

変形 W K I 方程式の多価関数ソリトンの衝突

日大理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)

§ 1 はじめに

一価関数として表されるソリトン解は良く知られている。この報告では多価関数で表されるソリトンについて議論する。

ソリトンを記述する可積分非線形方程式を解く有力な方法の一つに逆散乱法がある。この方法を和達、市川達と共と一般化し 2 種類の可積分方程式系を発見した¹⁾(以下 W K I 方程式と書く)。これらの方程式は多価関数解を持つように変形できることが示された^{2),3)}。この報告では変形された方程式の意味づけをし、逆散乱法を用いて N ソリトン解を求める。特に 2 ソリトン解を用い多価関数ソリトンの衝突を調べる。

§ 2 変形 W K I 方程式の逆散乱法

逆散乱法の固有値方程式を

$$\begin{aligned}v_{1x} + i\lambda v_1 &= \lambda q v_2, \\v_{2x} - i\lambda v_2 &= \lambda r v_1,\end{aligned}$$

で与え、波動関数の時間依存性を

$$\begin{aligned}v_{1t} &= A v_1 + B v_2, \\v_{2t} &= C v_1 - A v_2,\end{aligned}$$

で与える。

Case 1) $r = -q$, $q = Q_x$ にとり A として次のようにとる:

$$A = -4i \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{ds}\right) \frac{\lambda^3}{\sqrt{1 + Q_x^2}}.$$

このようにとると逆散乱形式の可積分性より方程式

$$Q_{xt} + \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{ds}\right) \left(\frac{Q_{xx}}{(1 + Q_x^2)^{3/2}} \right)_{xx} = 0.$$

を得る。これを第1種WKI方程式と呼ぶ。ここで ds は $\sqrt{(dx)^2 + (dQ)^2}$ で解曲線に沿っての長さの要素を表す。常に $ds > 0$ であるから sgn 関数はループ状の変形を考えると $dx > 0$ のとき $+1$ 、また $dx < 0$ の場合 -1 をとる。非線形項は曲率の意味を持つ：

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{d}{dx} (\tan^{-1} Q_x) = \frac{dx}{ds} \frac{Q_{xx}}{1 + Q_x^2} = sgn\left(\frac{dx}{ds}\right) \frac{Q_{xx}}{(1 + Q_x^2)^{3/2}}.$$

Case 2) $r = -q^*$, $q = Q_x$ にとり A として次のようにとる

$$A = -2i sgn\left(\frac{dx}{ds}\right) \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + |Q_x|^2}}.$$

可積分条件より方程式

$$iQ_{xt} + sgn\left(\frac{dx}{ds}\right) \left(\frac{Q_x}{\sqrt{1 + |Q_x|^2}} \right)_{xx} = 0,$$

を得る。これを第2種WKI方程式と呼ぶ。ここで ds は $\sqrt{(dx)^2 + |dQ|^2}$ でやはり解曲線に沿っての長さの要素を表す。

これら Case 1) と 2) で変形された方程式は sgn 関数を導入することで解として多価関数を取れるようになった。

§3 第1種WKI方程式のNソリトン解とソリトンの衝突⁴⁾

Gel'fand-Levitan 方程式は

$$\begin{aligned} K_1(x, y) - F^*(x + y) - \int_x^\infty K_2^*(x, z) F^*(y + z) dz &= 0, \\ K_2^*(x, y) - \int_x^\infty K_1(x, z) F''(y + z) dz &= 0, \end{aligned}$$

で与えられる。N個の離散スペクトルのみを持つとすると

$$F(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k(t)}{\lambda_k} \exp\{i\lambda_k(z + 2\varepsilon_+(x))\},$$

で与えられる。ここで C_k と ε_+ は

$$\begin{aligned} C_k(t) &= C_k(0) \exp(8i\lambda_k^3 t), \\ \varepsilon_+(x) &= \int_x^\infty \left(1 - sgn\left(\frac{dx}{ds}\right) \sqrt{1 + Q_x^2}\right) dx \end{aligned}$$

