

量子情報通信路の作用素代数的取り扱い

東京理科大学 情報科学科

大矢雅典

レーザーの発見・発展と相俟って、近年、レーザーによる信号の伝送の問題が非常に重要なものとなってきた。レーザーの出現は、周波数がラジオ波のそれの1000倍以上である電磁情報の伝達に使用することと可能にした。このような状況下において、量子力学的情報理論がレーザーによる通信の基礎として確立されることが望まれている。

ここでは、量子論的通信路の数学的構造を調べ、情報（エントロピー）をロスなく伝送するためにはどのような通信路が必要であるかを考えてみることにする。

情報理論においては、入力側と出力側の力学系（空間）が必要となる。

$$\text{入力} \longrightarrow \langle\langle \text{通信路} \rangle\rangle \longrightarrow \text{出力}$$

これらの力学系は、次の W^* 三ツ組で述べられるという。

入力側の W^* -力学系を $(\mathfrak{A}, \sigma, \omega)$, $\omega(R)$ で表わし、出力

例のそれを $(\mathcal{B}, \mathcal{Q}(\mathcal{B}), \tau(\mathcal{R}))$ で表わすことにする。

ここで, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は それぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ 上の単位元 I を含む von Neumann 代数であり (i.e., $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{A}' \triangleq \{Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid [A, Q] = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$ とすると, $\mathcal{A}'' \triangleq (\mathcal{A}')' = \mathcal{A}$ とする Banach*-代数), $\mathcal{Q}(\mathcal{A}), \mathcal{Q}(\mathcal{B})$ はそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 上の正線状形式の全体とあり (i.e., $\forall \varphi \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}), \varphi(A^*A) \geq 0, \varphi(I) = 1, \varphi(A_\alpha) \uparrow \varphi(A)$ for $\forall A_\alpha \uparrow A$ in $\mathcal{A}$). 又, α, τ は $\mathcal{R}$ から $\mathcal{A}$ 及び $\mathcal{B}$ の *-自己同型群 Λ の連続線形写像である (i.e., $\alpha_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \alpha_t(AB) = \alpha_t(A)\alpha_t(B), \alpha_t(A^*) = \alpha_t(A)^*$ $\lim_{t \rightarrow 0} \|\alpha_t(A) - A\| = 0$ for $\forall t \in \mathcal{R}, \forall A, B \in \mathcal{A}$).

通常の量子系は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上での有界作用素の全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 及びその Hamiltonian H に δ, τ 生成されるユニタリ-作用素 $U_t = e^{itH}$ に δ, τ 記述されるが, W^* 三ツ組に δ, τ 記述は, その一般化に属しているものがある。

$\mathcal{A}$ の状態を $\mathcal{B}$ の状態へ変える通信路は古典的自情報理論からの類推によって, 次のように定められる。

通信路 Λ^* とは $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への次の条件を満たす写像 Λ の共役写像である:

(1) Λ は完全正定値 (i.e., 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$\mathcal{B}$ の元からなる $n \times n$ 正定値行列 (B_{ij}) , $B_{ij} \in \mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の $n \times n$ 正定値行列 $(\wedge B_{ij})$ にうつす。)

(2) $\wedge$ は ultraweakly continuous.

(3) $\wedge(I) = I$.

完全正定値写像は非可換条件付期待値の拡張ともいえる概念であり、今や、物理学の様々な領域で重要な道具となつてゐるものである。(e.g., Generalized Master eq. と Pauli Master eq. などと導く場合の縮約は完全正定値写像である。)

通常の通信理論において、通信路のエルゴード特性がその解析のために重要な役割を演じてゐる。そこで、我々の非可換通信路 (non-commutative channel) においても、エルゴード特性を導入しておく必要がある。そのために、まず、いくつかの集合を定義するところから始めよう。

