

Construction of solutions to hyperbolic differential equations

慶大理工 星野慶介 (Keisuke Hoshino)

§0. 序

Ω は $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, の有界領域で C^2 級境界 $\partial\Omega$ をもつとし,
 T を任意の正数として $Q = (0, T) \times \Omega$ とおく. ベクトル値
関数 $u = (u^1, \dots, u^M) : Q \rightarrow \mathbb{R}^M$, $M \geq 1$, に対する
双曲型偏微分方程式

$$(1) \quad u_{tt} - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + |u_t|^{\gamma-2} u_t = 0 \quad \text{in } Q$$

を初期-境界条件

$$(2) \quad \begin{cases} u|_{t=0} = u_0, & u_t|_{t=0} = v_0 \\ u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} & \text{for } t \in (0, T) \end{cases}$$

のもとで考える.

(1) において

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u^j}{\partial x_\beta} \right) \right) \quad (i = 1, \dots, M)$$

である. ここで, ギリシャ文字は $1, \dots, m$ を, ラテン文字は $1, \dots, M$ を動くものとして総和規約を用いる.

係数 $A_{ij}^{\alpha\beta}(x)$ は $A_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ji}^{\beta\alpha}$ なる Ω 上の有界可測関数であり, 次を満たす: $\exists \lambda > 0, \exists L > 0$ s. t.

$$(3) \quad \lambda |\xi|^2 \leq A_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha^i \xi_\beta^j \leq L |\xi|^2 \quad \text{for } \xi = (\xi_\alpha^i) \in \mathbb{R}^{mM}, x \in \Omega.$$

(1) の非線型項の指数に現れる γ は

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma > 2 & \text{if } m = 2 \\ 2 < \gamma < 2^* = \frac{2m}{m-2} & \text{if } m \geq 3 \end{cases}$$

なる定数とする.

本稿の主題は, 問題(1)-(2)の‘弱解’ u の構成と, その空間微分 $\nabla u = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right)$ の高次可積分性の導出である.

§ 1. 諸定義と結果

Sobolev空間 $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^M)$, $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ を $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ と略記する. (2)の初期-境界データ u_0, v_0 は

$$(u_0, v_0) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

なるものとして, (1)-(2)の弱解を定義する. 定義を述べるために更に次の記号を導入しておく:

$$H_{u_0}^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u - u_0 \in H_0^1(\Omega) \}$$

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_A = A_{ij}^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_\beta}, \quad (u_t, \varphi_t) = \frac{\partial u^i}{\partial t} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}.$$

定義 u が問題 (1)-(2) の弱解であるとは、以下の四条件が成り立つことである：

- i) $u \in L^\infty((0, T), H^1(\Omega)) \cap W^{1, \gamma}((0, T), L^\gamma(\Omega))$
- ii) $u(t) \in H_{u_0}^1(\Omega) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T)$
- iii) $\lim_{t \downarrow 0} u(t) = u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega)$
- iv) $C_0^1([0, T], H_0^1(\Omega))$ に属する任意の φ が次を満たす：

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \{ -(u_t, \varphi_t) + (\nabla u, \nabla \varphi)_A + |u_t|^{\gamma-2} (u_t, \varphi) \} dx dt \\ &= \int_\Omega (v_0, \varphi(0, x)) dx. \end{aligned}$$

我々は弱解の構成のために近似解を導入し、空間微分の高次可積分性の議論もこの近似解に対して展開する。我々が扱うのは Rothe の近似解で、(1)における時間微分を差分に置き換えた形の方程式を満たす。

まず N を正整数 ($> T$) とし、区間 $(0, T)$ を幅 $h = T/N$ の小区間に N 等分して

$$t_n = nh \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおく。時間変数 t に関する関数 f が

$$f(t) = f(t_n) = f_n \quad \text{for } t \in (t_{n-1}, t_n]$$

の形をしているとき, φ は h -時間階段関数であるということにある.

