

Dirichlet 問題の固有値と境界変動

東大 理

藤原大輔

序

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を 滑らかな境界をもつ有界領域とする。

その境界を γ とする。2次元の Dirichlet 問題の固有値問題と考える。

$$(1) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda) u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\gamma} = 0 \end{cases}$$

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ を, (1) の固有値とするとこれは, 領域 Ω の汎関数である。簡単のため, 以後 Ω は単連結とする。すると, λ_j は Ω の境界 γ の汎関数であるとしてよい。かかる γ の全体は, 可分な Hilbert 多様体 Γ を成す。 Γ の部分集合 B が, residual であるとは, 開かつ稠密な可算個の集合の共通集合となることである。

私が, 谷川政雄氏, 豊田修一氏と得た結果を紹介する。

定理 1, Γ のある residual な部分集合 B が

あり、 $\forall \gamma \in B$ に対して、(1)の固有空間は、 γ によって1次元にたまたまに決まる。

これは、領域が対称性を持つ、極く一般の型をいっているわけだが、すべての固有値が単純であることを示している。同様の結果は、Uhlenbeck [4] によって、ポテンシャル振動の場合とか、Riemann空間の Laplace-Beltrami 作用素について、計量が振動される場合について知られている。

定理1は、より強い形で Arnold [1] に予想が述べられている。

§1. 境界の作る Hilbert 多様体 Γ .

$S' \in$ 、1次元の単位円周 $= \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とする。

Γ を、埋め込み：

$$S' \ni \cdot \longrightarrow r(\theta)$$

の作る Hilbert 多様体とする。但し、 $x_1(\theta)$ 、 $x_2(\theta)$ は、Sobolev 空間 $H^5(S')$ の元とする。Sobolev の埋蔵定理により、 $x_1(\theta)$ 、 $x_2(\theta)$ は C^4 級である。 Γ の距離を

$$(1.1) \quad \rho(r, r') = (\|x_1 - x_1'\|_5^2 + \|x_2 - x_2'\|_5^2)^{\frac{1}{2}}$$

で定義する。ここで $\|\cdot\|_5$ は Sobolev 空間 $H^5(S')$

この Sobolev norm である。

$\gamma \in \Gamma$ は C^4 級の simple Jordan curve を定義する。
従って, $\mathbb{R}^2$ の単連結領域 Ω_γ を囲む。 γ への単位外法
線ベクトル場を $\nu(\theta)$ とする。 γ について, Tubular
neighborhood theorem が成立するから, ある $\varepsilon(\gamma) > 0$
が存在して, 任意の $\gamma' \in \Gamma$ で $d(\gamma, \gamma') < \varepsilon(\gamma)$ となる
ものについては,

$$(1.2) \quad \omega_{\gamma'}^{\gamma'} : \overline{\Omega}_\gamma \longrightarrow \overline{\Omega}_{\gamma'}$$

という C^4 級の微分同相が存在する。 そして, $\omega_{\gamma'}^{\gamma'} \in \gamma$ に
制限したものは $\gamma \circ \gamma^{-1}$ に一致するとしても良い。 さらに,
必要ならば, $\varepsilon(\gamma)$ をさらに小さくして, $(\gamma, \gamma') \rightarrow \omega_{\gamma'}^{\gamma'}$
は, C^4 級であると仮定して良い。 従って, $\gamma_t, t \in [0, 1]$
が Hilbert 多様体 Γ 上の $\gamma \equiv \gamma_0$ を通る曲線とすると,
1-パラメータの微分同相族 $\{\omega_{\gamma_t}^{\gamma_t}\}_{t \in [0, 1]}$ を得る。

$\forall x \in \overline{\Omega}_\gamma$ において,

$$(1.3) \quad X(x) = \frac{\partial \omega_{\gamma_t}^{\gamma_t}(x)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

と置く。 $X(x) = (X_1(x), X_2(x))$ は $\overline{\Omega}_\gamma$ 上の vector 場であ
る。 $\omega_{\gamma'}^{\gamma'}$ は, (γ, γ') に対して一意に決定される。 従
って vector 場 $X(x)$ は γ_t によって, 一意に決定されるわけ
ではない。 (しかし, γ の γ への制限, $\delta\gamma(\theta) = X(\gamma(\theta))$)

は、 γ によって、定まる。さらに、 $\delta\gamma(t)$ の法線方向の成分

$$(1.4) \quad \{\delta\gamma(t), \nu_a\} = \langle X(\sigma(t)), \nu_a \rangle$$

をとることによって、 S' のパラメータ- t の取り方による多様性もなくすことが出来る。かくて、Hilbert 多様体 Γ の γ における接ベクトル空間 $T_\gamma \Gamma$ として

$$T_\gamma \Gamma = \{ \{ \delta\gamma(t), \nu_a \} = \langle X(\sigma(t)), \nu_a \rangle \mid X(\gamma(t)) \in H^5(S') \times H^5(S') \}$$