$I(\alpha)$ を α の T で不変な状態の集合とし、 $K(\alpha)$ を α に対して K.M.S. 条件を満たす状態の集合とする。同様に $I(\tau)$, $K(\tau)$ を定義する。更に、 $\mathcal{B}(\alpha)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対し、 $\text{ex} \mathcal{S}$ は $\mathcal{S}$ の端点の全体を表わすことにする。(e.g. $\mathcal{S} = I(\alpha), K(\alpha), \mathcal{B}(\alpha)$)

さて、エルゴード通信路を考えよう [3]。

< Definitions >

(1) Λ^* が定常通信路 (stationary channel, $\Lambda^* \in SC$) であるとは $\Lambda \circ T_t = \alpha_t \circ \Lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$ が満たされることをいう。

(2) Λ^* が I μ マークト通信路 ($\Lambda^* \in EC$)

$$\iff \Lambda^* \in SC \text{ 且 } \Lambda^*(\text{ex} I(\alpha)) \subset \text{ex} I(\tau).$$

(3) Λ^* が KMS 通信路 ($\Lambda^* \in KC$)

$$\iff \Lambda^* \in SC \text{ 且 } \Lambda^*(K(\alpha)) \subset K(\tau).$$

$\mathcal{S}$ の中の状態 $\in \Lambda^*$ に δ , τ を送るとし, 出力側で得られた結果から, 送られた状態を言い当てることを望む。これを可能にする通信路として決定論的通信路 (deterministic channel) という概念を導入しておく [4]。

(4) $\Lambda^* \in DC(\mathcal{S}) \iff \mathcal{S}$ の任意の状態 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ において, $\Lambda^*\varphi_1 = \Lambda^*\varphi_2$ ならば $\varphi_1 = \varphi_2$ 。

最後に, W^* 力学系におけるエントロピーを導入しよう [4]。
状態 $\varphi \in \mathcal{S} \subset \mathcal{G}(\mathcal{A})$ に対して, φ が $\text{ex} \mathcal{S}$ の元の convex combination に分解できることを: $\exists \lambda_n \in (0,1), \exists \{\varphi_n\} \subset \text{ex} \mathcal{S}$
s.t. $\sum_n \lambda_n = 1$, $\varphi = \sum_n \lambda_n \varphi_n$,
 φ のエントロピー $S^{\mathcal{S}}(\varphi) \in$

$$S^{\mathcal{S}}(\varphi) = \inf \left\{ - \sum_n \lambda_n \log \lambda_n \right\}$$

と定める。ここで "inf" は上のような極小分解に關して取る。φがこのような分解で表れるとき、 $S^{\mathcal{J}}(\varphi) = \infty$ と定める。

$$\mathcal{J} = K(\mathcal{A}) \text{ のとき, } S^{\mathcal{J}}(\varphi) = S^K(\varphi), \quad \varphi \in K(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{J} = I(\mathcal{A}) \text{ のとき, } S^{\mathcal{J}}(\varphi) = S^I(\varphi), \quad \varphi \in I(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{O}(\mathcal{A}) \text{ のとき, } S^{\mathcal{J}}(\varphi) = S(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{O}(\mathcal{A}),$$

と表わすことができる。

この $S(\varphi)$ は $\mathcal{A} = B(H)$ のとき通常の von Neumann エントロピーに一致する。

二つの状態 $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ 間のある意味での相異を量度として相対エントロピー $[1, 2, 5]$ が次のように定められる。

$$S(\varphi|\psi) = \begin{cases} \infty & \text{for } \varphi \not\ll \psi \\ -\langle \varpi, \log \Delta_{\varpi, \varpi} \varpi \rangle & \text{for } \varphi \ll \psi. \end{cases}$$

ここで、 ϖ は ψ の巡回且分離ベクトルで、 $\Delta_{\varpi, \varpi}$ は relative modular operator である。詳しくは [1] 参照。

以上の準備の下で、次の結果が得られる [3, 4]。

《主要結果》

<1> エルゴード通信路, KMS 通信路は存在する。

<2> $\Lambda^* \in EC \Rightarrow \Lambda^* \bmod I(\mathcal{A})$ で SC の中の端点

<3> von Neumann 代数 $\mathcal{A}$ が単純である $\mathcal{A} = B(H)$ のとき, $\Lambda^* \in EC \iff \Lambda^* \bmod I(\mathcal{A})$ が SC の中の元である.