で与えられる。

$K_1(x, x)$ を用いて解 Q_x は

$$Q_x = \frac{2K_1(x, x)}{K_1^2(x, x) - 1}$$

で与えられる。ここで $K_1(x, x)$ は $x + \varepsilon_+(x)$ の関数であるので新しく独立変数として

$$u = x + \varepsilon_+(x)$$

を導入する。 du は ε_+ の定義を用いると $\sqrt{(dx)^2 + (dQ)^2}$ と解曲線の長さを表す。即ち解 Q は解曲線の長さを変数に取るにより一価の関数で表現できる。実際

$$Q = - \int_{-\infty}^u \frac{2K_1}{1 + K_1^2} du ,$$

$$\varepsilon_+ = \int_u^{\infty} \frac{2K_1^2}{1 + K_1^2} du ,$$

で与えられる。 x のままで積分を実行しようとする $K_1(x, x)$ が多価関数のため困難が生じるが u ではこの発散が無くなり、積分が実行できる。そのため N ソリトン解を求めることができる。1 ソリトン解は $\lambda = i\eta$ と取ると

$$Q = \frac{C(t) \exp(-2\eta u)}{\eta^2 \left(1 + \frac{C^2(t)}{4\eta^2} \exp(-4\eta u) \right)} ,$$

$$\varepsilon_+ = \frac{2}{\eta \left(1 + \frac{C^2(t)}{4\eta^2} \exp(-4\eta u) \right)} ,$$

で与えられる。振幅は $1/\eta$ で、速度は $4\eta^2$ で与えられる。これを第1図に示す。 ε_+ が多価であるため Q も多価関数でループ状を示す。次に2つの大きさの違うループソリトンの衝突を第2図に示す。小さいソリトンは速く進み、大きいソリトンの周りをまわりながら運動し、2個のソリトンに分かれて行く様子が分かる。

§4 第2種WKI方程式のNソリトン解とソリトンの衝突³⁾

Gel'fand-Levitan 方程式は第1種WKI方程式と形式的に同じ式

$$K_1(x, y) - F^*(x + y) - \int_x^{\infty} K_2^*(x, z) F^*(y + z) dz = 0 ,$$

$$K_2^*(x, y) - \int_x^{\infty} K_1(x, z) F''(y + z) dz = 0 ,$$

で与えられる。固有値として N 個の離散スペクトルのみを持つとすると $F(z)$ は

$$F(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k(t)}{\lambda_k} \exp\{i\lambda_k(z + 2\varepsilon_+(x))\},$$

で与えられる。ここで $C_k(t)$ と ε_+ は第 1 種 W K I 方程式と異なり

$$C_k(t) = C_k(0) \exp(4i\lambda_k^2 t),$$

$$\varepsilon_+(x) = \int_x^\infty (1 - \operatorname{sgn}(\frac{dx}{ds}) \sqrt{1 + |Q_x|^2}) dx,$$

で与えられる。

$K_1(x, x)$ と解 Q は

$$K_1(x, x) = \frac{1 - \operatorname{sgn}(dx/ds) \sqrt{1 + |Q_x|^2}}{Q_x} \exp(\mu_+ - \mu_+^*),$$

$$\mu_+ = \int_x^\infty \left\{ \frac{-Q_{xx}}{Q_x} \left(\operatorname{sgn}(\frac{dx}{ds}) \frac{1}{\sqrt{1 + |Q_x|^2}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log \sqrt{1 + |Q_x|^2} \right\} dx,$$

で与えられる。ここで新しく独立変数として

$$u = x + \varepsilon_+(x)$$

を導入する。 du は ε_+ の定義を用いると $\sqrt{(dx)^2 + |dQ|^2}$ で解曲線の長さを表す。即ち解 Q は解曲線を変数に取るにより一価の関数で表現できる：

$$Q = - \int_{-\infty}^u \frac{2K_1}{1 + |K_1|^2} \exp(\mu_+^* - \mu_+) du,$$

$$\varepsilon_+ = - \int_u^\infty \frac{2|K_1|^2}{1 + |K_1|^2} du,$$

$$\mu_+^* - \mu_+ = - \int_u^\infty \frac{|K_1|^2}{1 - |K_1|^2} \left(\frac{d}{du} \log \frac{K_1}{K_1^*} \right) du.$$

