

台がコンパクトでない初期 data をもつ半線型
波動方程式の大域解の存在について

北大理 久保田幸次 (Koji Kubota)
早大理工 津田谷公利 (Kimitoski Tsutaya)

§ 1. 序. 次の初期値問題を考える:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= A|u|^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, T), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

ここで $n=2$ 又は $n=3$, A, p は定数で $A > 0$, $p > 1$, $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < T \leq \infty$,

$u_t = \partial u / \partial t$, $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$. このノートでは,

(1.1) の解として古典解, i.e., $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T))$ のみを考える。

(1.1) の方程式は $u_{tt} - \Delta u = F(u, Du, D^2u)$ の特別な場合である。ここで Du, D^2u は u の (x, t) に関する 1 階又は 2 階偏導関数である。右辺の F が u にのみ依存するか、或は Du, D^2u にのみ依存するかで結果が著しく異なることが知られている (e.g. John [6], p. 31)。

ここでは $F(u)$ の場合を扱う。このときは $F(u) = A|u|^p$ 又は $F(u) = A|u|^{p-1}u$ の形が本質的であると考える (c.f. 下の Remarks 中の 6))。 (1.1) における $F(u)$ の形は John [5] が初めて本格的にとり扱った。

話を (1.1) に戻そう。以下、初期 data には

$$(1.2) \quad \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta| \leq 2} |D_x^\beta g(x)| \leq \frac{C\varepsilon}{(1+r)^{1+k}}$$

for $x \in \mathbb{R}^n$ を仮定する。ここで、 $r = |x|$, ε, k は正のパラメーター, C は定数である。一般に ε が小さくなれば解が存在する時間 T は大きくなることが期待される。

定義. (1.1) の解 $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ が存在するような T の上限を lifespan といい、 $T(\varepsilon)$ とかく。

我々の関心は、①どのような条件下で大域解が存在する (i.e. $T(\varepsilon) = \infty$) か、②存在しない場合 $T(\varepsilon)$ は ε にどのように依存するか、の2点である。以下、2次方程式

$$(1.3) \quad (n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$$

の正の根を $p_0(n)$ とかく。ちなみに

$$3 < p_0(2) = \frac{3+\sqrt{17}}{2} < 4, \quad 2 < p_0(3) = 1+\sqrt{2} < 3.$$

初期 data がコンパクトな台をもつ場合に知られている主な結果.

(1.4) $f(x) = \varepsilon \varphi(x)$, $g(x) = \varepsilon \psi(x)$, $\varphi \in C_0^3$, $\psi \in C_0^2$ を仮定する。 $n=2$ 又は $n=3$ のとき、① $p > p_0(n)$ かつ $0 < \varepsilon \ll 1$ ならば $T(\varepsilon) = \infty$, ② $1 < p \leq p_0(n)$ ならば $T(\varepsilon) < \infty$ とする φ, ψ が存在する。この結果は、 $n=3$ かつ $p \neq p_0(3)$ のとき John [5], $n=2$ かつ $p \neq p_0(2)$ のとき Glassey [3], [4], $p = p_0(n)$ のときは Schaeffer [9] による。

(1.2) の下で知られている結果. (Asakura [2] による), $n=3$ かつ $p > p_0(3)$ とする。① $K > 2/(p-1)$ かつ $0 < \varepsilon \ll 1$ ならば $T(\varepsilon) = \infty$, ②

(1.5) $f=0$, $g(x) \geq \frac{\varepsilon}{(1+r)^{1+K}}$, $0 < K < \frac{2}{p-1}$ ならば $\forall \varepsilon > 0$ に対して $T(\varepsilon) < \infty$ 。

以下、解の存在時間についての我々の主要結果をのべる。

定理1. (大域解の存在). $n=2$ 又は $n=3$, $p > p_0(n)$ かつ (1.2) を仮定する。更に

$$(1.6) \quad K \geq \frac{2}{p-1}$$

ならば $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ なる ε に対して $T(\varepsilon) = \infty$ 。ここで ε_0 は A, p 及び K に依存する定数である。

定理2. (lifespan の下からの評価). $n=2$ とする。

$$(1.7) \quad p > p_0(2) \text{ かつ } 0 < K < \frac{2}{p-1}$$

又は

$$(1.8) \quad 2 < p \leq p_0(2) \text{ かつ } 0 < K < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$$

ならば

$$(1.9) \quad T(\varepsilon)^{2-(p-1)K} \geq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} \text{ for } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

をみたす正の定数 C, ε_0 が存在する (A, p, K に依存)。

$$(1.10) \quad 2 < p \leq p_0(2) \text{ かつ } K \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$$

ならば

$$(1.11) \quad \begin{aligned} T(\varepsilon)^{\delta(p)} \log T(\varepsilon) &\geq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} && \text{if } p \neq 3, \\ T(\varepsilon)^{1/3} (\log T(\varepsilon))^2 &\geq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 && \text{if } p = 3 \end{aligned}$$

for $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. をみたす正の定数 C, ε_0 が存在する。

ここで、 $\delta(p)$ は、 $2-(p-1)K$ において $K = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ と

おいたもの、i.e.,

$$(1.12) \quad \delta(p) = \frac{1}{p} - \frac{p-3}{2} = -\frac{p^2-3p-2}{2p}$$

(右辺の分子は (1.3) の左辺と同じものである)。

Remarks. 1). 定理1は、 $n=2$ のとき、 $K > \frac{2}{p-1}$ の場合は [7], [11] で、 $K = \frac{2}{p-1} \neq \frac{1}{2}$ のときは [7], [13] で独立に示されている。 $K = \frac{2}{p-1} = \frac{1}{2}$ の場合は [13] による。 $n=3$ かつ $K = \frac{2}{p-1}$ の場合は [12] による。