と同一視することが出来る。

§2 Main theorem の証明

$\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{B}_\gamma$ を上述の如くとする。問題1を考えると $\pi \cap \mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_\gamma$ となる。多様体 Γ は separable であるから、定理1は局所化出来る。

Theorem 1' $\forall \gamma \in \Gamma$ に対して、ある開近傍 $U(\gamma)$ が存在して、その residual 部分集合 $B(\gamma)$ があり、 $\forall \gamma \in B(\gamma)$ に対して、 $\mathcal{B}_\gamma$ で与えられた問題(1)の固有空間はすべて次元が1である。

定理1' の証明を、ケッチする。 $g_\gamma(x, x')$ を $\mathcal{B}_\gamma$ における、Dirichlet 問題のグリーン関数とする。グリーン

作用素 G

$$(2.1) \quad G_\gamma u(x) = \int_{\Omega_\gamma} g_\gamma(x, x') u(x') dx'$$

で定義する. 固有値問題 (1) は, G_γ を用いて

$$(2.2) \quad (\lambda G_\gamma - I) u(x) = 0$$

に変換される. 微分方程 (1.2) を用いる. $L^2(\Omega_\gamma)$ の元 $u(x)$

をこれに代り $\Omega_{\tilde{\gamma}}$ 上の関数に置き換えて

$$\omega_\gamma^{r*} u(x) = u(\omega_\gamma^r(x)) \in L^2(\Omega_{\tilde{\gamma}})$$

とあり $\tilde{u}(x) = \omega_\gamma^r u(x)$, $\tilde{v}(x) = \omega_\gamma^{r*} u(x)$ とすると
内積の変換は,

$$(2.3) \quad \int_{\Omega_\gamma} u(y) v(y) J_\gamma^r(y) dy = \int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} \tilde{u}(x) \tilde{v}(x) dx.$$

である. $J_\gamma^r(y)$ は ω_γ^r の Jacobian 行列式である.

(2.2) は

$$(2.4) \quad (I - \lambda G_{\tilde{\gamma}}^r) \tilde{u}(x) = 0,$$

where $\tilde{u}(x) = (\omega_\gamma^{r*} u)(x)$ and $G_{\tilde{\gamma}}^r = \omega_\gamma^{r*} G_\gamma (\omega_\gamma^r)^T$.

(2.4) は, 固定した Hilbert 空間 $L^2(\Omega_{\tilde{\gamma}}) = \mathcal{H}_\gamma$ で考えれば

よい. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\gamma$. $\mathcal{H}_\gamma$ の単位球 $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \tilde{u} \in L^2(\Omega_{\tilde{\gamma}}) : \int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} |\tilde{u}(x)|^2 dx = 1 \right\}.$$

とかく.

① も可分の Hilbert 多様体である。

次のような写像も考えよう。

$$(2.5) \quad \Phi; U(\tilde{f}) \times \overset{\perp}{\mathbb{C}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \overset{\perp}{L^2} \\ (\gamma, \tilde{u}, \lambda) \longrightarrow \bar{\Phi}(\gamma, \tilde{u}, \lambda) = (\tilde{u} - \lambda G_{\tilde{f}}^{\gamma} \tilde{u})$$

さらに、ここで γ を固定して、次の写像も考えよう。

$$\Phi_{\gamma}; \overset{\perp}{\mathbb{C}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \overset{\perp}{L^2} \\ (\tilde{u}, \lambda) \longrightarrow \bar{\Phi}(\gamma, \tilde{u}, \lambda).$$

これについて、

命題 1. 上の写像 Φ_{γ} は C^{∞} 級の Fredholm 写像で、その指数は 0 である。

さて、 $(\gamma, \tilde{u}, \lambda) \in U(\tilde{f}) \times \overset{\perp}{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}$ をとる。写像 Φ の二重点での接写像は、

$$(2.6) \quad \delta \bar{\Phi}(\gamma, \tilde{u}, \lambda) = \delta \lambda G_{\tilde{f}}^{\gamma} \tilde{u} + (1 - \lambda G_{\tilde{f}}^{\gamma}) \delta \tilde{u} + \lambda (\delta G_{\tilde{f}}^{\gamma}) \tilde{u}$$

である。 $\delta \tilde{u} \in T_{\tilde{u}} \overset{\perp}{\mathbb{C}}$ は、

$$(2.7) \quad \int_{\Omega_{\tilde{f}}} \tilde{u}(x) \delta \tilde{u}(x) dx = 0$$

を満足する。(2.6) 式の最後の項は、境界の変動 $\delta \Omega$ で生じる変動に相当する。この部分は、まろ人と、計算される。

命題 2 (Hadamard's variational formula).