これらの式は積分が実行でき、 N ソリトン解を求めることができる。1 ソリトン解は $\lambda = \xi + i\eta$ と置き

$$Q = -i \frac{C^*}{\lambda^{*2}} \frac{\exp(-2i\lambda^* u)}{1 - \frac{|C|^2 \exp\{2i(\lambda - \lambda^*)u\}}{(\lambda - \lambda^*)^2}},$$

$$\varepsilon_+ = \frac{-i \frac{|C|^2 \exp\{2i(\lambda - \lambda^*)u\}}{|\lambda|^2(\lambda - \lambda^*)}}{1 - \frac{|C|^2 \exp\{2i(\lambda - \lambda^*)u\}}{(\lambda - \lambda^*)^2}},$$

で与えられる。振幅は $\eta/(\xi^2 + \eta^2)$ で、速度は -4ξ で与えられる。また振幅は周期 $T = \pi/2(\xi^2 + \eta^2)$ で振動している。ソリトンは3種類存在する。即ち $|\xi| < \eta$ の時解 $|Q|$ はループ状になり、 $|\xi| = \eta$ の時カusp状になる。 $|\xi| > \eta$ の時は通常のランプ状ソリトンになる。 $|\xi| < \eta$ の時の $|Q|$ と ε_+ の形状は第1図に良く似ているが、振幅は多価であるが必ずしもループになるとは限らな。 Q の実部を第3図に示す。

このように3種類のソリトンがあり、また振幅の大小と組み合わせると多様な取り方が可能であるが、大きなランプソリトンと小さなループソリトンの衝突を $|Q|$ の表示で第4図に示す。速度が固有値の実部で決るので同じ速度で動くソリトンの束縛状態が可能となる。第5図に同じぐらいの大きさのループソリトンの束縛状態を示す。第1種の方程式のときは2つの同じぐらいの大きさのループソリトンの衝突はある距離を置いて互いの振幅を変えるように相互作用をしたが、この場合には小さなループが大きなループに引き込まれたり、離れたりする運動を繰り返す。

§ 5 おわりに

この報告では一般化した逆散乱形式から得られた2つの非線形方程式を多価関数解を持つように *sign* 関数を導入し変形し、かつ新しい独立変数を解曲線に沿った線要素にとることでNソリトン解を求めることができた。特に2ソリトン解を用いソリトンの衝突を調べた。

このように厳密解を求めることは、2次元イジングモデルの厳密解がそうであったように、計算機のシュミレーションまたは近似法では得ることができない情報を与えてくれる。この厳密解を基にして摂動法などの応用が可能である。そのためにもこれから多くの非線形方程式の厳密解を求める努力が必要であろう。

文献

- 1) M.Wadati, K.Konno and Y.H.Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **47** (1979) 1698.
- 2) K.Konno, Y.H.Ichikawa and M.Wadati: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 1025.
- 3) K.Konno, M.Mituhashi and Y.H.Ichikawa: Preprint.
- 4) K.Konno and A.Jeffrey: J. Phys. Soc. Japan **52** (1983) 1 and *The Loop Soliton, in Advanced in Nonlinear Waves Vol I*, edited L. Debnath, (Pitman Advanced Publishing Program) (1984) 162.

図の説明

第1図 $\eta = 1$ での1ループソリトン解 (1 A) 及び $\varepsilon_+(x)$ (1 B) .

第2図 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0.2$ での2ループソリトンの衝突

第3図 $\lambda = 0.5 + i$ での Q の実部 (3 A) と虚部 (3 B) の時間変化

第4図 ランプソリトン $\lambda_1 = 1 + 0.8i$ とループソリトン $\lambda_2 = -1 + 5i$ の衝突。但し $-0.7 \leq t \leq 1.5$

第5図 $\lambda_1 = 2i$ と $\lambda_2 = 3i$ の2つのループソリトンの束縛状態。但し $-3.06 \leq t \leq -2.9$