定義 u_h が問題(1)-(2)の近似解であるとは,

i) $u_h(t)$ が $(-2h, T]$ 上の $H_0^1(\Omega)$ 値の h -時間階段関数:

$$u_h(t) = u_n \quad \text{for } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = -1, 0, 1, \dots, N)$$

であり

ii) $u_{-1} = u_0 - h v_0$ ((u_0, v_0) は与えられた初期-境界データ)

かつ

iii) 任意の $\chi \in H_0^1(\Omega)$, $n = 1, \dots, N$ に対して

$$\int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{h^2}, \chi \right) + (\nabla u_n, \nabla \chi)_A + \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right|^{r-2} \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \chi \right) \right\} dx = 0$$

を満たすことである.

近似解は、以下の手続きにより $u_1, u_2, \dots, u_N$ を逐次決定することにより構成される: 汎関数

$$F_n(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2h^2} |u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2 + \frac{1}{2} (\nabla u, \nabla u)_A + \frac{1}{r} \left| \frac{u - u_{n-1}}{h} \right|^r \right\} dx$$

の $H_0^1(\Omega)$ における最小点を u_n とする. u_n は F_n の Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{h^2} - \operatorname{div}(A(x) \nabla u_n) + \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right|^{r-2} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = 0$$

を弱い意味で満たす. これは上記 iii) を意味する.

近似解に対して 次のような記号を用いる:

$$\tilde{u}_h(t) = u_h(t-h), \quad \bar{\partial}_t u_h = \frac{u_h - \tilde{u}_h}{h}, \quad \bar{\partial}_t^2 u_h = \frac{u_h - 2\tilde{u}_h + \tilde{\tilde{u}}_h}{h^2}$$

近似解の存在については前頁で説明したが、更に近似解の空間微分に対して高次可積分性が成り立つ。その陳述には、以下の記号を要する： $R > 0$ ， $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ に対し

$$Q_R(z_0) = \Lambda_R(t_0) \times B_R(x_0), \quad \Lambda_R(t_0) = (t_0 - R, t_0 + R),$$

$$B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| < R\};$$

$$\int_A u \, dz = \frac{1}{|A|} \int_A u \, dz \quad \text{for } A \subset \mathbb{R}^{m+1},$$

但し $|A|$ は A の Lebesgue 測度， $dz = dx \, dt$ 。

定理 1. $(u_0, v_0) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ に対して，(1)-(2) の近似解 u_h が存在し， $m, M, \lambda, L, u_0, v_0$ に依存する正定数 ε_0, C があって 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ， $Q_{2R}(z_0) \subset Q$ ， $z_0 = (t_{n_0}, x_0)$ ($n_0 = 1, 2, \dots, N-1$) に対し

$$(5) \quad \left(\int_{Q_R(z_0)} |\nabla u_h|^{2+\varepsilon} \, dz \right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \leq C \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u_h|^2 \, dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ + C \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{2+\varepsilon} + |\bar{\partial}_t \tilde{u}_h|^{2+\varepsilon} + |\bar{\partial}_t u_h|^{\frac{2+\varepsilon}{2} \cdot \frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} \, dz \right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$$

が成り立つ。

弱解に対しては次の結果を得る。

定理 2. 初期-境界データ $(u_0, v_0) \in H^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ が

$$(6) \quad \operatorname{div}(A(x) \nabla u_0) - |v_0|^{\gamma-2} v_0 \in H_0^1(\Omega)$$

を満たすとき，(1)-(2) の弱解 u が存在し， $m, M, \lambda, L, u_0, v_0$ に依存する正定数 ε_0, C があって 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ， $Q_{2R}(z_0) \subset Q$ ， $z_0 = (t_0, x_0)$ に対して

$$(7) \quad \left(\int_{Q_R(z_0)} |\nabla u|^{2+\varepsilon} \, dz \right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \leq C \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u|^2 \, dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ + C \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} |u_t|^{2+\varepsilon} + |u_t|^{\frac{2+\varepsilon}{2} \cdot \frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} \, dz \right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}.$$

注意. 上の定理の中の不等式 (5), (7) に現れる定数 2^* は, $m \geq 3$ の場合 (4) によって定められるが, $m=2$ のときは $\gamma < 2^* < \infty$ を満たす任意の定数とする.