2). 定理1で $n=2$ のとき、(1.6) を (1.5) にあきかえると $\forall \varepsilon > 0$ に対して $T(\varepsilon) < \infty$ であることが、[11] と Agemi & Takamura [1] で独立に示されている。

3). 定理2について、先ず

$$(1.13) \quad p > p_0(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{p} > \frac{2}{p-1}$$

が成り立つことに注意する。(1.9)は、(1.7)の場合 [13]

による。(1.8)の場合は [7] の Th. 5.1 を、[12] の Prop. 4.3

(このノートの補題 3.3) を使って改良したものである。

(この補題は、定理 1 で $K = 2/(p-1)$, $K = 1/2$ ($n=2$),

$K = 1$ ($n=3$) の場合の証明にも使う。c.f. 補題 3.5 の記

明)。(1.11) は [7] の Th. 5.2 と同じものである。

4). (1.9) の逆向きの不等式も [1] で示されている (仮定は同じ, $\varepsilon > 0$ は任意, C は量る)。[1] では又

$$T(\varepsilon)^{\delta(p)} \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1} \quad \text{for } 1 < p < p_0(2)$$

も示されている。但し、 $f=0$, $g(x) = \varepsilon \psi(x)$, $\varepsilon > 0$,

$\psi \geq 0$, $\psi \neq 0$ 。ここで $\delta(p)$ は (1.12) で与えられる。

(1.4) の下ではより精密な評価が得られている。以下、 φ, ψ は適当にとる。e.g. $p=2$ のとき Lindblad [8] は

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T(\varepsilon)/a(\varepsilon) \in (0, \infty)$$

が存在することを示した。ここで $a(\varepsilon)$ は $\varepsilon^2 a(\varepsilon)^2 \times$

$\times \log(1+a(\varepsilon)) = 1$ をみたす。 $2 < p \leq p_0(2)$ のときは

Zhou [14] が ($\lim$ は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき)

$$\exists \lim \varepsilon^{p-1} T(\varepsilon)^{\delta(p)} \in (0, \infty) \quad \text{if } p < p_0(2)$$

を示した。 $p = p_0(2)$ のときは

$$C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p(p-1)} \leq \log T(\varepsilon) \leq C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p(p-1)}$$

をみたす正の定数 C_1, C_2 が存在することを示した。これを
 とすると、(1.11) における $\log T(\varepsilon)$ は ε を除ける可
 能性があると思われる。

5). $n=3$ に対し ε も定理 2 と同様のことが成り立つと思
 われる。(1.7) の下で (1.9) が成り立つことは [12] で示さ
 れている。(1.8) と (1.10) における $\frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ は $1 + \frac{1}{p}$ に
 変ず (c.f. § 4 の Remark 3 の最後)。

6). 最後に、定理 1, 2 共に (1.1) の右辺を次の性質 (H) を
 みたす $F(u)$ に置きかえてもそのまま成り立つ。(c.f. [27], [7],
 [11], [12], [13] etc). $n=2$ のときは

$$(H): F(u) \in C^2(R'), F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$$

かつ

$$|F''(u) - F''(v)| \leq A p(p-1) |u-v| (\max\{|u|, |v|\})^{p-3}$$

for $|u|, |v| \leq 1$ をみたす A , $p > p_0(2)$ が存在する。

$$\text{この条件から } |F'(u)| \leq A p |u|^{p-1}, |F(u)| \leq A |u|^p$$

for $|u| \leq 1$ が従うことに注意する。 $n=3$ については

[2] 又は [12] をみられたい。(Remarks 終)。

以下、定理 1, 2 の ^(証明の)概略をあげる。大筋では [7] に従い、[13]
 による改良を施す (主として補題 3.3 を使う部分)。又、
 $n=3$ の場合は、 $n=2$ のときの論法の 1 部分で直に合うの
 でことわらない限り $n=2$ とする。(c.f. § 4 の Remark 3)。

ところで、(1.1)の解を1つ見つけるには次の積分方程式を解けばよい (一意性は [6] の Appendix より従う) :

$$(1.14) \quad u = u_0 + L(A|u|^p).$$

ここで u_0 は線型方程式 i.e. (1.1) で $A=0$ といったときの解, L は $C^0(R^2 \times [0, \infty))$ 上の線型作用素で

$$\begin{aligned} (1.15) \quad L(v)(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t (t-\tau) d\tau \int_{|\xi| < 1} \frac{v(x+(t-\tau)\xi, \tau)}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int_{|w|=1} v(x+\rho w, \tau) dS_w \end{aligned}$$

で与えられる。(1.14)を逐次近似法で解く (John [5] 以来この方法がとられている)。i.e.

$$u_n = u_0 + L(A|u_{n-1}|^p) \quad (n=1, 2, \dots)$$

で与えられる関数列が次の空間

$$X = \{u \in C^0(R^2 \times [0, T]); D_x^\alpha u \in C^0(R^2 \times [0, T]) \text{ and } \|D_x^\alpha u\| < \infty \text{ for } |\alpha| \leq 2\}$$

で収束するのを示す。ノルムは (1.2) の K によって与えられる

$$0 < K < (1/2) + (1/p) < 1 \text{ のときは}$$

$$(1.16) \quad \|u\| = \sup_{(x,t) \in R^2 \times [0, T]} |u(x, t)| / \Phi_0(r, t), \quad r=|x|$$

と定義する。ここで $\Phi_0(r, t)$ は次の節の (2.6) で与えられる関数である。(1.14) を解く際に問題となるのは先が u_0 の decay rate である。これは §2 でのべる。又、作用素 L に関する a priori 評価

$$(1.17) \quad \|L(u)^p\| \leq \tilde{C} \|u\|^p \quad \text{for } u \in C^0(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$$