FIG. 1A

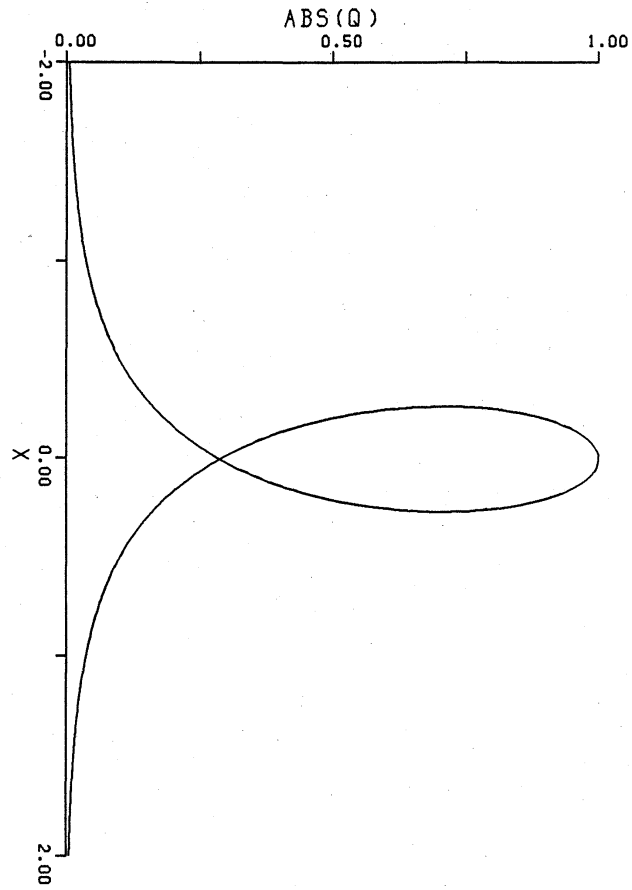
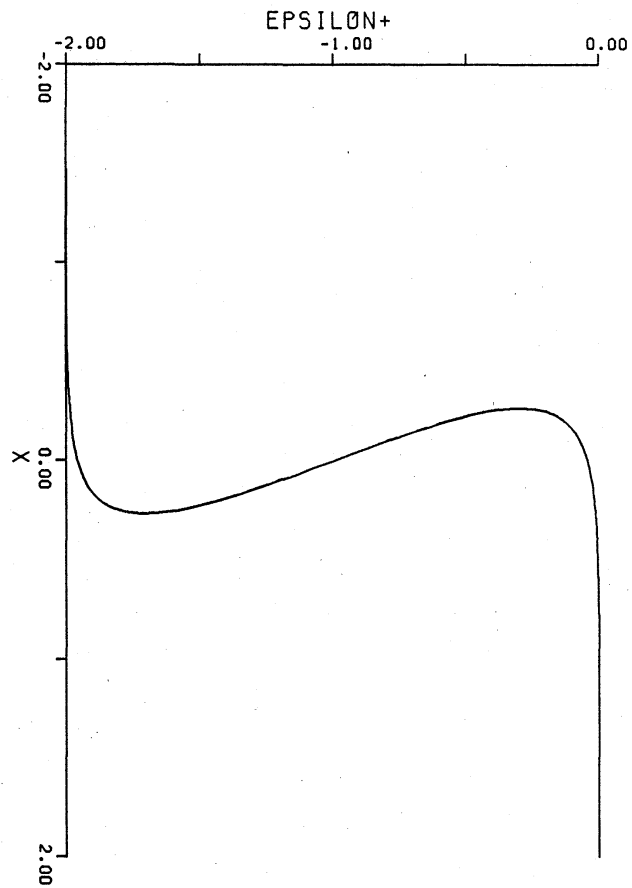


