ は既知なのでその他を考察する.
 統一的に考える為に Orlicz 族を導入する. 先づ, $[0, \infty)$ 上で
 定義された実函数 $\varphi(t)$ が Orlicz 函数 であるとは, φ が連続,
 非減少, 非定数で $\varphi(0) = 0$ 且つ $\varphi(e^t)$ が凸函数であることを
 云ふ. Orlicz 函数 φ と $D \in \mathcal{P}$ に対し, $H^\varphi(D) = \{f: f \text{ は } D \text{ 上で}$
 $\text{正則で, } \varphi(|f|) \text{ は } D \text{ 上で調和優函数を持つ}\}$ とおく. 例へば
 $\varphi(t) = t^p$ ならば $H^\varphi = H^p$, $\varphi(t) = \log^+ t$ ならば $H^\varphi = LA$ であ
 る. $\mathcal{O}_\varphi = \{D \in \mathcal{P}: H^\varphi(D) = \{\text{定数}\}\}$ とおく.

定理 1. φ, ψ を Orlicz 函数とする. 任意の $\alpha > 0$ に対し
 $\psi(\alpha t) / \varphi(t) \rightarrow 0 \ (t \rightarrow +\infty)$ が成立つ時は, $\mathcal{O}_\psi \subsetneq \mathcal{O}_\varphi$.

定理の証明を応用して, $D \in \mathcal{O}_\varphi$ 且つ $\dim H^\psi(D) = \infty$ (しかも
 H^ψ は真性特異点を持つ函数を含む) なる D を作る事が出来
 る. 又 $AB(D)$ が充分多くの函数を含む (例へば $AB(D) \cong AB(\text{単位円板})$) としても, $AB(D)$ の Hilbert 空間 $H^2(D)$ の中での直交
 補空間が無限次元になり得る.

以前の結果について述べておく. Hardy 族による分類論に於
 ける最初の著しい結果は Weiss [] で, Riemann 面の族の範囲
 では (1) の包含関係は全て不等号であることが示されたが,

平面領域については $\mathcal{O}_{LA} \subsetneq \mathcal{O}_1$ を示したに止った。平面領域に関する本質的な進歩は Hejhal [] により,

$\mathcal{O}_{LA} \subsetneq \mathcal{O}_1^- \subsetneq \mathcal{O}_1 \subsetneq \mathcal{O}_{3/2}^- \subsetneq \mathcal{O}_{3/2} \subsetneq \mathcal{O}_2^- \subsetneq \mathcal{O}_2 \subsetneq \mathcal{O}_{5/2}^- \subsetneq \mathcal{O}_{5/2} \subsetneq \dots \subsetneq \bigcup_{\ell < \infty} \mathcal{O}_\ell \subsetneq \mathcal{O}_{AB}$ が示された。其後, 小林昇治 [] により $1 \leq n/2 < p$ (n は整数, p は実数) ならば $\mathcal{O}_{n/2} \subsetneq \mathcal{O}_p$ が注意された。小林氏は亦 $p \geq 1$ に対する不等関係を証明された由であるが未発表である。一方 Heins に続いて Obrock [] は Orlicz 族による Riemann 面の分類を試み次の結果を得た。“ φ, ψ が Orlicz 函数で $\int_0^\infty \psi(\alpha \varphi^{-1}(t))(1+t^2)^{-1} dt < \infty$ ($\forall \alpha > 0$) ならば, $\mathcal{O}_\psi^{(R)} \subsetneq \mathcal{O}_\varphi^{(R)}$ 。”ここで $\mathcal{O}_\varphi^{(R)}$ は Riemann 面の範囲で $\mathcal{O}_\varphi$ を考へることを意味する。 $\int_0^\infty \psi(\varphi^{-1}(t))(1+t^2)^{-1} dt < \infty \Rightarrow \psi(t)/\varphi(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) (逆は不成立) であるので, Obrock の結果は我々の定理に含まれる。

2. 除外集合 N_φ の構成. φ を Orlicz 函数とする. $E \subset S$ が N_φ 級の除外集合 (或は單に N_φ 集合) であるとは, E が有界な全非連結閉集合であって, E を含む任意の平面領域 V に対し $H^p(V-E) = H^p(V)$ が成立つことを云ふ。

補題 1. Orlicz 函数 $\varphi(t)$ が $(\log t)/\varphi(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) を満足する時は, 次の条件を満たす Orlicz 函数 $\lambda(t)$ が存在する: (i) 充分大きな全ての t に対し $\lambda(2t) \leq 2\lambda(t)$; (ii) $(\log t)/\lambda(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$); (iii) $\lambda(t)/\varphi(t) \rightarrow 0$, $\lambda(t)/(\log t)^2 \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$).