§2. 基本的な評価

近似解 u_h に対する エネルギー評価と Caccioppoli 評価を導く. Caccioppoli 評価は 高次可積分性の議論において 本質的役割を果たす.

補題 1 (エネルギー評価) $(u_0, v_0) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ に対する (1)-(2) の

近似解 u_h に対して

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, T)} \int_{\{t\} \times \Omega} |\bar{\partial}_t u_h|^2 + |\nabla u_h|_A^2 \, dx &\leq \int_{\Omega} |v_0|^2 + |\nabla u_0|_A^2 \, dx, \\ \int_Q |\bar{\partial}_t u_h|^\gamma \, dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_0|^2 + |\nabla u_0|_A^2 \, dx. \end{aligned}$$

証明. 近似解の定義 iii) の等式に $\chi = u_n - u_{n-1}$ を代入して得られる

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \{ (\bar{\partial}_t u_n - \bar{\partial}_t u_{n-1}, \bar{\partial}_t u_n) + (\nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u_{n-1})_A + h |\bar{\partial}_t u_n|^\gamma \} \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (|\bar{\partial}_t u_n|^2 + |\nabla u_n|_A^2) - (|\bar{\partial}_t u_{n-1}|^2 + |\nabla u_{n-1}|_A^2) \} \, dx + h \int_{\Omega} |\bar{\partial}_t u_n|^\gamma \, dx \end{aligned}$$

から

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{\partial}_t u_n|^2 + |\nabla u_n|_A^2 \, dx + h \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\bar{\partial}_t u_i|^\gamma \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_0|^2 + |\nabla u_0|_A^2 \, dx.$$

これより補題の二つの評価が出る.

補題2 (Caccioppoli 評価) u_h は $(u_0, v_0) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ に対する

(1)-(2) の近似解とする. このとき, m, λ, L のみに依存する正定数

C があって 任意の $Q_{2R}(z_0) \subset Q$, $z_0 = (t_{n_0}, x_0)$ ($n_0 = 1, 2, \dots, N-1$) に対し

$$\begin{aligned} \int_{Q_R(z_0)} |\nabla u_h|_A^2 dz &\leq CR^{-2} \int_{Q_{2R}(z_0)} |u_h - \bar{u}_{h, x_0, 2R}(t)|^2 dz + C \int_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^2 + |\bar{\partial}_t \tilde{u}_h|^2 dz \\ &\quad + C \int_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{p-1} |u_h - \bar{u}_{h, x_0, 2R}(t)| dz. \end{aligned}$$

ここで

$$\bar{u}_{h, x_0, 2R}(t) = \int_{B_{2R}(x_0)} u_h(t, x) dx$$

証明. [2] の Lemma 1 の $\bar{u}_{h, z_0, 2R}$ を $\bar{u}_{h, x_0, 2R}(t)$ に置き換えて 同じ議論をおこなえばよい.

次に, 近似解 u_h に付随して

$$v_h(t) = \frac{t-t_{n-1}}{h} \bar{\partial}_t u_n + \frac{t_n-t}{h} \bar{\partial}_t u_{n-1} \quad \text{for } t \in (t_{n-1}, t_n)$$

で定義される v_h を考える. v_h は $\bar{\partial}_t^2 u_h = \frac{\partial v_h}{\partial t}$ を満たし

$$H^1(Q) = L^2((0, T), H^1(\Omega)) \cap H^1((0, T), L^2(\Omega))$$

に属するか, 定理2の仮定のもとでは次のことがいえる.