FIG. 1B



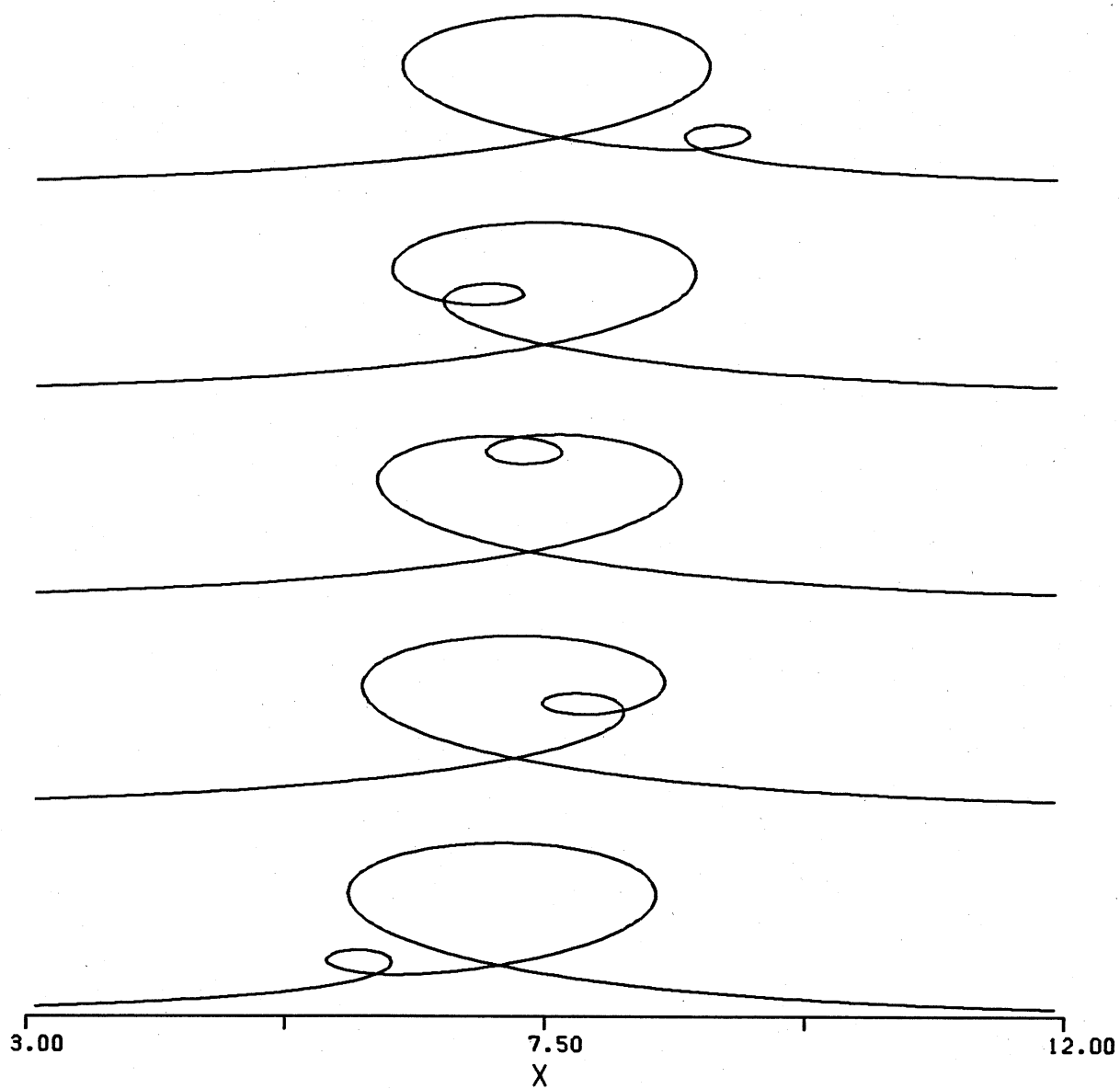


FIG. 2