補題 2. φ は Orlicz 函数で, $(\log t)/\varphi(t) = o(1)$, $\varphi(2t)/\varphi(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$, を満たすとする. 又 E を全非連結な有界閉集合 $\subset S$ とすると, $E \in N_\varphi \Leftrightarrow S-E \in \mathcal{O}_\varphi$. ([] 参照)

$z_0 \in S$ ($|z_0| \neq \infty$), $0 < r_0 < +\infty$, に対して, $\Gamma(z_0; r_0) = \{ |z - z_0| = r_0 \}$ とおく. 特に $z_0 = 0$ の時は単に $\Gamma(r_0)$ と書く.

補題 3. $0 < a < b < +\infty$ とし, F を $\{ |z| \geq b \}$ に含まれる有界閉集合で $D_0 = \{ a < |z| \leq \infty \} - F$ が連結なるものとする. μ を D_0 に関する ∞ の調和測度とすると,

$$\max \left\{ \frac{d_0}{d\mu}(z) : z \in \Gamma(a) \right\} \leq A\left(\frac{a}{b}\right) \frac{2\pi a}{\mu(\Gamma(a))}.$$

但し, d_0 は $\Gamma(a)$ 上の線素で, $A(t)$ ($t > 0$) は非減少函数である.

証明 は円環 $\{ a < |z| < b \}$ 上で Harnack 不等式を用いる.

補題 4. $0 < a_0 < a < b < +\infty$ とし, $F_1, \dots, F_k$ を $\{ |z| > b \}$ に含まれる有限個の有界閉集合で, 各 $i=1, \dots, k$ に対して $S-F_i$ は連結で全ての F_j , $j \neq i$, を含むものとする. $l(n)$ ($n=1, 2, \dots$) は正数の増加列で $l(n)/n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, 且つ $l(n) \geq n^{1/2}$ なるものとする. 又, $w_{n,j} = a_0 \exp(2\pi j i/n)$, $K_{n,j} = \{ |z - w_{n,j}| \leq e^{-l(n)} \}$, $1 \leq j \leq n$, 且つ $K_n = \bigcup_{j=1}^n K_{n,j}$ とおく. 全ての F_j の対数容量は正であるとし, 充分大きな n のみを考えることにする. 従って $K_n \subset \{ |z| < a \}$ 且つ $K_{n,j}$ ($1 \leq j \leq n$) は互に素であるとする. 更に, μ (μ_n) により $\{ a_0 < |z| \leq \infty \} - F$ ($S - K_n - F$) に関する ∞ の調和測度とする. 但し $F = \bigcup_{j=1}^k F_j$. この時, 任意の正

数 $\varepsilon > 0$ に対し整数 $N(\varepsilon) = N > 0$ を適当に大きく取れば, $n \geq N$ の時

$$|\mu(\Gamma(a_0)) - \mu_n(\partial K_n)| < \varepsilon; \quad |\mu(F_j) - \mu_n(F_j)| < \varepsilon \quad (1 \leq j \leq k);$$

$$\mu_n(\partial K_{n,j}) \geq (Bn)^{-1} \mu(\Gamma(a_0)), \quad (1 \leq j \leq n).$$

但し, $B = B(a/r)$ は比 a/r のみに依存する定数で a/r の増加函数である.

証明. $k=1$ と仮定して証明する. 与え $\varepsilon' > 0$ を

$$\max \{ (1+\varepsilon') - (1+\varepsilon')^{-3}, \varepsilon' \} < 2^{-1} \mu(\Gamma(a_0))^{-1} \varepsilon$$

とし, $0 < a' < a_0 < a'' < a$ を

$$(1+\varepsilon')^{-1} \mu(\Gamma(a_0)) < \mu'(\Gamma(a')) < \mu''(\Gamma(a'')) < (1+\varepsilon') \mu(\Gamma(a_0))$$

(但し, μ', μ'' は夫々 $\{a' < |z| \leq \infty\} - F$, $\{a'' < |z| \leq \infty\} - F$ に関する ∞ の調和測度) を満たすやうに選ぶ.