任意の $u \in L^2(\partial\Omega_r)$ に対し,

$$(2.8) \quad (\omega_r^{\sigma^*})^{-1} (\delta G_r^{\sigma}) \omega_r^{\sigma^*} u(y) = V_{\delta r} u(y)$$

と表わす,

$$(2.9) \quad V_{\delta r} u(y) = - \int \int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial g_r(y, r(\theta))}{\partial r} \frac{\partial g_r(r(\theta), y')}{\partial r} \langle X(r(\theta)), \nu_{\theta} \rangle d\sigma_{\theta} u(y') dy' \\ + \langle \text{grad } G_r u(y), X(y) \rangle - G_r(\langle X, \text{grad } u \rangle)(y).$$

ここで $d\sigma_{\theta}$ は σ の線素で, $\langle X(r(\theta)), \nu_{\theta} \rangle \in T_r \Gamma$.

つまり我々 17 次の定理を証明する.

定理 2: $t_f \neq 0$ は, 写像

$$\Phi; V(\tilde{r}) \times \mathbb{S} \times \mathbb{R} \longrightarrow t_f$$

の regular value である.

証明. $\Phi(r, \tilde{u}, \lambda) = 0 \in t_f$ と仮定する. すると

と,

$$(2.10) \quad (I - \lambda G_r^{\sigma}) \tilde{u} = 0,$$

$$u(x) = (\omega_r^{\sigma^*})^{-1} \tilde{u} \quad \text{と置く.}$$

$$(2.11) \quad (I - \lambda G_r) u = 0 \quad \text{in } L^2(\partial\Omega_r)$$

証明すべきことは, $\delta\Phi(r, \tilde{u}, \lambda)$ の像が, $\mathcal{H} = L^2(\partial\Omega)_\gamma$ と一致する点である. それには $\delta\Phi(r, \tilde{u}, \lambda)$ の像が稠密であることを示せばよい. $\tilde{v} \in \mathcal{H}$ が $\int_{\Omega} \delta\Phi(r, \tilde{u}, \lambda) \tilde{v} dx = 0$ と仮定する. すると

$$(2.12) \quad 0 = \delta\lambda \int_{\partial\Omega} G_\sigma^\delta \tilde{u}(x) \tilde{v}(x) dx + \int_{\partial\Omega} (I - \lambda G_\sigma^\delta) \delta\tilde{u}(x) \tilde{v}(x) dx \\ + \lambda \int_{\partial\Omega} (\delta G_\sigma^\delta) \tilde{u}(x) \tilde{v}(x) dx.$$

である. ところで, $\delta u \in T_{\tilde{u}}\mathcal{U}$ である. この条件は,

$$(2.13) \quad \int_{\Omega} u(y) \delta u(y) J_\sigma^\delta(y) dy = 0$$

$\delta\tilde{u} = (\omega_\sigma^*)^{-1} \delta u$ である. (2.12) 式は, 次の三つの連立方程式系と同値である:

$$(2.14) \quad \int_{\Omega} u(y) w(y) dy = 0$$

$$(2.15) \quad \int_{\partial\Omega} (I - \lambda G_\sigma) \delta\tilde{u}(y) w(y) dy = 0$$

$$(2.16) \quad \int_{\partial\Omega} V_\sigma u(x) w(x) dx = 0$$

ここで,

$$(2.17) \quad w(y) = (\omega_\sigma^*)^{-1} \tilde{v}(y) J_\sigma^\delta(y).$$

とありた。

$\delta \tilde{u}$ は, 条件 (2.13) を満たす任意の関数であるから,

(2.15) より, C は定数と見て,

$$(2.18) \quad (I - \lambda G_r) w(y) = C u(y) J_r^{\tilde{r}}(y).$$

$I - \lambda G_r$ の対称性を用いると, 任意の $u \in \ker(I - \lambda G_r)$ に対し,

$$0 = \int u(y) (I - \lambda G_r) w(y) dy = C \int |u(y)|^2 J_r^{\tilde{r}}(y) dy$$

これから, $C = 0$ を得る. 従って,

$$(2.19) \quad (I - \lambda G_r) w(y) = 0$$

つまり $w \in C^4(\bar{\Omega}_r)$ で

$$(2.1) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda) w(y) = 0 & \text{in } \Omega_r \\ w|_{\partial_r} = 0 \end{cases}$$

