

Nesin の問題について

岡山大学理学部数学教室

田中 克己

1 はじめに

Ali Nesin は学位論文を書いていた頃, 1980 年代後半, から次の予想を考えていた.

Nesin の予想 (以降, NC とよぶ)

連結で Morley rank 有限の群 G とその任意の元 a に対し, $C_G(a)$ は無限であろう.

この問題は, 私が Irvine に滞在した 1995 年の時点でも未解決のままであり, 彼自身「この問題は考えないほうがいい。」と言っていた. それは, おそらくこの問題が次の Cherlin-Zil'ber 予想に関わってくるからなのだろう漠然と思っていた.

Cherlin-Zil'ber 予想

Morley rank 有限な単純群は代数閉体上の代数群と同型であろう.

いつまでもこのままで放っておくのも気持ちが悪いので, この辺で, 何が分かっている, 何が分かっていないのかを明らかにしておこうと思い立った. 現在でも open であるこの問題について攻略の足がかりを見つけたいと思う.

2 単純群

まず, この予想に反例があったとすると, 単純群で取れることを示す. そのために, いくつか準備をする.

次の補題は [BCM] や [N] に見られる.

補題 1 連結な群 G が有限集合 X に作用しているとする. $\{g \in G \mid g.x = x \ \forall x \in X\}$ が G の定義可能部分群とする. このとき, G は X に自明に作用する.

証明 群の準同型写像 $f: G \rightarrow \text{Sym}(X)$ を考える. ここで, $f(g) = f_g$ for $g \in G$ で $f_g(x) = g.x$ for $x \in X$ とする. このとき, $\ker f$ の G での指数は有限. $\ker f$ は定義可能部分群だから G の連結性より, $G = \ker f$. つまり, G は X に自明に作用している. $\square$

系 2 連結な群 G とその有限正規部分集合 X に対し, $X \subseteq Z(G)$.

系 3 G を連結な群, $Z_2(G)$ が有限とする. このとき, $Z_2(G) = Z(G)$ で $G/Z(G)$ は連結.

このことから, 次が導かれる.

系 4 NC に反例が存在すれば, *centerless* な反例が存在する.

定理 5 NC に反例が存在すれば, 単純群で反例が存在する.

証明 上の系より, *centerless* な反例の中で Morley rank が最小の群 G をとる. G の定義可能正規部分群 N を考える. N が有限のときは, 系 2 より, N は G の中心に含まれる. G は *centerless* だから, $N = 1$.

N が無限のときは, 連結成分 N° も無限. いま, $a \in G$ に対し, $C_G(a)$ が有限とする. $a \in N^\circ$ のとき, 反例 G の Morley rank の最小性から, $G = N^\circ$.

$a \notin N^\circ$ のとき, G/N° も NC の反例になる. なぜなら, $MR(G) = MR(a^G)$ (a^G は G で generic) だから, $\bar{a} = aN^\circ$, $\bar{G} = G/N^\circ$ として, $\bar{a}$ は $\bar{G}$ で generic. よって, $C_{\bar{G}}(\bar{a})$ は有限. これは G のランクの最小性に反する. したがって G は単純群. $\square$

3 $|a| \neq \infty$

いま, $a \in G$ に対し, $C_G(a)$ が有限とする. このとき, conjugacy class a^G は G で generic.

定理 6 G を NC の反例, a の中心化群が有限とするとき, $|a| \neq \infty$.

証明 G を NC の反例とする. $|a| = \infty$ とする. このとき, $a^n \in C_G(a) \ \forall n \in \mathbb{N}$ で矛盾. $\square$

4 $|a| \neq 2$

定理 7 G を NC の反例, a の中心化群が有限とするとき, $|a| \neq 2$.

証明 元 a は involution と仮定する. a^G は G で generic. $a^G = A$ とおくとき, aA も G で generic. よって, $aA \cap A$ も G で generic. したがって, $B = \{b \in A \mid ab \in A\}$ は G で generic. このとき,

$$aa^b = ab^{-1}ab = abab = (ab)^2 = 1.$$

ゆえに, $a^b = a$ となり, $b \in C_G(a)$. これは, $B \subseteq C_G(a)$ を意味し $C_G(a)$ の有限性に反

5 G は involution を持つ

ここで, $C_G(a) = C_G(a^{-1})$ より, $a^{-1} \in a^G$. したがって, ある元 $g \in G$ が存在して,

$$a^g = a^{-1}.$$

補題 8 $|g| \neq \infty$.

証明 $a^{g^{2n}} = a \ \forall n \in \mathbb{N}$ より, $g^{2n} \in C_G(a)$. これは, $C_G(a)$ の有限性に反する. $\square$

補題 9 $|g|$ は偶数.