$G(z, w) = \log(1 - z\bar{w})/|z - w|$ を単位円板の Green 函数とし, ν_n により ∂K_n 上の正測度で一様な密度を持ち且つ全質量が 1 であるものを表はす. ν_n による Green 和テンソルを $U_n(z)$ と書けば,

$$U_n(z) = \int_{\partial K_n} G(z, w) d\nu_n(w) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G(z, w_{n,j}), & z \notin K_n, \\ \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} G(z, w_{n,j}) + \frac{1}{n} \log |1 - z\bar{w}_{n,i}| + \frac{q(n)}{n}, & z \in K_{n,i}. \end{cases}$$

$q(n)/n \rightarrow 0$ であるから, $U_n(z)$ は $\Gamma(a')$ 上で一様に $\log \frac{1}{a_0}$ に収束し, 整数 $N' = N'(\varepsilon') > 0$ を大きく取れば

$$(1+\varepsilon')^{-1} \log \frac{1}{a_0} < U_n(z) < (1+\varepsilon') \log \frac{1}{a_0}, \quad z \in K_n, \quad n \geq N'.$$

u' (又は u_n) により領域 $\{a' < |z| \leq \infty\} - F$ (又は $S - K_n - F$) 上の Dirichlet 問題の解で, 境界値: $\Gamma(a')$ 上で 1, ∂F 上で 0 (又は, ∂K_n 上で 1, ∂F 上で 0) に対応するものを表はす. $N'' = N''(\varepsilon')$ を充分大きく取り, $n \geq N''$ に対しては $K_n \subset \{a' < |z| < a''\}$ と $U_n(z) \geq (1+\varepsilon')^{-1} \log \frac{1}{a_0}$ ($z \in \Gamma(a')$) が成立するようにし, $N(\varepsilon) = \max\{N', N''\}$ とおく. この時, $n \geq N(\varepsilon)$ ならば, ∂K_n 上では

$$u_n(z) = 1 \geq (1+\varepsilon')^{-1} \left(\log \frac{1}{a_0}\right)^{-1} U_n(z)$$

が成立つから, 同い不等式が $|z| \leq 1$ 上至る処成立つ. これから $\Gamma(a')$ 上で $u_n(z) \geq (1+\varepsilon')^{-2} = (1+\varepsilon')^{-2} u'(z)$. 従つて同い不等式が $\{|z| > a'\} - F$ 上で成立つ. これから

$$\mu_n(\partial K_n) = u_n(\infty) \geq (1+\varepsilon')^{-2} \mu'(\Gamma(a')) \geq (1+\varepsilon')^{-3} \mu(\Gamma(a_0)).$$

一方 K_n は $\Gamma(a'')$ の内側にあるので,

$$\mu_n(\partial K_n) \leq \mu''(\Gamma(a'')) \leq (1+\varepsilon') \mu(\Gamma(a_0)).$$

これらより, $|\mu(\Gamma(a_0)) - \mu_n(\partial K_n)| < \varepsilon$, $|\mu(F_j) - \mu_n(F_j)| < \varepsilon$ を得る.

残りの不等式を得る為には n を $e^{-l(n)} < a - a_0$ となる様に固定し, $c = a^{1/2}$ とおく. u_j (u_{1j}, u_{2j}), $1 \leq j \leq n$, により, 領域 $S - K_n - F$ ($S - K_n, \{|z| < 1\} - K_n$) 上の Dirichlet 問題の解で境界値: $\partial K_{n,j}$ 上で 1, 他で 0, を満足するものを表はす.