も本質的である。この定数 $\tilde{C}$ を使うと、 $p > 2$ かつ

$$(1.18) \quad p 2^p A \tilde{C} \|u_0\|^{p-1} \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \|u_0\| \leq \frac{1}{2}$$

の下で (1.14) の解が X に存在することが分る(この部分は routine work)。又、§2 で $\|u_0\| \leq C_0 \varepsilon$ が示されるから、(1.18) は

$$(1.19) \quad p 2^p A \tilde{C} (C_0 \varepsilon)^{p-1} \leq 1 \quad \text{かつ} \quad C_0 \varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

より従う。ここで C_0 は K にのみ依存する。ところで $\tilde{C}$ は一般に A, p, K 及び T に依存するが、特に、 T に依存しなければ $T(\varepsilon) = \infty$ が結論される。定理 1 の ε_0 としては (1.19) をみたす最大 ε をとればよい。他方、 $\tilde{C}$ が T に依存する場合は、 $\varepsilon_0 = 1/(2C_0)$ とおき、(1.19) の第一式をみたす T を一つとると $T(\varepsilon) \leq T$ が結論される。以上が大まかな仕組みである。

§2. 脊次方程式の解 u_0 の decay rate. $u_0(x, t)$ を次の初期値問題の解とする：

$$(2.1) \quad \begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty), \\ &u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

$f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ならば (2.1) の C^2 の解 u_0 が一意的に存在し、かつ

$$(2.2) \quad u_0(x, t) = \partial_t M(f)(x, t) + M(g)(x, t)$$

と表わされることはよく知られている。ここで

$$(2.3) \quad \begin{aligned} M(f)(x, t) &= \frac{t}{2\pi} \int_{|\xi| < 1} \frac{f(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \int_{|w|=1} f(x + \rho w) dS_w. \end{aligned}$$

$$\left(n=3 \text{ のときは } M(f)(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|w|=1} f(x + tw) dS_w \right)$$

この § の目的は、(1.2) の下で u_0 の decay rate を調べることにである。簡単のため (1.2) における $C \in 1$ にとる。i.e.

$$(2.4) \quad \sum_{|\alpha| \leq 3} |D_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(1+r)^{1+\kappa}} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^2$$

を仮定する。ここで $r = |x|$, $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ 。このとき

定理 2.1. ([77, Prop. 2.1]).

$$(2.5) \quad \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha u_0(x, t)| \leq C_0 \varepsilon \Phi_0(r, t) \quad \text{for } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$$

が成り立つ。ここで C_0 は K にのみ依存する定数, Φ_0 は

$$(2.6) \quad \Phi_0(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t+r)^K} & \text{if } 0 < K < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+t+r}} \left(1 + \log \frac{1+t+r}{1+|t-r|} \right) & \text{if } K = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+t+r} (1+|t-r|)^{K-(1/2)}} & \text{if } \frac{1}{2} < K < 1, \\ \frac{1 + \log(1+|t-r|)}{\sqrt{1+t+r} \sqrt{1+|t-r|}} & \text{if } K = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1+t+r} \sqrt{1+|t-r|}} & \text{if } K > 1 \end{cases}$$

で与えられる。

Remarks 1). decay rate (2.6) は $0 \leq r \leq t$ は optimal であり (c.f. [7] の Appendix)。

2). $n=3$ のとき Φ_0 は

$$(2.7) \quad \Phi_0(r, t) = \begin{cases} (1+t+r)^{-K} & \text{if } 0 < K < 1, \\ \frac{1}{1+t+r} \left(1 + \log \frac{1+t+r}{1+|t-r|} \right) & \text{if } K = 1, \\ (1+t+r)^{-1} (1+|t-r|)^{1-K} & \text{if } K > 1 \end{cases}$$

になる。この事実は Asakura [2] で示されているが、

(2.5) の証明の論法から分かる (c.f. (2.11) の下の remark)。

又、 $0 \leq \gamma \leq t$ で optimal であることも示せる。

定理 2.1 の証明の概略. [7] の Prop. 2.1 の証明を整理してのべる。 $0 \leq t \leq 1$ のときは、(2.3) の初めの表現を使うと容易に

$$(2.8) \quad \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha u_0(x, t)| \leq 2\varepsilon \left(\frac{4}{1+t+\gamma} \right)^{1+K}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

が分るから、以下 $t \geq 1$ とする。このときは、(2.2),

$$(2.3), (2.4) \text{ より } (1+t \leq 2t \text{ と } 1 \leq 2)$$

$$(2.9) \quad \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha u_0(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^t \frac{p dp}{\sqrt{t^2 - p^2}} \int_{|w|=1} \frac{dS_w}{(1+|x+pw|)^{1+K}}$$

に従う。右辺の球面積分に次の補題を適用する。

補題 2.2. ([7], Lemma 2.3). $b(\lambda)$ は $[0, \infty)$ 上の連続関数, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ かつ $p > 0$ ならば

$$\begin{aligned} \int_{|w|=1} b(|x+pw|) dS_w &= 2^{3-n} \omega_{n-1} (rP)^{2-n} \times \\ &\quad \times \int_{|p-r|}^{p+r} \lambda b(\lambda) h(\lambda, p, r) d\lambda \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\omega_k = 2\sqrt{\pi k} / \Gamma(\frac{k}{2})$ ($k \geq 1$),

$$h(\lambda, p, r) = \left\{ p^2 - (\lambda - r)^2 \right\}^{\frac{n-3}{2}} \left\{ (\lambda + r)^2 - p^2 \right\}^{\frac{n-3}{2}}.$$