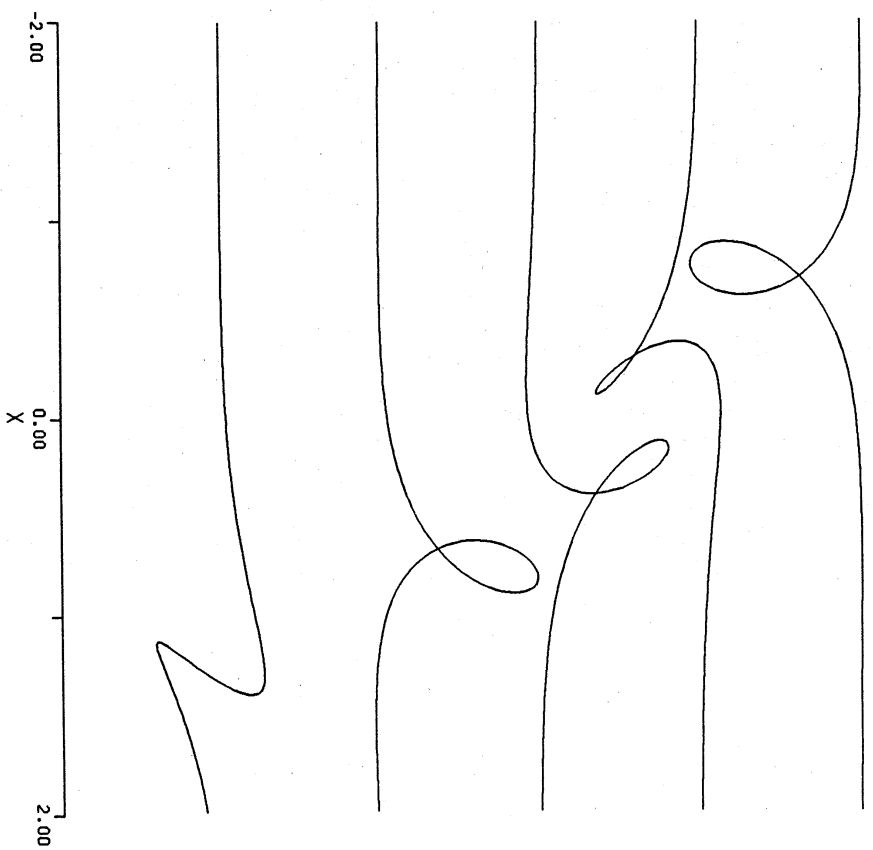


FIG. 3A