$m_i = \min\{u_{ij}(z) : |z| = c\}$, $M_i = \max\{u_{ij}(z) : |z| = c\}$, $i=1, 2$, は j に無関係であり, Harnack 不等式より $M_i \leq A(a) m_i$, $i=1, 2$,

なる定数 $A'(a)$ がある. A' は a の増加関数である. $\sum_{j=1}^n u_{1j}(z) \equiv 1$ ($z \in S-K_n$) だから, $1 \leq nM_1 \leq A'nM_1 \leq A'$ となり, $M_1 \leq A'/n$. n を充分大きく取ってあげれば, $\Gamma(a)$ 上で

$$\sum_{j=1}^n u_{2j}(z) \geq \frac{1}{2} \frac{\log a}{\log a_0}$$

と出来るから, $A'nM_2 \geq nM_2 \geq \sum_{j=1}^n u_{2j}(z) \geq \frac{1}{4} \frac{\log a}{\log a_0}$ ($z \in \Gamma(c)$)

となり, $A'M_2 \geq \frac{1}{4n} \frac{\log a}{\log a_0} \geq \frac{M_1}{4A'} \frac{\log a}{\log a_0}$. 円環 $\{a < |z| < a\}$

上では $u_{2j}(z) \leq u_j(z) \leq u_{1j}(z)$, $j=1, \dots, n$, だから

$$u_i(z) \leq B' u_j(z), \quad z \in \Gamma(c), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

となる. 但し $B' = 4A'(a)(\log a_0)/(\log a)$. 上の不等式は $|z| > c$

に対し z を成立つから, $\mu_n(\partial K_{n,i}) \leq B' \mu_n(\partial K_{n,j})$, $1 \leq i, j \leq n$,

となり, $\mu_n(\partial K_{n,j}) \geq B'^{-1} n^{-1} \mu_n(\partial K_n)$. 充分大きな n に対し z

は $\mu_n(\partial K_n) \geq \mu(\Gamma(a_0))/2$ と取って置けるから, $B = 2B'$ とおくと

により, $\mu_n(\partial K_{n,j}) \geq B^{-1} n^{-1} \mu(\Gamma(a_0))$. (終)

定理 2. φ は Orlicz 関数で, $(\log t)/\varphi(t) = o(1)$, $\varphi(2t)/\varphi(t)$

$= O(1)$, $t \rightarrow \infty$, を満足するものとする. $0 < a < a < \infty$ とし,

$F_1, \dots, F_k$ を $\{|z| > a\}$ に含まれる有界閉集合で, $S-F_c$ は連結で

F_j ($j \neq c$) を全て含むものとする. この時, 任意の $\varepsilon > 0$,

$0 < \delta < 1$ に対し, $E \in N_\varphi$ で $E \subset \{\delta a < |z| < a\}$,

$$|\mu(F_j) - \mu_E(F_j)| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq k,$$

$$|\mu(\Gamma(a)) - \mu_E(E)| < \varepsilon$$

を満足するものが存在する. 但し, μ (μ_E) は $\{a < |z| \leq \infty\} - F_c$

($\mathcal{S}-\mathcal{E}-\mathcal{F}$) に関する ∞ の調和測度である。ここで $F = \bigcup_{j=1}^k F_j$.

証明. 補題 1 を Orlitz 函数 $\varphi(t^{1/2})$ に適用し Orlitz 函数 $\lambda(t)$ を $(\log t)/\lambda(t) = o(1)$, $\lambda(t)/\varphi(t^{1/2}) = o(1)$, $t \rightarrow \infty$; $\lambda(t) \leq (\log t)^2$, $t \geq 1$, の様に作る. $h(t)$, $l(t)$ を夫々 $\varphi(e^t)$, $\lambda(e^t)$ の逆函数とする. これらは $t \geq t_1$ で定義され, 狭義の増加函数となる. この時, $l(t)/t = o(1)$, $t \rightarrow +\infty$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t(\varepsilon) (\geq t_1)$: $h(e^{-1}t) \leq \frac{1}{2}l(t)$ ($t \geq t(\varepsilon)$); $l(t) \geq t^{1/2}$. 従って $\{l(n) : n \geq t_1\}$ は補題 5 の条件を満たす. F は 0 でない容量を持つとしてよい. 我々は $0 < \varepsilon < (1 - \mu(F))/\mu(F)$ を仮定し, $\rho = (b/a)^{1/4}$, $B = B(a/b)$ とおく.

