

Multiplicative genus associated with the formal group

$$(x + y - 2axy)/(1 - (a^2 + b^2)xy)$$

九州大学 教養部 鎌田 正良 (Masayoshi Kamata)

1. 準備

R を単位をもつ可換環とする. R に係数を持つ二変数の形式的べき級数 $F(x, y)$ が次の性質を持つとき, この級数を形式群という.

$$(1) \quad F(x, 0) = x, F(0, x) = x$$

$$(2) \quad F(x, y) = F(y, x)$$

$$(3) \quad F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$$

MU_* で弱複素閉多様体をコボルダント関係で類別して得られる類集合に

$$[M] + [N] = [M \sqcup N], \quad [M] \times [N] = [M \times N]$$

によって, 環構造を定める複素コボルディズム環を表す. 良く知られているように

定理 1 (Milnor [6], Novikov)

$$(1) \quad MU_* \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots, y_n, \dots]$$

$$(2) \quad MU_* \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots, p_n, \dots], \quad p_n = [CP^n]$$

ただし, CP^n は n 次元複素射影空間を表す.

ここで, MU_* から単位元を持つ環 R への環準同型 $\varphi: MU_* \rightarrow R$ を R に対する乗法的種数という (cf. [2], [5], [8]). 形式群と乗法的種数との関係は次の定理によって結び付けられている.

定理 2 (Lazard, Quillen [9]) MU_* 上には, 普遍的形式群

$$F_{MU}(x, y) = \sum a_{i,j}^{MU} x^i y^j, \quad a_{i,j}^{MU} \in MU_*$$

が存在する. すなわち, R 上の任意の形式群 $F(x, y)$ に対して次の式を満たす環準同型 (乗法的種数) $\varphi: MU_* \rightarrow R$ が一意に存在する.

$$F(x, y) = \sum \varphi(a_{i,j}^{MU}) x^i y^j$$

この定理によって与えられる環準同型 φ を形式群 $F(x, y)$ に付随する乗法的種数と呼ぶ. MU_* の生成元の種数を計算する方法をまとめる. 形式群 $F(x, y)$ の logarithm $l(x) \in R \otimes Q[[x]]$ を次の式を満たす形式的べき級数と定義する.

$$(1) \quad l(x) = x + \text{higher terms}$$

$$(2) \quad l(F(x, y)) = l(x) + l(y)$$

定理 3 (Mischenko [7]) (1) 普遍的形式群 $F_{MU}(x, y)$ の logarithm は

$$\log_{MU}(x) = \sum \frac{[CP^n]}{n+1} x^{n+1}$$

である.

(2) 任意の形式群 $F(x, y)$ の logarithm を $l(x)$, $F(x, y)$ に対する乗法的種数を φ とすると, 次の式が成り立つ.

$$l(x) = \sum \frac{\varphi([CP^n])}{n+1} x^{n+1}$$

この定理によって, 形式群 $F(x, y)$ に付随する乗法的種数 φ の複素射影空間の値は, $F(x, y)$ の logarithm $l(x)$ を求めれば決定されるが, $l(x)$ は次の式で $F(x, y)$ と関係づけ

られている.

$$l(x) = \int_0^x \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, 0)} dx$$

一方, 形式的べき級数 $l(x) = x + \text{higher terms} \in Q[[x]]$ が与えられると, 形式群

$$F(x, y) = l^{-1}(l(x) + l(y))$$

に付随する乗法的種数が得られる. 例えば, Ochanine [8] が与えた乗法的種数は,

$$l(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4}} dx$$

にたいして与えられた乗法的種数である.

ここで, $CP^m \times CP^n$ の部分多様体として定義される Milnor manifold $H_{m,n}$ を思い起こそう.

$$H_{m,n} = \{([z_0, \dots, z_n], [w_0, \dots, w_n]) \mid z_0 w_0 + \dots + z_m w_m = 0\}, \quad m \leq n$$

コボルディズム類 $[CP^n]$, $[H_{m,n}]$ は MU_* を生成する. 従って, これらの乗法的種数を知することは極めて重要である. $[H_{m,n}]$ の乗法的種数は次の定理によって計算可能となる.

定理 4 (Buchstaber [1]) (1) $H(x, y) = \sum [H_{i,j}] x^i y^j$ とおくと,

$$H(x, y) = \frac{d \log_{MU}(x)}{dx} \frac{d \log_{MU}(y)}{dy} F_{MU}(x, y)$$

が成り立つ.

(2) 形式群 $F(x, y)$ に付随する乗法的種数を φ とし, $F(x, y)$ の logarithm を $l(x)$ とする. $h(x, y) = \sum \varphi([H_{i,j}]) x^i y^j$ とおくと,

$$h(x, y) = l'(x) l'(y) F(x, y)$$

が成り立つ.