この補題を $n=2$ と $1 \leq n \leq 2$ (2.9) に適用する。

$$\int_{|\omega|=1} \frac{dS_{\omega}}{(|1+\lambda+\rho\omega|)^{1+k}} = 4 \int_{|p-r|}^{p+r} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^{1+k}} h(\lambda, p, r) d\lambda$$

かつ $\lambda(1+\lambda)^{-1-k} \leq (1+\lambda)^{-k}$ である

$$(2.10) \quad \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_{\alpha}^{\alpha} u_0(x, t)| \leq 2\varepsilon I(r, t),$$

$$(2.11) \quad I(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_{|p-r|}^{p+r} \frac{h(\lambda, p, r)}{(1+\lambda)^k} d\lambda$$

が従う。

Remark. $n=3$ のときは同様にして。

$$I(r, t) = \frac{1}{2r} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\lambda)^k} d\lambda$$

が従う。 $n \neq 1$ (2.5) with (2.7) が得られることは、 $t \geq 2r$ と $t \leq 2r$ に場合分けし、前者では $t+r \sim t-r \sim t$ 、後者では $r \sim t+r$ に注意すれば容易に分る。

さて、(2.11) に戻る。積分の順序を交換する。 $t > r$ のときは、 $0 \leq \rho \leq t$, $|p-r| \leq \lambda \leq p+r$ は $0 \leq \lambda \leq t+r$, $|\lambda-r| \leq \rho \leq \min\{t, \lambda+r\}$ と同値だから

$$\int_0^t d\rho \int_{|p-r|}^{p+r} d\lambda = \int_{t-r}^{t+r} d\lambda \int_{|\lambda-r|}^t d\rho + \int_0^{t-r} d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{\lambda+r} d\rho$$

と分れる。 $r \geq t$ のときは、 $0 \leq p \leq t$, $|p-r| \leq \lambda \leq p+r$ は $r-t \leq \lambda \leq r+t$, $|\lambda-r| \leq p \leq t$ と同値だから

$$\int_0^t dp \int_{|p-r|}^{p+r} d\lambda = \int_{r-t}^{r+t} d\lambda \int_{|\lambda-r|}^t dp$$

となる。従って

$$(2.12) \quad I_1(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^K} \int_{|\lambda-r|}^t \frac{p h(\lambda, p, r)}{\sqrt{t^2 - p^2}} dp.$$

$$(2.13) \quad I_2(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\max\{0, t-r\}} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^K} \int_{|\lambda-r|}^{\lambda+r} \frac{p h(\lambda, p, r)}{\sqrt{t^2 - p^2}} dp$$

とあくと

$$(2.14) \quad I(r, t) = I_1(r, t) + I_2(r, t)$$

が成り立つ。次に、

$$(2.15) \quad h(\lambda, p, r) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - (\lambda-r)^2} \sqrt{(\lambda+r)^2 - p^2}}$$

に注意して、 p -積分は 公式

$$(2.16) \quad \int_a^b \frac{p}{\sqrt{p^2 - a^2} \sqrt{b^2 - p^2}} dp = \frac{\pi}{2}$$

を適用する。 I_1 では $a = |\lambda-r|$, $b = t$ とおき

$$(\lambda+r)^2 - p^2 \geq (\lambda+r)^2 - t^2 \geq (r+t)(\lambda+r-t)$$

と余分の因子を処理すると (2.12), (2.16) より

$$(2.17) \quad I_1 \leq \frac{1}{\sqrt{t+r}} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\lambda)^K \sqrt{\lambda+r-t}} d\lambda$$

が得られる。 I_2 については

$$t^2 - p^2 \geq t^2 - (\lambda+r)^2 \geq (t+r)(t-\lambda-r)$$

と処理すると

$$(2.18) \quad I_2 \leq \frac{1}{\sqrt{t+r}} \int_0^{\max\{0, t-r\}} \frac{1}{(1+\lambda)^K \sqrt{t-r-\lambda}} d\lambda$$

が得られる。更に $(t+r)^{-1/2} \leq \sqrt{2} (1+t+r)^{-1/2}$

for $t \geq 1$ に注意すると

$$(2.19) \quad I_1 \leq \begin{cases} C_1 \Phi_0(r, t) & \text{if } 0 < K \leq 1/2, \\ C_1 (1+t+r)^{-1/2} (1+|t-r|)^{(1/2)-K} & \text{if } K > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(2.20) \quad I_2 \leq \begin{cases} C_2 (1+t+r)^{-1/2} (1+|t-r|)^{(1/2)-K} & \text{if } 0 < K < 1, \\ C_2 \Phi_0(r, t) & \text{if } K \geq 1 \end{cases}$$

が得られる。これらの証明には次の補題を使う (後でも使う)。

補題 2.3. a が実数ならば

$$\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^a \sqrt{\lambda+r-t}} \leq C \begin{cases} (1+t+r)^{(1/2)-a} & \text{if } a < \frac{1}{2}, \\ 1 + \log \frac{1+t+r}{1+|t-r|} & \text{if } a = \frac{1}{2} \\ (1+|t-r|)^{(1/2)-a} & \text{if } a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで C は a により依存する。

補題 2.4. a が実数, $0 \leq r < t$ ならば

$$\int_0^{t-r} \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^a \sqrt{t-r-\lambda}} \leq C \begin{cases} (1+t-r)^{(1/2)-a} & \text{if } a < 1 \\ \frac{1+\log(1+t-r)}{\sqrt{1+t-r}} & \text{if } a = 1 \\ (1+t-r)^{-1/2} & \text{if } a > 1 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで C は a により依存する。

前者の証明は、[7] の p.10, 後者は [7] の Lemma 3.10 の証明をみられたい。さて、 $0 < K < 1/2$ のとき (2.20) の右辺が重。でおさえられることに注意すれば、(2.5) は、(2.8), (2.10), (2.14), (2.19) 及び (2.20) から直ちに従う。定理 2.1 の証明終。