帰納法により $\{|z| \leq a\}$ に含まれる閉円板の族 $K_n, K'_n, n = 0, 1, \dots$, を構成する. $K_n (K'_n)$ は半径 $r_n (r'_n)$ の閉円板の族で, この合併を $K_n (K'_n)$ と表はし, 領域 $\mathcal{S}-K_n-\mathcal{F}$ ($\mathcal{S}-K'_n-\mathcal{F}$) に関する ∞ の調和測度を $\mu_n (\mu'_n)$ と書く. 先づ, K_0 は空, K'_0 は唯一個の閉円板 $\{|z| \leq a\}$ より成るとする. 従って, $\mu'_0 = \mu$, $r'_0 = a$. ρ の定義により $\{|z| \leq \rho^4 r'_0\}$ は $\mathcal{F}$ と共通分を有しない. 次に K_n, K'_n まで定義出来たとする. 即ち, K'_n は閉円板 $D'_\alpha = \{|z - w_\alpha| \leq r'_n\}$ ($1 \leq \alpha \leq N(n)$) より成り, 円板 $\{|z - w_\alpha| \leq \rho^4 r'_n\}$ は互に素であり又 $\mathcal{F}$ から素であるとする.

そこで K_{n+1}, K'_{n+1} を次の様に定義する. $\delta r'_n < r_{n+1} < r'_n$

とし, $D_\alpha = \{ |z - w_\alpha| \leq r_{n+1} \}$, $1 \leq \alpha \leq N(n)$, とおく. K_{n+1} はこれらの円板より成るとする. r_{n+1} を r'_n に近くとり

$$\mu_{n+1}(F_j) - \mu'_n(F_j) \leq \varepsilon \mu(F_j) / 2^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

$$\mu_{n+1}(\partial D_\alpha) \geq \mu'_n(\partial D'_\alpha) / 2, \quad 1 \leq \alpha \leq N(n)$$

が成立つ様にする. K_{n+1} を定義するためには整数 $N'(n+1) \geq \max\{t_i, n+1\}$ を選ぶ, これは後で固定する.

$$w_{\alpha,j} = w_\alpha + r_{n+1} \exp[2\pi j i / N'(n+1)], \quad 1 \leq j \leq N'(n+1),$$

$$N(n+1) = N(n) N'(n+1), \quad r'_{n+1} = \exp[-\ell(N(n+1))],$$

$$D'_{\alpha,j} = \{ |z - w_{\alpha,j}| \leq r'_{n+1} \}, \quad 1 \leq j \leq N'(n+1),$$

と置き, $K'_{n+1} = \{ D'_{\alpha,j} : 1 \leq \alpha \leq N(n), 1 \leq j \leq N'(n+1) \}$ とする. ε

と $N'(n+1)$ を充分大きく選んで次のことが成立つ様にする.

(a) $\{ |z - w_{\alpha,j}| \leq \delta^4 r'_{n+1} \}$ は互に素で, F から素である;

(b) $|\mu_{n+1}(F_j) - \mu'_{n+1}(F_j)| \leq \varepsilon \mu(F_j) / 2^{n+2}, \quad 1 \leq j \leq k;$

(c) $\mu'_{n+1}(\partial D'_{\alpha,j}) \geq (2B N'(n+1))^{-1} \mu_{n+1}(\partial D_\alpha), \quad 1 \leq j \leq N'(n+1), 1 \leq \alpha \leq N(n)$

(d) $r'_{n+1} \leq 3^{-1} \min \{ r'_n - r_n, r_n - \delta r'_n \};$

(e) $h((n+1)(2B)^{n+1} N(n+1)) \leq \frac{1}{2} \ell(N(n+1)).$

これから直ちに

$$|\mu_n(F_j) - \mu_{n+1}(F_j)| < \varepsilon \mu(F_j) / 2^n, \quad \mu'_n(\partial D'_\alpha) \geq (2B N(n))^{-1} \mu(\Gamma(a))$$

が分る. $\varepsilon = \varepsilon$

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{Q}(\bigcup_{s=n}^{\infty} K_s))$$

とおくとこれが求めるものである.