補題3. 初期-境界データ $(u_0, v_0) \in H^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ が (6) を満たすとき,

$\{v_h : h = T/N, N \text{ は正整数}\}$ は $H^1(Q)$ において有界である.

証明 $u_{-2} = u_0 - 2h v_0 + h^2 (\operatorname{div}(A(x) \nabla u_0) - |v_0|^{p-2} v_0)$ と定義すると,

近似解の定義 iii) が $n=0$ に対しても成り立つ. iii) の等式の n を $n-1$

で置き換えた等式を もとの等式 から 引くと

$$\int_{\Omega} \{ (\bar{\partial}_t^2 v_n, \chi) + (\nabla v_n, \nabla \chi)_A + ((|v_n|^{\gamma-2} v_n - |v_{n-1}|^{\gamma-2} v_{n-1})/h, \chi) \} d\chi = 0,$$

ここで $v_n = \bar{\partial}_t u_n$ とおいた、 $\chi = v_n - v_{n-1}$ を代入、変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{\partial}_t v_n|^2 + |\nabla v_n|_A^2 d\chi + \frac{1}{h} \int_{\Omega} (|v_n|^{\gamma-2} v_n - |v_{n-1}|^{\gamma-2} v_{n-1}, v_n - v_{n-1}) d\chi \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{\partial}_t v_{n-1}|^2 + |\nabla v_{n-1}|_A^2 d\chi \end{aligned}$$

となり、左辺第二項が正になることが容易に示される。よって

$$\sup_{t \in (0, T)} \int_{\{t\} \times \Omega} |\bar{\partial}_t v_n|^2 + |\nabla v_n|_A^2 d\chi \leq 2 \int_{\Omega} |\operatorname{div}(A(x) \nabla u_0) - |v_0|^{\gamma-2} v_0|^2 + |\nabla v_0|_A^2 d\chi$$

が導かれ、所期の結果を得る。

この補題は、近似解 u_h の $h \downarrow 0$ のときの収束を導く。

§3. 定理の証明.

定理1の証明. Caccioppoli評価(補題2)の右辺最終項は Hölder

不等式と Sobolev-Poincaré 不等式により、次のように評価される。

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2R}(Z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{\gamma-1} |u_h - \bar{u}_{h, X_0, 2R}(t)| dz \\ \leq \left(\int_{Q_{2R}(Z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} dz \right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left(\int_{Q_{2R}(Z_0)} |u_h - \bar{u}_{h, X_0, 2R}(t)|^{2^*} dz \right)^{\frac{1}{2^*}} \\ \leq C \left(\int_{Q_{2R}(Z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} dz \right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left\{ \int_{\Lambda_{2R}(t_{n_0})} R^{2^*} \left(\int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u_h|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} dt \right\}^{\frac{1}{2^*}} \\ \leq C \left(\int_{Q_{2R}(Z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} dz \right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left(\sup_{t \in \Lambda_{2R}(t_{n_0})} \int_{\{t\} \times B_{2R}(x_0)} |\nabla u_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}} \left(\int_{Q_{2R}(Z_0)} |\nabla u_h|^2 dz \right)^{\frac{1}{2^*}}. \end{aligned}$$

最終辺の二番目の積分は、補題1により、初期データのみ依存する

定数でおさえられる。Youngの不等式と、再び Sobolev-Poincaré 不等

式を用いれば、Caccioppoli 評価は 結局

$$\begin{aligned} \int_{Q_R(z_0)} |\nabla u_h|^2 dz &\leq C \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u_h|^s dz \right)^{\frac{2}{s}} + C \int_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^2 + |\bar{\partial}_t \tilde{u}_h|^2 dz \\ &\quad + C \theta^{-(2^*-1)} \int_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} dz + \theta \int_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u_h|^2 dz \end{aligned}$$