§ 3. Basic a priori estimate. この § では、(1.17)

をいかにして引き出すかを考える。場合分けを避けるために初期 data の decay rate が “小さい” とき、i.e. (2.4) における K を

$$(3.1) \quad 0 < K < \frac{1}{2} + \frac{1}{p} < 1$$

に限る。この場合は、ノルムを (1.16) で与えることができる。 u_0 については、(2.5) より $\|u_0\| \leq C_0 \varepsilon$ が $\forall T > 0$ について成り立つ。

以下、 $u(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^2 \times [0, T))$ かつ $\|u\| < \infty$ を仮定する。このとき、

$$(3.2) \quad |L(|u|^p)(x, t)| \leq C_1 \|u\|^p \Phi_1(r, t),$$

$$(3.3) \quad \Phi_1(r, t) \leq C_2 \Phi_0(r, t)$$

が得られれば $\tilde{C} = C_1, C_2$ とおくと (1.17) が従う。

ここで $\Phi_1(r, t)$ は (2.6) で K を $pK-2$ におきかえたものである。但し、 $0 < pK \leq 2$ のときは、

$$\Phi_1(r, t) = (1+t+r)^{2-pK} \text{ とおく。}$$

以下、(3.2), (3.3) について考える。

命題 3.1. (3.1) の下で (3.2) が成り立つ。ここで C_1 は p, K により依存する。

Remark (3.1) を $K > (1/2) + (1/p)$ におきかえた場合、ノルムをどのように変えても $L(|u|^p)$ の decay rate (3.2) は Φ_1 で $K = (1/2) + (1/p)$ とおいたものより良くなるまい (c.f. §4 の Remark 2)。

命題 3.2. $n=2$ のとき、定理 1 の仮定及び (3.1) の下で (3.3) が成り立つ。ここで C_2 は p, K により依存する。

証明. (1.13) により、(1.6) と (3.1) を同時に満たす K が存在することに注意する。又、(1.6) は $pK-2 \geq K$ と同値だから、(2.6) と Φ_1 の定義より (3.3) が従う。

さて、命題 3.1 の証明であるが、 $K \neq 1/2$ のときは、

[7] の Prop. 3.1 の証明を整理した形でのべる。 $k=1/2$ のときは、更に次の補題も使う。

補題 3.3. ([12], Prop. 4.3). 自然数 δ と $x \geq 0$ に対して

$$\int_0^x \left(1 + \log \frac{1+x}{1+y}\right)^\delta dy = C_\delta x - \sum_{k=1}^{\delta} \sum_{r=1}^k \frac{\delta!}{k!} \binom{\delta}{r} x \times (\log(1+x))^r$$

が成り立つ。ここで $C_\delta = \sum_{k=0}^{\delta} \delta! / k!$ 。

証明. 左辺を $I_\delta(x)$ とおくと部分積分により

$$\begin{aligned} I_\delta(x) &= \left[(1+y) \left(1 + \log \frac{1+x}{1+y}\right)^\delta \right]_{y=0}^{y=x} + \delta I_{\delta-1}(x) \\ &= (1+x) - (1 + \log(1+x))^\delta + \delta I_{\delta-1}(x) \end{aligned}$$

が従う。ここで $I_0(x) = x$ 。今

$$J_k(x) = I_k(x) / k!$$

とおくと

$$J_k(x) = (k!)^{-1} \{ (1+x) - (1 + \log(1+x))^k \} + J_{k-1}(x).$$

これを $k=1, \dots, \delta$ について加えればよい。

命題 3.1 の証明の概略. $t \geq 1$ のときは定理 2.1 の証明中の (2.17), (2.18) で κ を p_{K-2} とおきかえた式を出せばよい。初めに t が小さいとき

(3.4) $|L(u)^p(x, t)| \leq C \|u\|^p (1+t+r)^{-pK}$, $0 \leq t \leq 1$
 を示そう。(1.16) より $|u(x, t)| \leq \|u\| \Phi_0(r, t)$ だから
 (1.15) の初めの表現より

$$|L(u)^p(x, t)| \leq \frac{\|u\|^p}{2\pi} \int_0^t (t-\tau) d\tau \int_{|\xi| < 1} \frac{\Phi_0(\lambda, \tau)^p}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi$$

が従う。ここで $\lambda = |x + (t-\tau)\xi|$ とおいた。又、 $0 < K < 1$ に注意すると (2.6) より

$\Phi_0(\lambda, \tau) \leq C (1+t+r)^{-K}$ for $0 \leq \tau \leq t \leq 1$
 が従う (∵ $r \leq 1$ のとき $1+\lambda-\tau \geq r$ かつ $r \leq 1+\lambda+\tau \leq 1+t+r$)。これから (3.4) は直ちに従う。

以下、 $t \geq 1$ とする。このときは (1.15) の後の表現より

$$|L(u)^p(x, t)| \leq \frac{\|u\|^p}{2\pi} \int_0^t \frac{p d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int_{|\omega|=1} \Phi_0(\lambda, \tau)^p dS_\omega$$