<4> $\Lambda^* \in SC$, $\alpha_t(A) = U_t A U_{-t}$ (U_t unitary operator on H)
 $\implies$ 強連続 t -径数 γ -群 $\{T_t | t \in \mathbb{R}\}$ が存在
 12, $S(T_t(B)) = T_t S(B) T_{-t}$ ($\because S$ は $\Lambda(B) = V^* S(B) V$
 で定めらる (Stinespring の定理) $\mathcal{A}$ の表現である).

<5> $\Lambda^* \in SC$ のとき,
 完全正定値写像 Σ が存在 12 $\Sigma \circ T_t = \alpha_t \circ \Sigma$ 且 $\Sigma \leq \Lambda$
 $\iff S(\mathcal{A})' \cap T(R)' \neq \{0\}$.

<6> $(\mathcal{A}, \alpha)$ が γ -abelian (i.e. $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \varphi(D^*[\alpha_t(A), B]D) = 0$ for $\forall \varphi \in I(\mathcal{A})$, and $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$) とき Λ が
 $*$ -準同型である $KC = EC$.

<7> $\Lambda^* \in DC \cap KC$ 且 Λ が $*$ -準同型 のとき
 $S^K(\varphi) = S^K(\Lambda^* \varphi)$ for $\forall \varphi \in K(\mathcal{A})$.

<8> $\Lambda^* \in DC(I(\mathcal{A})) \cap EC \implies S^I(\varphi) \geq S^I(\Lambda^* \varphi)$ for $\forall \varphi \in I(\mathcal{A})$.

<9> $\Lambda^* \in EC$ のとき,

(i) $\Lambda^* \bmod ex I(\mathcal{A})$ が $*$ -bijection $\implies S^I(\varphi) = S^I(\Lambda^* \varphi)$ for $\forall \varphi \in I(\mathcal{A})$

(ii) Λ が $*$ -準同型 とき $\Lambda^* \in DC(ex I(\mathcal{A})) \implies S^I(\varphi) = S^I(\Lambda^* \varphi)$
 for $\forall G$ -abelian $\varphi \in I(\mathcal{A})$.

<10> $\Lambda^* \bmod \mathcal{O}(\mathcal{A})$ が $*$ -bijection $\implies S(\varphi) = S(\Lambda^* \varphi)$ for $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$.

<11> $\Lambda(B)$ が φ の centralizer $\mathcal{A}_\varphi$ に属する $*$ -代数 とき,

$S_{\Lambda(\mathbb{R})}(\varphi|\omega) = S(\varphi|\omega) < \infty$ $\alpha \in \mathbb{Z} \wedge^*$ pair
 $\{\varphi, \omega\}$ is deterministic.

《参考文献》

- [1] H. Araki, Relative Entropy of states of von Neumann Algebras I and II ; R.I.M.S. Kyoto Univ. II, 809, 1976 and 13, 173, 1977.
- [2] F. Hiai, M. OHYA and M. Tsukada, Sufficiency, KMS Condition and Relative Entropy, to appear.
- [3] M. Ohya, Quantum Ergodic Channels in Operator Algebras ; Res. Rep. on Inform. Sci. A-69, 1980.
- [4] M. Ohya, Entropy Transmission in Non-Commutative Dynamical Systems ; preprint.
- [5] H. Umegaki, Conditional Expectation in an Operator Algebra III and IV ; Kodai Math. Sem. Rep. II, 51, 1959 and 14, 59, 1962.