E の構成法から $\mu(\Gamma(a)) - \varepsilon\mu(F) \leq \mu_E(E) \leq \mu(\Gamma(a))$ 及び $\mu(F_j) \leq \mu_E(F_j) \leq \mu(F_j) + \varepsilon\mu(F)$ が簡単に分るから, $E \in N_\varphi$ が示されはよい. $\varphi(2t)/\varphi(t) = O(1)$, $t \rightarrow \infty$, 故に補題 2 により $S-E \in Q_\varphi$ を証明すればよい. $f \in H^p(S-E)$ を任意の 0 でない元とし, u を $S-E$ 上での $\varphi(|f|)$ の調和優函数とする. f が定数であることを示す為には, 先づ E が K'_n の内部に含まれることに注意する. $n \geq 0$ を固定し, $D' = \{z - w' \mid |z - w'| \leq r'\}$ を K'_n の元の一つとする. (a) より円環 $\{r' \leq |z - w'| \leq \rho^2 r'\}$ は E, F 及び $K'_n - D'$ と素である. $|w - w'| = \rho r'$ とし ξ_w を円環 $\{r' < |z - w'| < \rho^2 r'\}$ に関する w の調和測度とすれば, Harnack 不等式より

$$\frac{d\xi_w}{ds} \leq \begin{cases} A'/(4\pi r') & (\Gamma(w'; r') \text{ 上}) \\ A'/(4\pi \rho^2 r') & (\Gamma(w'; \rho^2 r') \text{ 上}). \end{cases}$$

ここで, $A' = A(\rho^{-2})$ は補題 4 の証明中に現はれたものである. 又, $D' = \{r' < |z - w'| \leq \infty\} - E$ ($D'' = \{\rho^2 r' < |z - w'| \leq \infty\} - E$) に関する ∞ の調和測度を γ (γ') とすれば, $E \subseteq K'_n$ より

$$\begin{aligned} \gamma'(\Gamma(w'; \rho^2 r')) &\geq \gamma(\Gamma(w'; r')) \geq \mu'_n(\partial D') \\ &\geq (2B)^{-n} N(n)^{-1} \mu(\Gamma(a)). \end{aligned}$$

補題 3 より $A = A(\rho^{-2})$ とし

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\eta}(z) &\leq A \frac{2\pi r'}{\eta(\Gamma(w'; r'))} & (z \in \Gamma(w'; r')), \\ \frac{d\sigma}{d\eta'}(z) &\leq A \frac{2\pi \rho^2 r'}{\eta'(\Gamma(w'; \rho^2 r'))} & (z \in \Gamma(w'; \rho^2 r')). \end{aligned}$$

さて, $|w - w'| = \rho r'$ に対して

$$\log |f(w)| \leq \int \log |f(\xi)| d\xi_w(\xi).$$

$$H(t) = \varphi(e^t) \text{ と } 1 \geq$$

$$\begin{aligned} H(\log |f(w)|) &\leq \int H(\log |f(\xi)|) d\xi_w(\xi) \\ &= \int \varphi(|f(\xi)|) d\xi_w(\xi) \leq \int u(\xi) d\xi_w(\xi) \\ &= \int_{\Gamma(w'; r')} + \int_{\Gamma(w'; p^2 r')} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma(w'; r')} u(\xi) \frac{d\xi_w(\xi)}{ds(\xi)} \frac{ds(\xi)}{d\eta(\xi)} d\eta(\xi) \\ &\leq \frac{A'}{4\pi r'} \cdot \frac{2\pi A r'}{\eta(\Gamma(w'; r'))} \int_{\Gamma(w'; r')} u(\xi) d\eta(\xi) \\ &\leq \frac{AA'}{2\eta(\Gamma(w'; r'))} \int_{\partial D'} u(\xi) d\eta(\xi) \leq \frac{AA' u(\infty)}{2\mu(\Gamma(a))} (2B)^n N(n). \end{aligned}$$

同様に, $I_2 \leq \frac{AA' u(\infty)}{2\mu(\Gamma(a))} (2B)^n N(n)$. 従って

$$H(\log |f(w)|) \leq \frac{AA' u(\infty)}{\mu(\Gamma(a))} (2B)^n N(n).$$

n が充分大きければ, h を作用させて

$$|f(w)| \leq \exp [h(C(2B)^n N(n))],$$

但し, $C = AA' u(\infty) / \mu(\Gamma(a))$. この両辺を円周 $\Gamma(w'; p r')$ に逆って積分する. $r' = r_n' = \exp[-l(N(n))]$ であるから, (e)により