が従う。ここで $\lambda = |x + \rho\omega|$ とおいた。更に補題 2.2 を使くと、(2.10) と同様にして

$$(3.5) \quad |L(u)^p(x, t)| \leq \|u\|^p I(r, t),$$

$$(3.6) \quad I(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{p d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int_{|p-r|}^{p+r} \lambda \Phi_0(\lambda, \tau)^p \times$$

$$\times h(\lambda, p, r) d\lambda$$

が得られる。ここで $h(\lambda, p, r)$ は (2.15) で与えられる。又、(3.6) における (p, λ) 積分の範囲は、(2.11) で

t を $t-\tau$ に置きかえたものと同じだから、(2.14)に与けたのと同じ論法で

$$(3.7) \quad I(r, t) = I_1(r, t) + I_2(r, t)$$

と分けることができる。ここで

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^t d\tau \int_{|t-\tau-r|}^{t-\tau+r} \lambda \Phi_0(\lambda, \tau) \rho d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{t-\tau} \frac{\rho R(\lambda, \rho, r)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} d\rho,$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\max\{0, t-r\}} d\tau \int_0^{t-\tau-r} \lambda \Phi_0(\lambda, \tau) \rho d\lambda \int_{|\lambda-r|}^{\lambda+r} \frac{\rho R(\lambda, \rho, r)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} d\rho$$

である。更に ρ -積分に (2.16) を適用する。 I_1 では

$$\begin{aligned} (\lambda+r)^2 - \rho^2 &\geq (\lambda+r)^2 - (t-\tau)^2 \\ &= (\lambda+r+t-\tau)(\lambda+r-t+\tau) \end{aligned}$$

と処理して

$$(3.8) \quad I_1 \leq \int_0^t d\tau \int_{|t-\tau-r|}^{t-\tau+r} \frac{\lambda \Phi_0(\lambda, \tau) \rho d\lambda}{\sqrt{\tau+\lambda+r-t} \sqrt{t+r-(\tau-\lambda)}}$$

が従う。 I_2 では

$$\begin{aligned} (t-\tau)^2 - \rho^2 &\geq (t-\tau)^2 - (\lambda+r)^2 \\ &= (t-\tau+\lambda+r)(t-\tau-\lambda-r) \end{aligned}$$

として

$$(3.9) \quad I_2 \leq \int_0^{\max\{0, t-r\}} d\tau \int_0^{t-\tau-r} \frac{\lambda \Phi_0(\lambda, \tau) \rho d\lambda}{\sqrt{t-r-(\tau+\lambda)} \sqrt{t+r-(\tau-\lambda)}}$$

が得られる。更に、変数変換

$$(3.10) \quad \alpha = \tau + \lambda, \quad \beta = \tau - \lambda$$

を施す。(2.6)により $\Phi_0(\lambda, \tau)$ は $\tau + \lambda$, $|\tau - \lambda|$ のみの関数だから

$$(3.11) \quad \Psi(\alpha, \beta) = \begin{cases} (1+\alpha)^{-\kappa} & \text{if } 0 < \kappa < 1/2, \\ \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \left(1 + \log \frac{1+\alpha}{1+\beta}\right) & \text{if } \kappa = \frac{1}{2} \\ (1+\alpha)^{-1/2} (1+\beta)^{(1/2)-\kappa} & \text{if } \frac{1}{2} < \kappa < 1 \end{cases}$$

とあると $\Phi_0(\lambda, \tau) = \Psi(\alpha, |\beta|)$ となる。又、 $|\beta| \leq \alpha$, $\lambda \leq \alpha$ に注意すると、(3.8), (3.9), (3.10) より

$$I_1 \leq \frac{1}{2} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha+r-t}} \int_{-\alpha}^{t-r} \frac{\Psi(\alpha, |\beta|)^p}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta,$$

$$I_2 \leq \frac{1}{2} \int_0^{\max\{0, t-r\}} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{t-r-\alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha, |\beta|)^p}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta$$

と評価されるが、 β -積分はいずれも

$$2 \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha, \beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta$$

で表される。以上をまとめると、(3.5), (3.6), (3.7) より

補題 3.4.

$$(3.12) \quad |L(|u|^p)(\alpha, t)| \leq \|u\|^p (I_1(r, t) + I_2(r, t)),$$

$$(3.13) \quad I_1 \leq \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha+r-t}} \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha, \beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta,$$

$$(3.14) \quad I_2 \leq \int_0^{\max\{0, t-r\}} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{t-r-\alpha}} \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha, \beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta$$

が成り立つ。ここで Ψ は (3.11) で与えられる。

更に、(3.13), (3.14) から、(2.17), (2.18) で K を $pK-2$ とおき、式を引き出すには次の補題を証明すればよい。

補題 3.5. (3.1) を否定する。このとき $0 \leq \alpha \leq t+r$

に対して

$$(3.15) \quad J(\alpha) \equiv \int_0^{\alpha} \frac{\Psi(\alpha, \beta)^p}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta \leq \frac{C}{\sqrt{t+r} (1+\alpha)^{pK-1}}$$

が成り立つ。ここで C は p, K にかみ依存する。

証明の方針. 初めに $K \neq 1/2$ とする。このときは、

(3.11) より

$$\Psi(\alpha, \beta) = (1+\alpha)^{-\mu} (1+\beta)^{-\nu}$$

の形である。ここで $\mu + \nu = K$, かつ (3.1) より

$$(3.16) \quad p\nu < 1$$

が成る。

$$J(\alpha) = \int_0^{\alpha/2} d\beta + \int_{\alpha/2}^{\alpha} d\beta \equiv J_1(\alpha) + J_2(\alpha)$$

と分けると

$$J_1(\alpha) \leq \frac{1}{(1+\alpha)^{p\mu}} \sqrt{\frac{2}{t+r}} \int_0^\alpha (1+\beta)^{-p\nu} d\beta$$

だから、(3.16) により (3.15) が J_1 について成り立つ。

又、

$$J_2(\alpha) \leq (1+\alpha)^{-p\mu} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-p\nu} \int_{\alpha/2}^\alpha \frac{1}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta$$

だから

$$(3.17) \quad \int_{\alpha/2}^\alpha \frac{1}{\sqrt{t+r-\beta}} d\beta \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+r}} \alpha \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq t+r$$