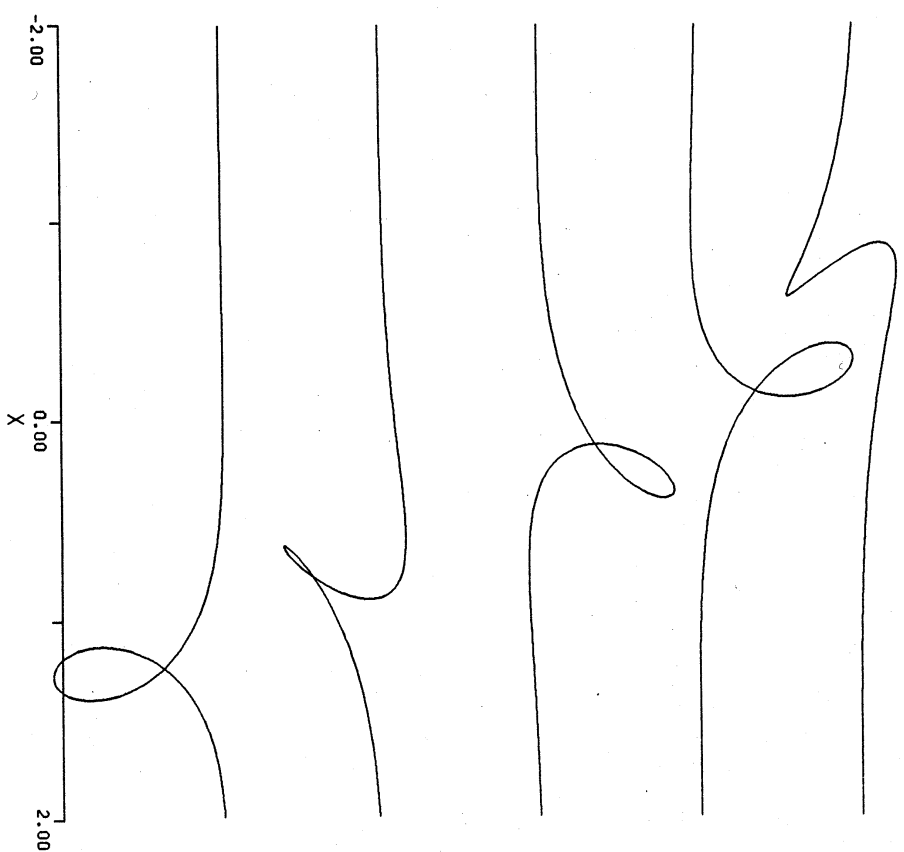


FIG. 3B

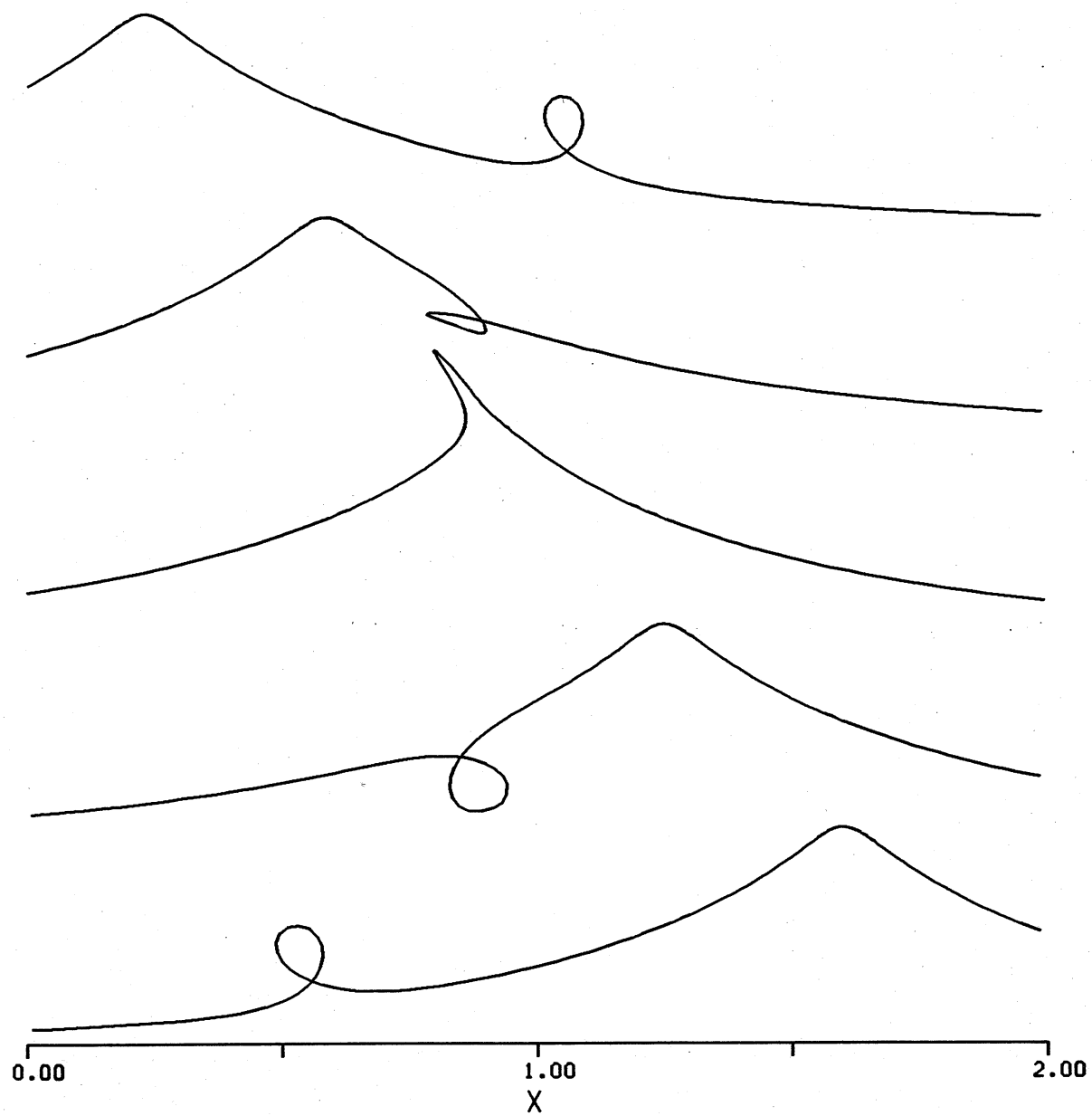