2. 形式群 $F(x, y) = (x + y - 2axy)/(1 - (a^2 + b^2)xy)$ に付随する乗法的種数

形式群 $F(x, y) = (x + y - 2axy)/(1 - (a^2 + b^2)xy)$, $a, b \in Q$ (or $\in R$) に付随する乗法的種数を $\varphi_{a,b}: MU_* \rightarrow Q$ (or R) と表すことにしよう. この形式群の logarithm は

$$l(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - 2ax + (a^2 + b^2)x^2} dx$$

である. 第 1 節の定理 4 を用いると次の結果を得る. 証明については Kamata [3] を参照されたい.

定理 5 $\alpha = a + b\sqrt{-1}$, $\beta = a - b\sqrt{-1}$ とおくと,

$$\varphi_{a,b}([H_{i,j}]) = \frac{\alpha^{i+1} - \beta^{i+1}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha - \beta}, \quad i \leq j$$

この定理で $b = 0$ の場合は,

$$\varphi_{a,0}([H_{i,j}]) = (i+1)ja^{i+j-1}$$

$$\varphi_{1,0}([CP^n]) = n+1$$

となり $\varphi_{1,0}$ はオイラー数に対応している. また, 定理 5 の証明を見ると分かることであるが, a, b を有理数, 実数に限らないで考えることもでき, 例えば

$$\varphi_{\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{-1}}{2}}([H_{i,j}]) = a^{i+j-1}$$

である. とくに, $\varphi_{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{-1}}{2}}$ は Todd 種数であることがわかる. さらに, $F(x, y)$ の logarithm をみると $\varphi_{0,b}$ は Ochanine の乗法的種数で $\delta = b^2$, $\varepsilon = b^4$ とした物に対応している.

ここで,

$$\varphi_\delta = \varphi_{\frac{\delta}{2}, \frac{\sqrt{3}\delta}{2}}, \quad \delta \in Q$$

とおくと, これは Q への乗法的種数

$$\varphi_\delta : MU_* \longrightarrow Q$$

である. この種数については, 定理 5 などを用いて, 次の結果を得る.

$$\varphi_\delta([H_{2,j}]) = 0, \quad j \geq 2$$

$$\varphi_\delta([CP^{3n}]) = (-1)^n \delta^{3n}$$

$$\varphi_\delta([CP^{3n+1}]) = (-1)^n \delta^{3n+1}$$

$$\varphi_\delta([CP^{3n+2}]) = 0$$

この結果から, 次のような幾何学的考察をすることができる.

定理 6 任意の有理数 δ に対して, $\varphi_\delta(\alpha) = 0$ を満たす $MU_* \otimes Q$ の元 α からなるイデアル $\mathfrak{I}$ は CP^2 上のファイバーバンドルのコボルディズム類によって生成される.

証明 $MU_* \otimes Q$ は $\{[CP^1], [CP^2], [H_{2,j}] \mid j \geq 2\}$ で生成される Q 上の多項式環である. 任意の α は次のように表される.

$$\alpha = \sum c_j [CP^1]^j + D$$

ただし, D は $\{[CP^2], [H_{2,j}] \mid j \geq 2\}$ で生成されるイデアルの元である. 任意の有理数 δ

に対して $\varphi_\delta(\alpha) = 0$ であると仮定すると,

$$\sum c_j \delta^j = 0$$

となり, $c_j = 0$ を得る. ゆえに, このとき α は $\{[CP^2], [H_{2,j}] \mid j \geq 2\}$ で生成されるイデア
ルに属することになる.

CP^2 上の標準的直線束を ξ で表し, a 回テンソル積 ξ^a と b 回テンソル積 ξ^b の Whitney
sum $\xi^a \oplus \xi^b$ に付随する複素射影空間束を $P(a, b)$ と表すと, 特性数を調べることにより次
の関係式を得る.

$$[P(a, b)] = -\frac{(a-b)^2}{3}[H_{2,2}] + \frac{(a-b)^2 + 3}{3}[CP^1][CP^2]$$

一方, $j > 2$ ならば $H_{2,j}$ は CP^2 上のファイバーバンドルである. このようにして, $\alpha \in \vartheta$
ならば α は CP^2 上のファイバーバンドルのコボルディズム類によって生成されるイデア
ルに属する.

3. $MU^*() \otimes Q$ の分解と乗法的種数

形式的べき級数

$$\hat{f}(x) = 1 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots, \quad v_j \in MU^{-2j} \cong MU_{2j},$$

$$f(x) = x \hat{f}(x)$$

を考える. n 個の不定元 $t_1, t_2, \dots, t_n$ の i 次基本対称式を σ_i で表し,

$$P_f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \hat{f}(t_1) \hat{f}(t_2) \cdots \hat{f}(t_n)$$

とおく. 空間 X 上の n 次元複素ベクトル束 ξ の i 次元複素コボルディズム Chern 類を $c_i^{MU}(\xi)$ と表し,

$$P_f(\xi) = P_f(c_1^{MU}(\xi), c_2^{MU}(\xi), \dots, c_n^{MU}(\xi))$$

とおく. $f(x)$ に関わる複素コボルディズムコホモロジーの積保存作用素 ε_f を次のように定義する.