より (3.15) が従う。 $K=1/2$ のときは

$$\Psi(\alpha, \beta) = (1+\alpha)^{-1/2} \left(1 + \log \frac{1+\alpha}{1+\beta}\right)$$

かつ

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta} \leq 2 \quad \text{for } \beta \geq \frac{\alpha}{2}$$

だから $J_1(\alpha)$ に補題 3.3 を適用すると、上と同様にして (3.15) が $C = \sqrt{2} C_8 + (1 + \log 2)^p$ として成り立つ。ここで 8 は $p \leq 8$ をみたす最小の自然数である。

結い、 $0 \leq t \leq 1$ のとき (3.2) は (3.4) より従う。 $t \geq 1$ のときは、補題 3.4, 3.5 より、(2.17), (2.18) で K を $pK-2$ とおきかえた式が成り立つから、定理 2.1 の証明と同様にして (3.2) が得られる。命題 3.1 の証明終。

§ 4. Remarks.

Remark 1. ((1.9) の証明について)。初めに、(1.7) 又は (1.8) より (3.1) 及び

(4.1) $0 < K < 2/(p-1)$, i.e., $2-pK+K > 0$ が従うことに注意する (c.f. (1.13)). 又、(2.5) と (1.16) より $\|u_0\| \leq C_0 \varepsilon$ が従うから、(1.9) は次の補題より従う。(c.f. § 1 の最後の部分)。

補題 4.1. $n=2$ のとき、(1.7) 又は (1.8) の下で

$$(4.2) \quad |L(|u|^p)(x,t)| \\ \leq C \|u\|^p \Phi_0(r,t) (1+T)^{2-(p-1)K} \\ \text{for } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T]$$

が成り立つ。ここで Φ_0 は (1.16) で与えられ、 C は p, K により依存する。

証明の方針. (3.4) により $1 \leq t < T$ と仮定してよい。

初めに

$$(4.3) \quad r \leq 2t, \quad t \geq 1$$

の場合を考える。補題 3.4 及び 3.5 は、(3.1) から (4.1) の下でも成り立つことに注意する。∴ $j=1, 2$ に対して

$$(4.4)_j \quad I_j(r,t) \leq C_j \Phi_0(r,t) (1+T)^{2-(p-1)K} \\ \text{for } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [1,T]$$

を示せば十分である。(3.13), (3.15) より

$$I_1 \leq \frac{C}{\sqrt{t+r}} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{(1+\alpha)^{2-pK}}{\sqrt{\alpha+r-t}} d\alpha$$

であるが

$$(1+\alpha)^{2-pK} = (1+\alpha)^{2-pK+K} (1+\alpha)^{-K}$$

とみると、(4.1), (4.3) より

$$I_1 \leq \frac{C}{\sqrt{t+r}} (1+3t)^{2-pK+K} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{d\alpha}{(1+\alpha)^K \sqrt{\alpha+r-t}}$$

が従う。更に補題 2.3 を使うと (4.4)₁ が得られる。

I_2 についても同様である。次に

$$(4.5) \quad r \geq 2t \geq 2$$

の場合を考える。(1.15), (1.16) より

$$|L(|u|^p)(x, t)| \leq \frac{\|u\|^p}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{p d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int_{|w|=1} \Phi_0(\lambda, \tau)^p dS_w$$

が従う。ここで $\lambda = |x + \rho w|$ とおいた。又、

$$r - t + \tau \leq \lambda \leq r + t - \tau$$

に注意すると、(2.6), (4.5) より

$$\Phi_0(\lambda, \tau) \leq (1 + \log 3) \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{-K} \quad \text{for } 0 < K < 1$$

が従う。よって

$$|L(|u|^p)(x, t)| \leq (1 + \log 3)^p \|u\|^p t^2 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{-pK}$$

かつ (4.5) 1=より

$$(1+r)^{-pK} \leq C (1+t+r)^{-K} (1+t)^{K-pK}$$

だから (4.2) が従う。

Remark 2. (2.4) における K が “大きい” 場合について先ほど触れなかったが、 $K > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ のときは、(3.2) における $L(|u|^p)$ の decay rate が K に応じて良くなることは期待できない。煩雑さを避けるために

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{p} < K < 1$$

を仮定する。このとき、(2.6) で $K - \frac{1}{2} > p^{-1}$ となることに注意する。今

$$(4.7) \quad \frac{1}{p} < \nu \leq K - \frac{1}{2}$$

なる ν を一つ固定して (1.16) を

$$(4.8) \quad \|u\|_\nu = \sup |u(x, t)| / \Phi_\nu(r, t)$$

に置きかえる。ここで $\sup$ は $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T)$ での。

$$\Phi_\nu(r, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t+r} (1+|t-r|)^\nu}$$

である。このとき、命題 3.1 は次のように変る (c.f. [7] の Prop. 3.2 & Remark 3.4)。

命題 4.2. (4.6) を仮定する。このとき

$$(4.9) \quad |L(|u|^p)(x, t)| \leq C_2 \|u\|_\nu^p \Phi_2(r, t)$$

$$\text{for } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T)$$

が成り立つ。ここで Φ_2 は Φ_1 で $K = 2^{-1} + p^{-1}$ といったもの、i.e., (2.6) で $K = (p-2)/2$ といったも

のである。又、 C_2 は p, ν によるのみ依存する。

注意、 $\nu = \min \{ K - (1/2), (p-3)/2 \}$ とおくと $p > p_0(2)$ の下で (4.7) 及び $\Phi_2 \leq C \Phi_\nu$ が成り立つことに注意する。Glassey [4] は、 f, g の台がコンパクト (従つて (1.2) で $K > 1$) のとき、(4.8) の Φ_ν を Φ_2 で置きかえたノルムで (4.9) が成り立つことを $p > p_0(2)$ の下で示した。