証明 $|g| = n$ が奇数とする.

$$a = a^{g^n} = a^{(-1)^n} = a^{-1}$$

で矛盾. $\square$

定理 10 NC の反例は involution を持つ.

証明 $|g| = n = 2m$ とする. このとき, g^m は involution. $\square$

6 $|a| \neq 3$

前のセクションで分かったことから, NC の反例 G の exponent は 3 にはならない. しかし, このことは以下で紹介する Wagner の結果からも導かれる. ここでなされる議論は, この問題を考えるとき有効だと思われるので, ここに証明と合わせて紹介する.

定理 11 (Wagner[W]) 安定な群が位数 3 の generic な元 g をもつとき, nilpotent-by-finite.

証明 $x \in G$ で g は x 上 generic とする. このとき, ga と xg^{-1} も generic. このとき,

$$x^{g^2} x^g x = gxgxgx = 1 = xg^{-1} xg^{-1} xg^{-1} = xx^g x^{g^2}$$

したがって, $xx^g = (x^{g^2})^{-1} = x^g x$. 安定性から, $C_G(x^G) = C_G(x^{g^1}, \dots, x^{g^n}) \exists g_1, \dots, g_n \in G$. g が独立で generic ならば, $g_1 g, \dots, g_n g$ も generic. よって, g はすべての $x^{g_i g}$ と可換. したがって, $x^{g^{-1}}$ はすべての x^{g_i} と可換. ゆえに, $x^{g^{-1}} x^G$ と可換. したがって, $x \in C_G(x^G)^g = C_G(x^G)$. よって, x^G は可換な正規部分群を生成する. [W] の Theorem 1.1.12 より, G は nilpotent.

G の任意の 2 元 x, y から生成される群は 2-step nilpotent. なぜなら, $[x, y] = x^{-1} x^y = y^{-x} y$ は x と y と可換. 任意の x と x 上 generic な任意の y に対し, xy は generic. よって,

$$1 = (xy)^3 = x^3 y^3 [y, x]^3 = x^3 [y, x]^3$$

また, x 上独立で generic な別の z に対し, yz も x 上 generic. $x^3 = 1$ と, $\langle x^G \rangle$ の中の commutator は可換であることに注意すると,

$$x^3 = [x, y]^3 = [x, z]^3 = [x, yz]^3 = ([x, y]^z [x, z])^3 = ([x, y]^z)^3 [x, z]^3.$$

したがって, G の exponent は 3. $\square$

この結果は, Poizat による次の予想の部分解になっている.

Poizat の予想 G を Morley rank 有限な連結群, $\varphi(x)$ を atomic な論理式で G のある generic な元を解にもつとする. このとき, G の任意の元は $\varphi(x)$ の解になる.

7 $|a| \neq 2^2$?

このセクションでは, 表題のことが成り立つのか考察を試みる. 次の議論は M. Hall によるバーンサイド問題の部分的解決である「 $B(r, 4)$ の有限性」の証明と同じ方針で行う.

定理 12 G を NC の反例, a を位数 4 の G の元でその中心化群は有限とする. このとき, a を含む局所有限な群が存在する.

証明 $a^G = A$ とおく. A は G で generic. いま, $a = x_1$ とおく.

Claim H を G の有限部分群, $x \in G$ は $x^2 \in H$ をみたすものとする. このとき, $\langle H, x \rangle$ は有限.

この Claim が正しいとすると, $H = \langle x_1 \rangle$ とおく. $x_2^4 = 1$ ならば, $x = x_2^2$ とおけば, $\langle x_1, x_2^2 \rangle$ は有限. 次に, $H = \langle x_1, x_2^2 \rangle$, $x = x_2$ とおけば, $\langle x_1, x_2 \rangle$ は有限. 同様に, $\langle x_1, x_2, x_3^2 \rangle$, $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ と続ければよい.

Claim の証明 $\langle H, x \rangle$ の任意の元は

$$h_1 x h_2 x h_3 x \cdots h_{n-1} x h_n, \quad (1)$$

ここで, $n \geq 1, h_1, \dots, h_n \in H$ で, $h_2, \dots, h_{n-1}$ は non-trivial とする. x を $A \cap \bigcap_{h \in H} A h^{-1}$ から取れば, $(xh)^4 = x^4 = 1$ より,

$$x h x = h^{-1} x^{-1} h^{-1} x^{-1} h^{-1} = h^{-1} x (x^2 h^{-1} x^2) x h^{-1} = h^{-1} x k x h^{-1} \quad (2)$$

を得る. ただし, $k \in H$.