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(w'; p r')} |f(w)| ds(w) &\leq 2\pi p \exp[-l(N(n)) + h(C(2B)^n N(n))] \\ &\leq 2\pi p \exp[-\frac{1}{2} l(N(n))], \quad n \geq \max\{n_0, C\}. \end{aligned}$$

全ての $D' \in \mathcal{K}_n'$ に対する $\Gamma(w'; p r')$ の合併を Γ_n とおく. E は Γ_n の内部に含まれてゐる. f は ∞ の近傍で正則だから,

$$f(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

の形の展開を持つ. $\varphi(2t)/\varphi(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$, であるから,

$f(z) - c_0 \in H^p(S-E)$ であることが分る。従って $f(\infty) = c_0 = 0$ と仮定することが出来る。もし f が恒等的に 0 でないとするれば、 c_p , $p \geq 1$, を最初の 0 でない係数とすると、 Γ_n に適当な向きをつけることにより

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} f(w) w^{p-1} dw, \quad n \geq 1.$$

上に得た評価を用ゐれば、

$$\begin{aligned} |c_p| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} |f(w)| |w|^{p-1} |dw| \\ &\leq \rho b^{p-1} N(n) \exp\left[-\frac{1}{2} l(N(n))\right] \leq \rho b^{p-1} N(n) \exp\left[-\frac{1}{2} N(n)^{1/2}\right] \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となって矛盾になる。故に f は定数である。(終)

3. 定理 1 の証明。定理 1 の条件を満たす Orlicz 函数 φ, ψ を考へる。先づ $(\log t)/\varphi(t) = o(1)$, $t \rightarrow \infty$, であることに注意する。次に減少列 $\{b_n: n \geq 0\}$, $b_n > 0$, を $b_0 = 1$, $n \geq 1$ に対し 2 は

$$\psi(\delta^{-1}t)/\varphi(n^{-1}t) \leq 2^{-n}, \quad t \geq b_n^{-1}$$

で定める。但し $0 < \rho < \delta < 1$ は固定された定数である。そこで $\{a_n: n \geq 0\}$, $\{E_n: n \geq 0\} \subset N_\varphi$ を次の様に選ぶ。

$$a_{n+1}/a_n \leq \rho, \quad a_n \leq b_n, \quad E_n \subseteq \{\delta a_n \leq |z| \leq a_n\} \quad (n \geq 0);$$

$$\frac{1}{2} \leq \varphi(n^{-1} a_n^{-1}) m(E_n) \leq 1, \quad n \geq 1.$$

ここで、 m は $S-E$ ($E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \cup \{0\}$) に関する ∞ の調和測

度である。これが可能なことは、 $\{a_{n+1} < |z| \leq \infty\} - (\bigcup_{j=0}^n E_j)$ に関する ∞ の調和測度を ν_n と書く時、 $\nu_n(\Gamma(a_{n+1})) \sim (\log a_{n+1}^{-1})^{-1}$ ($a_{n+1} \rightarrow 0$) であることと定理 2 を併用して分る。この構成が出来れば、 $z^{-1} \in H^\psi(S-E)$, $H^p(S-E) = \{\text{定数}\}$ を証明することは比較的容易である。前者は単純な計算であり、後者の証明は定理 2 の証明の後半に類似であるので省略する。

尚詳細は筆者の論文 [1] に譲りたい。

文 献

- [1] M. Hasumi, Hardy classes on plane domains, Report No.2, Institut Mittag-Leffler, 1977 (Ark. Mat. に掲載予定)
- [2] M. Hasumi, Null Orlicz classes of plane domains (未発表)
- [3] M. Heins, Hardy Classes on Riemann Surfaces, Lecture Notes in Math., No. 98, Springer, 1969.
- [4] D.A. Hejhal, Classification theory for Hardy classes of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 767-771; Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. no. 566 (1973), 1-28.
- [5] S. Kobayashi, On H_p classification of plane domains, Kōdai Math. Sem. Rep. 27 (1976), 458-463.
- [6] A. Obrock, Null Orlicz classes of Riemann surfaces, Ann. Acad.

Sci. Fenn., Ser. A, I. no. 498 (1972), 1-22.

- [7] L. Sario and M. Nakai, *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.