命題 4.2 の証明の方針。命題 3.1 と異なる点のみをのべる。補題 3.4 までは同じである。但し、(3.4) の pK を $(p/2) + p\nu$ に置きかえ、(3.11) を

$$\Psi(\alpha, \beta) = (1+\alpha)^{-1/2} (1+\beta)^{-\nu}$$

と置きかえる。又、(3.16) は $p\nu > 1$ に変るから (3.15) は

$$J(\alpha) \leq \frac{C}{\sqrt{t+\gamma}} (1+\alpha)^{-p/2}$$

と変る。他は前と同じである。

Remark 3. 今まで $n=3$ の場合については殆んど触れなかったが、 $n=2$ の場合と異なる点のみを簡単にのべる。§2では (2.3) が

$$(2.3)' \quad M(f)(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|w|=1} f(x+tw) dS_w$$

と変る。又、補題 2.2 を使った部分は

$$\int_{|w|=1} \frac{1}{(1+|\lambda+tw|)^{1+K}} dS_w = \frac{2\pi}{rt} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^{1+K}} d\lambda$$

となる。従つて (2.11) は

$$(2.11)' \quad I(r, t) = \frac{1}{2r} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\lambda)^K} d\lambda$$

と変る。これより (2.5) における重。が (2.7) で与えられることが容易にわかる (c.f. (2.11) の下の Remark)。

§3 では (3.1) を

$$(3.1)' \quad 0 < K < 1 + \frac{1}{p}$$

とおきかえる。この理由は (2.6) と (2.7) の差による。

i.e. ① $K - (1/2) < 1/p$ ($n=2$) が $K-1 < 1/p$ ($n=3$) に変り, ② $n=2$ のときの制限 $K < 1$ が $n=3$

では不要による, この 2 点である。又、(3.2) における

重, は (2.7) で K を $pK-2$ とおきかえたものになる。

理由は、(1.15) が

$$(1.15)' \quad L(u)(\lambda, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) d\tau \int_{|w|=1} u(\lambda + (t-\tau)w, \tau) dS_w$$

と変るために、(3.6) が

$$(3.6)' \quad I(r, t) = \frac{1}{2r} \int_0^t d\tau \int_{|t-\tau-r|}^{t-\tau+r} \lambda \Phi_0(\lambda, \tau)^p d\lambda$$

と変る。積分領域が (3.8) と同じであることに注意すると

(3.13) に似た式

$$(3.13)' \quad I \cong \frac{1}{2r} \int_{|t-r|}^{t+r} \alpha d\alpha \int_0^{\alpha} \Psi(\alpha, \beta)^p d\beta$$

が得られる。ここで $\Psi(\alpha, \beta)$ は (2.7) で $t+r$, $|t-r|$ をそれぞれ α, β に置きかえたものである。

ここで、(3.1)' 及び補題頁 3.3 を使うと

$$I(r, t) \cong \frac{C}{2r} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{1}{(1+\alpha)^{pk-2}} d\alpha$$

が得られる。これは (2.11)' で k を $pk-2$ と置きかえたものである。

§4 の Remark 1 では

$$(1.7)' \quad p > p_0(3), \quad 0 < K < \frac{2}{p-1}$$

又は

$$(1.8)' \quad 1 < p \leq p_0(3) \quad \text{かつ} \quad 0 < K < 1 + \frac{1}{p}$$

の下で (3.1)' と (4.1) が成り立つから (4.2) も前と同様にして得られる。Remark 2 では (4.6), (4.7) を

$$(4.6)' \quad K > 1 + \frac{1}{p}, \quad (4.7)' \quad \frac{1}{p} < \nu \leq K-1,$$

に、又、(4.8) で Φ_ν を

$$\Phi_\nu(r, t) = (1+t+r)^{-1} (1+|t-r|)^{-\nu}$$

と置きかえると (4.9) が得られる。ここで Φ_2 は Φ_1 で

$K = 1 + p^{-1}$, i.e. (2.7) で $K = p-1$ とおいても
 のである。終。

参考文献

- [1] Agemi R. and Takamura H., The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. #118 (1991).
- [2] Asakura F., Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions, Comm. in P.D.E., 11(13), 1459-1487 (1986).
- [3] Glassey R.T., Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations, Math. Z., 177, 323-340 (1981).
- [4] Glassey R. T., Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions, Math. Z., 178, 233-261 (1981).
- [5] John F., Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, Manuscripta Math., 28, 235-268 (1979).
- [6] John F., Nonlinear wave equations, Formation of singularities, Pitcher Lectures in the mathematical sciences, Lehigh Univ., University Lecture Series, A.M.S. Providence (1990).
- [7] Kubota K., Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with initial data of non-compact support in low space dimensions, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. #129 (1991).
- [8] Lindblad H., Blow-up for solutions of $\square u = |u|^p$ with small initial data, Comm. in P.D.E. 15(6), 757-821 (1990).
- [9] Schaeffer J., The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p , Proc. of Royal Soci. of Edinburgh, 101 A, 31-44 (1985).
- [10] Sideris T.C., Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, J. Diff. Equations 52, 378-406 (1984).

- [11] Tsutaya K., Global existence theorem for semilinear wave equations with noncompact data in two space dimensions, to appear in J. Diff. Eq.
- [12] Tsutaya K., Global existence and the life span of solutions of semilinear wave equations with data of non compact support in three space dimensions, Preprint (1991).
- [13] Tsutaya K., A global existence theorem for semilinear wave equations with data of non compact support in two space dimensions, to appear in Comm. in P.D.E.
- [14] Zhou Yi, Life span of classical solutions to $\square u = |u|^p$ in two space dimensions, Preprint (Fudan Univ. 1990).