だから, (2) を使うと (1) を

$$h_1 x h_2 \cdots x h_{i-1} h_i^{-1} x k x h_i^{-1} h_{i+1} x \cdots x h_n \quad (3)$$

の形に長さを大きくせずに変形できる.

(2) を繰り返し使うことによって h_{i-1} を $h_{i-1}h_i^{-1}$ に, h_{i-2} を $h_{i-2}(h_{i-1}h_i^{-1})^{-1} = h_{i-2}h_ih_{i-1}^{-1}$, ... と置き換えることができる. このようにすると, h_2 は以下のどれとでも置き換えることができる;

$$h_2, h_2h_3^{-1}, h_2h_4h_3^{-1}, h_2h_4h_5^{-1}h_3^{-1}, \dots$$

$$h_2h_4 \cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1} \cdots h_5^{-1}h_3^{-1}, h_2h_4 \cdots h_{2s}h_{2s+1}^{-1}h_{2s-1}^{-1} \cdots h_5^{-1}h_3^{-1},$$

ここで, s は $2s+1 < n$ を満たしさえすればいくらかでも大きく取れる. これらのうちどれか一つでも 1 に等しければ, (1) の長さを短くできる. しかし, もし $n \geq |H|+3$ ならば, これらのうち一つは 1 になるか, いづれか二つが H で等しくなる. 後者の場合, 次のうちどれかが成立;

$$\begin{aligned} h_2 \cdots h_{2r}h_{2r-1}^{-1} \cdots h_3^{-1} &= h_2 \cdots h_{2r}h_{2r+1}^{-1}h_{2r-1}^{-1} \cdots h_3^{-1}; \\ h_2 \cdots h_{2r}h_{2r-1}^{-1} \cdots h_3^{-1} &= h_2 \cdots h_{2r} \cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1} \cdots h_{2r-1}^{-1} \cdots h_3^{-1}; \\ h_2 \cdots h_{2r}h_{2r-1}^{-1} \cdots h_3^{-1} &= h_2 \cdots h_{2r} \cdots h_{2s}h_{2s+1}^{-1} \cdots h_{2r-1}^{-1} \cdots h_3^{-1}; \\ h_2 \cdots h_{2r}h_{2r+1}^{-1} \cdots h_3^{-1} &= h_2 \cdots h_{2r} \cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1} \cdots h_{2r+1}^{-1} \cdots h_3^{-1}; \\ h_2 \cdots h_{2r}h_{2r+1}^{-1} \cdots h_3^{-1} &= h_2 \cdots h_{2r} \cdots h_{2s}h_{2s+1}^{-1} \cdots h_{2r+1}^{-1} \cdots h_3^{-1}. \end{aligned}$$

初めの場合は, $h_{2r+1} = 1$ となり, (1) の条件に反する. 2 番目の場合は,

$$h_{2r+2} \cdots h_{2s}h_{2s-1}^{-1} \cdots h_{2r+1}^{-1} = 1.$$

これより, (1) で h_{2r+1} は 1 で置き換えることができ表現が短くなる. 残りの三つの場合もこれと同様.

もし, $n \geq |H|+3$ ならば, (1) の表現の長さを短くすることができる. これを繰り返すと, $\langle H, x \rangle$ の任意の元は (1) で $n \leq |H|+2$ なる表現をもつ. よって, $\langle H, x \rangle$ は有限. $\square$

さて, 定理 12 で構成した局所有限群 (L とする) について考察する. まず次の質問から始めよう.

Q1 L の exponent は 4 か?

もし答えが Yes ならば, L は locally-nilpotent となる. すると,

補題 13 (T.Yen, e.g.[B]) *locally nilpotent* な $\mathcal{M}_C$ -群は *solvable*.

より, L は *solvable*. このとき, L の definable closure $\bar{L}$ も *solvable*. そこで次の質問

Q2 $a \in \bar{L}^\circ$ か?

に移る. もし答えが Yes ならば, a の中心化群は無限になり, 最終的な矛盾が導かれる.

参考文献

- [B] Roger M. Bryant *Groups with the Minimal Condition on Centralizers*, J. Algebra 60(1979)371-383.
- [BS] J.Baldwin and J.Saxl *Logical stability in group theory*, J. Austral. Math. Soc 21(1976)267-276.
- [BCM] W.Baur, G.Cherlin and A.Macintyre *Totally categorical groups and rings*, J. Algebra 57(1979)407-440.
- [H] Wilfrid Hodges *Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [N] Ali Nesin *Solvable Groups of Finite Morley Rank*, J. Algebra 121(1989)26-39.
- [S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math 7(1969)187-202.
- [W] F.Wagner *Stable Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 240, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.