$$\varepsilon_f : MU^*(X) \longrightarrow MU^*(X)$$

$$\alpha = \{h\} \in MU^*(X), \quad h : S^{2n-k} X^+ \longrightarrow MU(n) = T(\gamma^n)$$

$$\varepsilon_f(\alpha) = \sigma^{k-2n} f^* \Phi_{\gamma^n}(P_f(\gamma^n))$$

ここで, σ^{k-2n} は $k-2n$ 回懸垂同型, Φ_{γ^n} は普遍複素ベクトル束 $\gamma^n \longrightarrow BU(n)$ に対する Thom 同型を表す. この複素コボルディズムコホモロジー作用素 ε_f は次の性質を持つ (cf. [4], [7], [10]).

$$(1) \quad \varepsilon_f(g^*(\alpha)) = g^*(\varepsilon_f(\alpha)), \quad g : Y \longrightarrow X$$

$$(2) \quad \varepsilon_f(\alpha\beta) = \varepsilon_f(\alpha)\varepsilon_f(\beta)$$

$$(3) \quad \varepsilon_f(c_1^{MU}(\gamma^1)) = f(c_1^{MU}(\gamma^1))$$

形式的べき級数

$$g(x) = x + \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_2}{3}x^3 + \dots + \frac{b_n}{n+1}x^{n+1} + \dots, \quad b_n \in MU^{-2n} \otimes Q$$

が射影的であるとは, $\psi_g([CP^n]) = b_n$ によって与えられる環準同型

$$\psi_g : MU^* \otimes Q \longrightarrow MU^* \otimes Q$$

が射影的となることであると定義する. すなわち, $\psi_g \psi_g = \psi_g$.

定理 7 (cf. [3]) 形式的べき級数 $g(x)$ を射影的とする.

$$f(x) = g^{-1}(\log(x))$$

とおくと, この形式的べき級数に関わる複素コボルディズムコホモロジー

$$\varepsilon_f : MU^*(X) \otimes Q \longrightarrow MU^*(X) \otimes Q$$

は次の性質を持つ.

- (1) ε_f は積保存自然作用素である.
- (2) $\varepsilon_f \varepsilon_f = \varepsilon_f$
- (3) $\varepsilon_f(MU^*(-) \otimes Q)$ は一般コホモロジーである.

これまで知られている乗法的種数は, 次のように一般コホモロジーと関係づけることができる.

例 1 射影的形式的べき級数

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - 2[CP^2]x^2 + (3[CP^2]^2 - 2[CP^4])x^4}} dx$$

から得られる積保存作用素

$$\varepsilon_f : MU^* \otimes Q \longrightarrow \varepsilon_f(MU^*) \otimes Q, \quad f(x) = g^{-1}(\log(x))$$

$$\varepsilon_f(MU^*) = Q[[CP^2], [CP^4]]$$

と環準同型

$$\psi : Q[[CP^2], [CP^4]] \longrightarrow Q[\delta, \varepsilon],$$

$$\psi([CP^2]) = \delta, \quad \psi([CP^4]) = \frac{3\delta^2 - \varepsilon}{2}$$

の合成として, Ochanine の乗法的種数は解釈できる.

例 2 射影的形式的べき級数

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - [CP^1]x + ([CP^1]^2 - [CP^2])x^2} dx$$

から得られる積保存作用素

$$\varepsilon_f : MU^* \otimes Q \longrightarrow \varepsilon_f(MU^*) \otimes Q, \quad f(x) = g^{-1}(\log(x))$$

$$\varepsilon_f(MU^*) = Q[[CP^1], [CP^2]]$$

と環準同型

$$\psi : Q[[CP^1], [CP^2]] \longrightarrow Q,$$

$$\psi([CP^1]) = 2a, \quad \psi([CP^2]) = 3a^2 - b^2$$

の合成として, 乗法的種数 $\varphi_{a,b}$ は解釈できる.

参考文献

- [1] V. M. Buchstaber, *The Chern-Dold character in coabordisms.I*, Math. USSR - Sbornik 12(1970),573-594
- [2] F. Hirzebruch, T. Berger and R. Jung, *Manifolds and Modular Forms*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1992

- [3] M. Kamata, *The multiplicative genus associated with the formal group law $(x + y - 2axy)/(1 - (a^2 + b^2)xy)$* , to appear in Osaka J. Math.
- [4] P. S. Landweber, *Cobordism operations and Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967)
- [5] P. S. Landweber, *Elliptic Curves and Moduler forms in algebraic Topology*, Proceedings Princeton 1986, Lecture Notes Mathematics, **1326** (1988)
- [6] J. W. Milnor, *On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue*, Amer. J. Math. **82** (1960), 505-521
- [7] S. P. Novikov, *The method of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories* (Russian), Izvestija Akademi Nauk SSSR, Serijia Matematicheskaja **31** (1967), 855-951
- [8] S. Ochanine, *Sur les genres multiplicatifs definis par des integrales elliptiques*, Topology **26** (1987), 143-151
- [9] D. Quillen, *On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1293-1298
- [10] W. S. Wilson, *Brown-Peterson Homology, an Introduction and Sampler*, Regional Conference Series in Math., NO.48 AMS Providence Rhode Island, 1980