FIG. 4

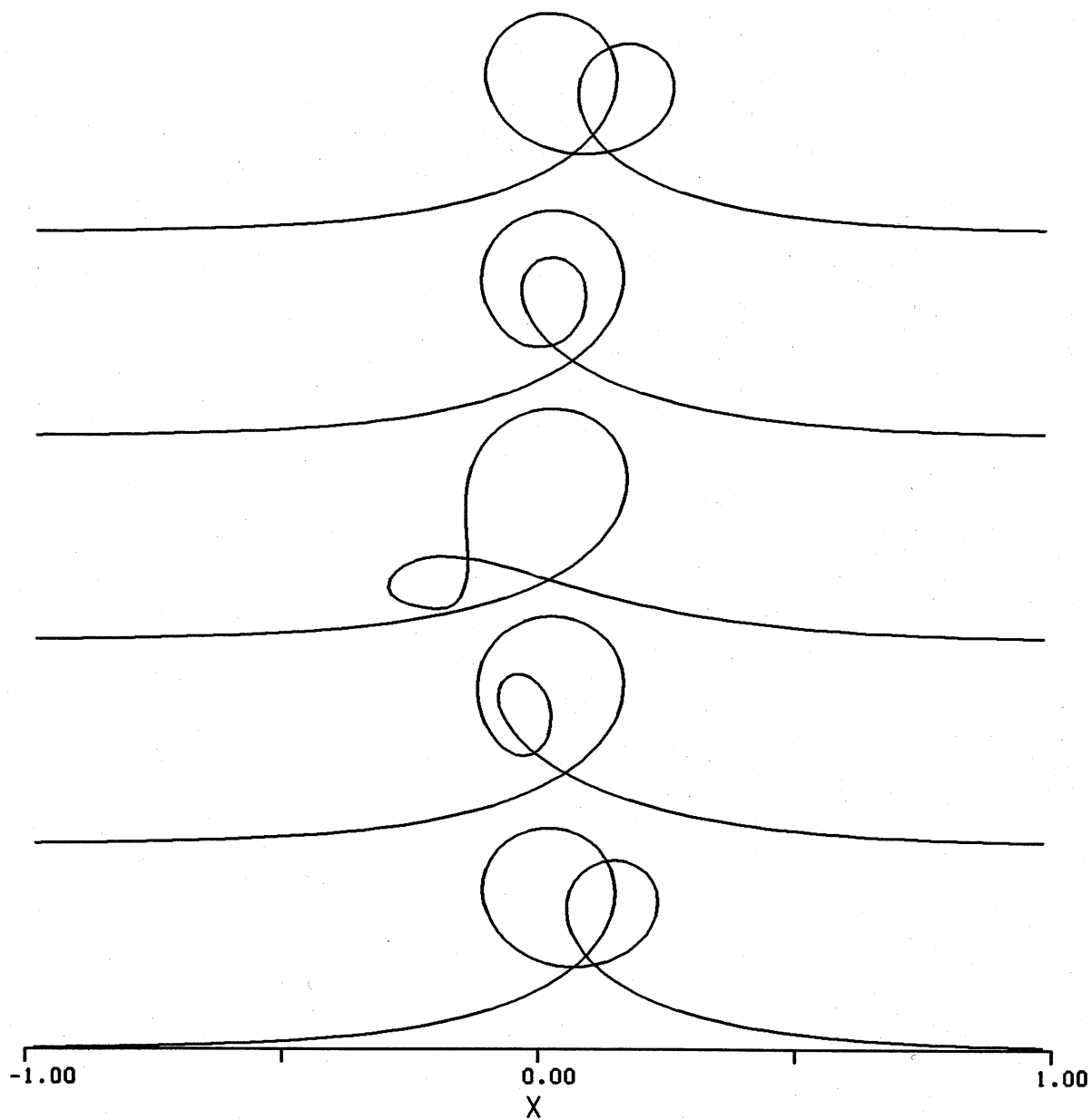


FIG. 5