となる。ここで θ は $0 < \theta < 1$ なる任意の定数, $s = \frac{2(m+1)}{m+3}$ である。

$$s < 2, \quad 2 < \gamma, \quad \frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1} < \gamma$$

に注意して 下の命題を用いれば, 定理 1 を得る。

命題 ([1], Proposition 1) $g \in L^q(Q)$ と $f \in L^r(Q)$, $r > q > 1$, は

非負値 h -時間階段関数 とする。正定数 b と定数 $\theta \in [0, 1)$ があって

任意の $Q_{2R}(z_0) \subset Q$, $z_0 = (t_{n_0}, x_0)$ ($n_0 = 1, \dots, N-1$) に対して

$$\int_{Q_R(z_0)} g^q dz \leq b \left\{ \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} g dz \right)^q + \int_{Q_{2R}(z_0)} f^q dz \right\} + \theta \int_{Q_{2R}(z_0)} g^q dz$$

が成り立つとする。このとき, b, θ, q, r, m へのみ依存する正定数

ε_0, C があって, 任意の $Q_{2R}(z_0) \subset Q$, $z_0 = (t_{n_0}, x_0)$, $p \in [q, q + \varepsilon_0)$ に対し

$$\left(\int_{Q_R(z_0)} g^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\{ \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} g^q dz \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{Q_{2R}(z_0)} f^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

が成り立つ。

定理 2 の証明. 補題 3 と compact imbedding $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ に

より, $\{v_h\}$ は $L^2(Q)$ で強収束する列を含み, 更に適当な部分列を

とれば Q 上 a.e. で収束する。

$$\int_Q |v_h - \bar{\partial}_t u_h|^2 dz \leq \int_Q |\bar{\partial}_t u_h - \bar{\partial}_t \tilde{u}_h|^2 dz = h^2 \int_Q |\bar{\partial}_t^2 u_h|^2 dz$$

の最後の積分は 補題 3 により h に関して一様有界であるから,

$\bar{\partial}_t u_h$ と v_h が共通の極限をもつことがわかる。補題 1 に基づき,

[1] の Theorem 2 の証明にならえは, ある

$$u \in L^\infty((0, T), H^1(\Omega)) \cap W^{1, \gamma}((0, T), L^\gamma(\Omega))$$

に対して $h \downarrow 0$ のとき (必要なら部分列をとって)

$$\bar{\partial}_t u_h \rightharpoonup u_t, \quad \nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \quad \text{weakly* in } L^\infty((0, T), L^2(\Omega)),$$

$$u_h \rightarrow u \quad \text{strongly in } L^2(Q)$$

となる. 上記により, $\bar{\partial}_t u_h \rightarrow u_t$ a.e. on Q を得る. よって

$L^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}(Q)$ の有界列 $\{|\bar{\partial}_t u_h|^{\gamma-2} \bar{\partial}_t u_h\}$ の弱収束(部分列の)極限は,

$|u_t|^{\gamma-2} u_t$ となる. 以上により, u が 弱解 の定義の条件 iv) を

満たすことが導かれる. 以下は [1] の Theorem 2 と全く同様にして証明される.

References

- [1] K. Hoshino and N. Kikuchi, *On a construction of weak solutions to linear hyperbolic partial differential systems with the higher integrable gradients*, Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. St. Petersburg 233 (1996) 30-52.
- [2] K. Hoshino, *On a method constructing solutions to hyperbolic partial differential equations*, to appear in Nonlinear Studies.
- [3] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. Math. Studies n. 105,

Princeton University Press, Princeton, N.J., 1983.

- [4] M. Giaquinta and M. Struwe, *On the partial regularity of weak solutions of non-linear parabolic systems*, J. Reine Angew. Math. 311/312 (1979) 145-169
- [5] F.W. Gehring, *The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math. 130 (1973) 265-277.
- [6] E. Rothe, *Wärmeleitungsgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten*, Math. Ann. 104 (1931) 340-362