が成立する. (2.11) と (2.16), (2.19) を用いると

$$(2.21) \quad \lambda^{-1} \int \frac{\partial u}{\partial \nu_a}(r|a) \frac{\partial w}{\partial \nu_a}(r|a) \langle X(r|a), \nu_a \rangle d\sigma_a = 0$$

$\langle X(r|a), \nu_a \rangle = \delta r|a$ は任意であるから, $u \neq 0$ なら

$$(2.22) \quad \frac{\partial w}{\partial \nu_a}(r|a) \equiv 0$$

が, ある δ 上の開集合で成立する. これは δ がある

だけ, Aronson's 定理を用いると $w(y) \equiv 0$

on $\bar{\Omega}_r$ が言える. 従って, $\psi(x) \equiv 0$. 定理 2 は

示される.

定理 1' は, この定理 2 と Uklénbeck [4] の横断性定理 2 によって示される。

§ 3 Hadamard 変分公式の証明のスケッチ.

前節で用いた Hadamard 変分公式は, Hadamard [5] によって述べられたが, そこにおける証明は, $f(\theta) = \langle X(\theta), \dot{f}(\theta) \rangle$ が, 正又は負の定符号のときのみしか有効でない。その後厳密な証明は, 幾通りも得られてはいるが, (例えば [6] [7] [8]) いずれも単純ではなく, Hadamard の最初の証明の着想に比べると, 不満を感じる。最近, 筆者は, 小沢真氏と協力して, Hadamard の最初の着想も, 極めて少くだけ修正すれば, 殆んど, Hadamard の最初の着想の通りで $f(\theta)$ が符号も変える一般の場合も, Hadamard の公式が証明されることを指摘した [7]。ここでは, それに少し触れてみたい。もう一度状況を明確にしよう。

$\partial \Omega$ を $\mathbb{R}^2$ の有界領域で, $\partial \Omega = \gamma$ でその境をあらわす。 $f(x)$ を γ 上で定義された C^∞ の実関数とする (γ は C^∞ としておく。) ν_x を $x \in \gamma$ での γ の外単位法線とする。 $\varepsilon \geq 0$ に対して

$$\gamma_\varepsilon = \{x + \varepsilon f(x) \nu_x; x \in \gamma\}$$

は、 ε が十分小さければ、ある有界領域 $\partial\Omega_\varepsilon$ を囲む。

$g_\varepsilon(x, y)$ を $\partial\Omega_\varepsilon$ における Dirichlet 問題のグリーン関数とする。即ち

$$(3.1) \quad \begin{cases} \Delta_x g_\varepsilon(x, y) = -\delta(x-y) \\ g_\varepsilon(x, y)|_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

を用いることもする。Hadamard の変分公式は、次のように述べることが出来る。(これは §2 と多少形が違ってくるが、Hadamard のもとの公式の形である。)

定理 3.1 (Hadamard's variational formula)

$x, y \in \Omega$, $x \neq y$ に対して

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (g_\varepsilon(x, y) - g_0(x, y)) \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g_0(x, z)}{\partial \nu_z} \cdot \frac{\partial g_0(y, z)}{\partial \nu_z} f(z) d\sigma_z \end{aligned}$$

ここで、 $d\sigma_z$ は $z \in \partial\Omega$ での $\partial\Omega$ の線素。

証明. $y \in \Omega$ を固定する。 $g_0(x, y)$ も x の関数と思えば、 $\bar{\Omega} \setminus \{y\}$ で C^∞ 関数である。したがって、Whitney の拡張定理により、 $g_0(x, y)$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ に

C^∞ に拡張し、 $\tilde{g}_0(x, y)$ とおく。

$$\Delta_x \tilde{g}_0(x, y) = \delta(x-y) + h(x, y)$$

が、任意の $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ で成立する。但し $h(x, y)$ は $x \in \mathbb{R}^2$ の C^∞ 関数で、 $x \in \overline{\Omega}$ のとき $h(x, y) \equiv 0$ である。すなわち、任意の x に対して

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} h(x, y) \right| \leq C_{\alpha} |\text{dist}(x, \partial\Omega)|^2$$

という式が成立する。 $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ は x と $\partial\Omega$ の距離。

C_{α} は正定数。Green-Stokes の公式から、 $x, y \in \Omega$ のとき

$$\begin{aligned} & g_{\varepsilon}(x, y) - g_0(x, y) \\ (B.3) \quad &= \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} (\Delta_z g_{\varepsilon}(x, z) \tilde{g}_0(z, y) - \Delta_z \tilde{g}_0(z, y) g_{\varepsilon}(x, z)) dz \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} h(z, y) g_{\varepsilon}(x, z) dz \\ &= \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \left(\frac{\partial g_{\varepsilon}(x, z)}{\partial \nu_z^{\varepsilon}} \tilde{g}_0(z, y) - \frac{\partial \tilde{g}_0(z, y)}{\partial \nu_z^{\varepsilon}} g_{\varepsilon}(x, z) \right) d\sigma_z^{\varepsilon} \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\varepsilon} - \overline{\partial\Omega}} h(z, y) g_{\varepsilon}(x, z) dz \\ &= \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{\partial g_{\varepsilon}(x, z)}{\partial \nu_z^{\varepsilon}} \tilde{g}_0(z, y) d\sigma_z^{\varepsilon} + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon} - \overline{\partial\Omega}} h(z, y) g_{\varepsilon}(x, z) dz. \end{aligned}$$

ここで, $d\sigma_\varepsilon$ は γ_ε の線素をあらわす. この方の等号では, (3.1) 式の境界条件を用いた. この (3.3) 式の右辺の第2項は, K の上記の不等式を用いると

$$(3.4) \quad \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\partial\Omega}} K(z, y) g_\varepsilon(x, z) dz \right| \leq O(\varepsilon^2)$$

である. $\text{dist}(z, \gamma) \leq \varepsilon$ が任意の $z \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\partial\Omega}$ に対し成立するからである. 従って

$$(3.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (g_\varepsilon(x, y) - g_0(x, y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial g_\varepsilon(x, z)}{\partial \nu_z^\varepsilon} \cdot \tilde{g}_0(z, y) dz$$

を得る. $\tilde{g}_0(z', y) = 0$ for $\forall z' \in \partial\Omega_0 \equiv \gamma$ であるから, $z \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon$ において $z = z' + \varepsilon p(z') \nu_z$ とすると,

$$\tilde{g}_0(z, y) = \varepsilon p(z') \frac{\partial \tilde{g}_0(z', y)}{\partial \nu_{z'}} + O(\varepsilon^2)$$

である. 従って (3.5) に代入すると

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (g_\varepsilon(x, y) - g_0(x, y)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \varepsilon p(z') \frac{\partial \tilde{g}_0(z', y)}{\partial \nu_{z'}} \cdot \frac{\partial g_\varepsilon(x, z)}{\partial \nu_z^\varepsilon} dz \end{aligned}$$

となり, 定理 3.1 を証明出来る.

以上の証明には、楕円型方程式の *a priori* 評価、
グリーン接の存在、Whitney 拡張定理のみを用いてい
る。また、 n 次元の場合に、(かた Schechter 等の論文) いた
properly elliptic な楕円型方程式の場合にも、証明は
容易に拡張出来る。詳しくは [7] を御覧いただきたい。
。

注意。序文中に述べた、我々の定理 1 に極く良く
似た結果が、Michelitti 氏によって、既に得られてい
る。Univ. Paris Sud. の Sant 教授から御指摘いた
さす。同教授に感謝いたします。

文献表

- [1] Arnold, V.I., Modes and quasi-modes. Functional Anal. and its appl. vol. 6, 94-101 (1972).
- [2] Garabedian, P. R.; Partial differential equations. John-Wiley & Sons, New York (1964).
- [3] Hadamard, J.; Memoire sur le probleme d'analyse relatif a l'equilibre des plaques elastiques encastrees. Oeuvres, C.N.R.S. tom 2. 515-631 (1968).
- [4] Uhlenbeck, K., Generic properties of eigen functions. Amer. J. Math. vol. 98. 1057-1078 (1976).
- [5] Garabedian, p.R., & Schiffer., Convexity of domain functionals. J. Anal. Math., vol.2., 281-368 (1978).
- [6] Aomoto, K., Formule variationnelle d'Hadamard et modele euclidien des varietes differentiable plongeées. (to appear in J. Functional analysis)

- [7] Fujiwara & Ozawa, Hadamard's variational formula for the Green functions of some normal elliptic boundary problems. Proc. Japan Acad. 54 A, 215-220 (1978).
- [8] Fujiwara, Tanikawa & Yukita, The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation. I. Proc. Japan Acad. vol.54A, 87-91 (1978).
- [9] Ozawa. S., Perturbation of domains and Green kernels of heat equations. Proc. Japan Acad. 54A, 322-325 (1978).
- [10] Micheletti, Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, vol 26. (1972)
- [11] -----, Petrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli auto valori, Ann. Scuola Norma. Sup. Pisz, vol. 26, (1973).